SERIA WILEY ÎN OPTICĂ PURĂ ȘI APLICAȚĂ

Fondată de Stanley S. Ballard, Universitatea din Florida

EDITOR CONSULTANT: Joseph W. Goodman, Universitatea Stanford

\

BOYD • Radiometria și detectarea radiațiilor optice

CATHEY • Procesarea optică a informațiilor și holografie

DERENIAK ȘI CROWE • Detectoare optice de radiații

DE VAY • Maestru în tehnici optice

DUFFIEUX · Transformarea Fourier și aplicațiile sale în optică, ediția a doua ELMER · Designul optic al reflectoarelor, ediția a doua

GASKILL • Sisteme liniare, transformate Fourier și optică

GOLDIN • Unde și fotoni: o introducere în optica cuantică

GOODMAN • Optica Statistică

HopfandstEGEMAN · Electrodinamică clasică aplicată, No↑umel: LinearOptics', Volumul II: Nelinear Optics

HUDSON • Ingineria sistemului în infraroșu

JUDD AND WYSZECKI · Culoare în afaceri, știință și industrie, ediția a treia

KLEIN AND FURTAK • Optics, Ediția a II-a

LENGYEL · Lasere, ediția a doua

LEVI · Optica aplicată, Un ghid pentru proiectarea sistemelor optice, Volumul I și Volumul II

LOUISELL · Proprietăţi statistice cuantice ale radiaţiei

MALACARA • Optieal Shop Testing

MARATHAY · Elemente ale teoriei coerenței optice

McCARTNEY · Absorbția și emisia de gaze atmosferice: procesele fizice

McCARTNEY · Optica atmosferei: împrăștierea prin molecule și particule MIDWINTER • Fibre optice pentru transmisie

NASSAU · Fizica și chimia culorii

O'SHEA · Elemente de design optic modem

SCHUBERT ȘI WILHELMI • Optică neliniară și electronică cuantică

SHEN · Principiile opticii neliniare

STENHOLM • Fundamentele spectroscopiei cu laser

SUEMATSU SI IGA · Introducerea comunicatiilor prin fibra optica

VEST · Holografie Interferometrie

WYSZECKI AND STILES · Știința culorii: concepte și metode, date cantitative și formule, ediția a doua

YARIV AND YEH • Unde optice în cristale

YU • Procesarea optică a informațiilor

YU • Procesarea semnalului optic cu lumină albă

ZERNIKE AND MIDWINTER · Optică neliniară aplicată

OPTICA

A doua editie

Miles V. Klein

Universitatea din Illinois

Thomas E. Furtak

Institutul Politehnic Rensselaer

John Wiley G Sons

New York Chichester Brisbane Toronto Singapore

Catalogarea Bibliotecii Congresului în date de publicare.

Klein. Miles V., 1933-

Optica.

Include bibliografii și indici.

1. Optıcs. 1. FurtakZlhoniasE. II. Titlu QC355.2.K53 1986 53585-22598

ISBN 0-471-87297-0

Tipărit în Statele Unite ale Americii

10 9 8 7 6 5 4

Pentru Bobbi, Cindy și Gail și

Pentru Rick, Erin, Mark și Kay

Prefaţă

Prima ediție a acestei cărți a evoluat din prelegerile susținute la Universitatea din Illinois în timpul unui curs de un semestru pe tema Iight. Studenții au fost studenți juniori, seniori și studenți absolvenți din primul an în fizică, inginerie electrică, inginerie mecanică și chimie. Textul a fost conceput pentru a servi într-un curs de un semestru până la un an la nivel avansat de licență/absolvent din primul an.

A doua ediție a fost revizuită semnificativ pe tot parcursul. Obiectivul nostru principal a fost acela de a atenua abordarea și de a introduce consistența, menținând în același timp o conexiune cu concepte riguroase. Resuita este o carte utilă ca text, precum și ca referință generală asupra fundamentelor opticii. Revizuirile noastre se bazează pe o experiență de cinci ani în care am urmat un curs de geometrie și optică fizică la Institutul Politehnic Rensselaer. Acest curs a fost urmat de studenții de licență - absolvenții de secundă - în timpul celui de-al doilea semestru al anului academic.

Optica prezintă o introducere în conceptele clasice de geometrică! și optică fizică. Acestea sunt discutate cu referire la teoriile fundamentale ale luminii. Principiul lui Fermaf, principiul lui Huygen și ecuațiile lui Maxwell. Totul de la reflexie totala atenuata si geometrica! Este acoperită teoria aberației la filtrarea spațială, optica fasciculului Gaussian și fluctuațiile statistice. În plus, am prezentat bazele convenționale pentru înțelegerea opticii practice: formarea imaginii, instrumente optice, interferență, difracție și polarizare. Cititorului i se oferă suficiente principii din spatele componentelor și sistemelor optice practice, astfel încât el sau ea să poată face o muncă eficientă de laborator Cu contextul prezentat aici. studentul poate face următorul pas: să intre în tratamente avansate și în literatura optică Cea mai semnificativă omisiune a acestei cărți este teoria cuantică a interacțiunii Luminii cu materia. În consecință, există

nicio discuție detaliată despre acțiunea laserului. Cu toate acestea, această ediție revizuită prezintă cel mai cuprinzător tratament

elementar al prelucrării optice a fasciculelor de lumină coerente și gaussiene, disponibil în prezent în orice manual.

Unele dintre subiectele elaborate în Optică vor fi găsite în câteva manuale introductive. În capitolul 3, tehnicile specifice de trasare a razei sunt prezentate în limitele riguroase și paraxiale. Aceste informații pot servi drept bază pentru tehnicile computerizate de trasare a razei și conduc la utilizarea tehnicii matriceale pentru prezentarea și exploatarea conceptelor de acțiune a lui Ien în limita paraxială în restul capitolului 3.

Tratamentul nostru al aberațiilor Iens din capitolul 4 este cel mai simplu și complet tratament disponibil. Sunt furnizate formule specifice pentru aberațiile primare ale unei lentile subțiri. Abordarea noastră a interferenței cu reflexii multiple din capitolul 5 se bazează pe matrici de transfer, dar a apărut rar sub formă de manual. Este un formalism puternic care poate fi computerizat pentru a trata probleme foarte complexe, cum ar fi proiectarea unui filtru de interferență (o problemă prezentată la sfârșitul capitolului). Tratamentul difracției din capitolele 6 și 7 se bazează pe conceptul de transformare, așa cum se găsește în teoria avansată. Cu toate acestea, este prezentat aici în forma sa cea mai simplă și consecventă. Aceste informații pot fi aplicate direct în probleme reale pe care le-ar putea întâlni un om de știință sau un inginer.

Mai multe modificări și completări specifice în ediția revizuită sunt demne de reținut.

- Sistemul SI de unități este utilizat în întregime.

- Toată teoria introductivă este condensată în Capitolul 1, care este prezentat dintr-o perspectivă istorică.

- Tot materialul legat de interacțiunea Luminii cu materia este reorganizat în Capitolul 2.

- Convenția matricei din Capitolul 3 a fost modificată pentru a se conforma cu cel mai frecvent standard găsit. Au fost incluse mai multe exemple de imagistică optică și a fost eliminat un tratament redundant al teoriei formării imaginii.

- Secțiunea despre aberații din capitolul 4 a fost rescrisă în întregime.

- Capitolul 5, care tratează interferența, este nou. Sunt furnizate metoda matriceală a interferenței cu fascicule multiple și multe alte exemple de aplicare a interferenței. Fenomenele de grătare au fost mutate și la acest capitol.

- Detaliile despre teoria Fresnel-Kirchhoff din capitolul 6 au fost eliminate și plasate într-o anexă. Matematica Fourier este prezentată ca o secțiune separată în cadrul acestui capitol.

- Subiecte mai avansate în difracție se găsesc în Capitolul 7. Notația a fost simplificată pentru a scoate la iveală caracteristicile

de transformare ușor de înțeles ale teoriei. Acest capitol conține material nou despre optica fasciculului Gaus-sian.

- Tot materialul care implică coerență parțială este conținut în Capitolul 8, inclusiv formarea imaginilor incoerente.

- Aproximativ jumătate din cifre au fost redesenate pentru a sublinia claritatea.

Versiunea revizuită conține o colecție semnificativ mărită și extinsă de probleme la sfârșitul capitolelor. Există suficiente tipuri diferite de exerciții pentru a suplimenta instrucțiunile într-o mare varietate de cursuri.

Condițiile prealabile presupuse pentru un curs predat din acest text sunt fizica introductivă - inclusiv expunerea la idei de electricitate, magnetism și mișcare ondulatorie - și calcul introductiv. Ecuațiile diferențiale sunt discutate, dar numai ca o conexiune cu teoria undelor. Nu este de așteptat ca Studenții să fie capabili să rezolve ecuații diferențiale. Materialul din acest text a fost folosit cu puțină dificultate în cursul predat elevilor de secundă la Rensselaer.

Instructorii care doresc să folosească această carte pentru un curs de un semestru ar putea urma aceste linii directoare: Teoria introductivă (secțiunile 1.1-1.5); interacțiunile lumină-materie (secțiunile 2.1.C, 2.2.B-2.2.E, 2.3); formarea imaginii și instrumente optice (secțiunile 3.1.A.1, 3.2.A, 3.3-3.5); opriri (secțiunea 4.1.A); interferență (5,1-5,6); difracție în câmp îndepărtat (secțiunile 6.1, 6.2); difracția în câmp apropiat (secțiunile 7.1, 7.2) și polarizarea (secțiunile 9.1, 9.2).

Recunoaștem ajutorul multor colegi și studenți pentru sugestii și observații, în special RD Sard și H. Macksey. Suntem recunoscători Nila Meredith, Nancy Fowler, Darcy Sorocco și Geri Frank pentru asistența atentă la tastare și lui Marc de Peo pentru că a realizat o parte din fotografiile de difracție. Dar, mai ales, mulțumim familiilor noastre pentru înțelegerea și sprijinul acordat în timpul acestui proiect.

MILES V. KLEIN

Urbana, Illinois

THOMAS E. FURTAK Troy, New York august 1985

Conf

1 Nafurea lui Lighf

Studiul opticii acoperă acele fenomene care implică producerea și propagarea luminii și interacțiunea acestuia cu materia. De-a lungul istoriei, filozofii și oamenii de știință au încercat să explice ce este Iight; făcând acest lucru, ei și-au testat cunoștințele în evoluție despre lumea noastră fizică. Deși multe idei timpurii s-au dovedit false, altele au fost verificate în mod repetat prin teste experimentale. Printre acestea se numără conceptul de finititate a vitezei Iight; principiul timpului de primă fază, care se aplică căii de propagare; și ideea că Iight se comportă ca un val.

1.1 Idei și observații timpurii

Ne este greu să apreciem misterul din jurul naturii Luminii și viziunii în lumea antică. Nu numai că mecanismul ochiului era necunoscut, dar principiile optice fundamentale pe care le luăm de bune erau și obscure. În ciuda acestui fapt, motivați de interese pentru geometrie, artă și deception (magie), grecii au dezvoltat câteva noțiuni relativ sofisticate.

A. Propagare rectiIineară

Cea mai veche înregistrare optică care a supraviețuit, Optica lui Euclid (280 î.Hr.), a recunoscut că în medii omogene, Hght traveis în Straight Unes. Cu toate acestea, urmând învățăturile lui Platon, Euclid credea că „razele” de lumină își au originea în ochi și interceptează acele obiecte care ajung să fie văzute de observator (Fig. 1.1). Pentru filozoful antic, Iight era sinonim cu viziunea. Se știa că viteza cu care se credea că razele iese din ochi era foarte mare, dacă nu infinită. Un observator cu ochii închiși ar putea să le deschidă și să vadă imediat stelele de la distanță.

Fig. 1.1 Impresia grecească a Iight a fost geometrica!. Tot în interiorul conului de viziune a fost văzut. În afara coroanei, Iight nu avea niciun sens.

Hero din Alexandria în Catoptrics (în timpul secolului I î.Hr.) a raționalizat de asemenea că, deoarece mișcarea este cu viteză infinită și, prin urmare, cu viteză constantă, trebuie să se deplaseze în fine drepte. Această concluzie sa bazat pe analogia cu evenimentele mecanice în care conceptul pe care îl recunoaștem acum ca inerție joacă un rol important.

În geometria! tradiția grecilor, Hero a identificat cea mai scurtă cale punct la punct pe care Iight5, prin natura vitezei sale mari, trebuia să o urmeze - linia dreaptă. Acest concept de calea cea mai scurtă este cea mai veche dintre ideile fundamentale referitoare la Iight care rămân valabile astăzi. Motivul de bază pentru care Iight alege calea cea mai scurtă (sau mai riguros calea extremai) nu a fost înțeles, desigur, decât mult mai târziu. (Vom vorbi despre asta la timp.) Acesta este un concept geometric. Prin urmare, în ceea ce privește alegerea căii corecte, nu face nicio diferență dacă lumina trece de la ochi la obiect sau de la obiect la ochi sau, de altfel, dacă propagarea este instantanee. Acesta este motivul pentru care ideea lui Hero a funcționat, deși și el credea că ochiul este elementul Originator și că viteza de propagare este infinită.

Înțelegem acum că propagarea rectilinie nu este riguros adevărată deoarece, prin difracție, lumina se poate îndoi în jurul colțurilor și, așa cum se explică prin relativitatea generală, lumina poate fi deviată de un câmp gravitațional puternic. Acest lucru nu era cunoscut de grecii antici, deoarece efectele difracției sunt mici, iar cele descrise de relativitate sunt observabile doar cu tehnici sofisticate și instrumente avansate.

JAstăzi, legea propagării rectUineare a devenit unul dintre cele trei principii ale a ceea ce noi numim „geometrica! optica.” Celelalte două sunt legea reflexiei și legea refracției. Tratamentul geometric este o abordare fenomenologică non-relativista în care Lumina este Caracterizată de raze statice și în care obiectele cu care interacționează Lumina sunt relativ mari.

B. Reflecție

La o interfață între două medii optice omogene diferite, lumina incidentă este, în general, parțial transmisă și parțial reflectată. Interfața poate fi un plan sau o suprafață curbă. În ambele cazuri, normala suprafeței (linia perpendiculară pe interfață) în punctul în care o rază incidentă întâlnește interfața este definită în mod unic (vezi Fig. 1.2). Normala suprafeței și raza incidentă definesc un plan, planul de incidență. Legea reflexiei: Raza reflectată se află în planul de incidență, iar unghiul de reflexie, 0" este egal cu unghiul de incidență, 0.

Natura cantitativă a dreptului reflecției era cunoscută pe vremea lui Aristotel și este documentată în cartea lui Euclid. Hero și-a aplicat principiul „cea mai scurtă cale” reflexiei și a reușit să demonstreze geometric egalitatea unghiurilor. Figura 1.3 reproduce pașii din demonstrația lui Hero. Condițiile inițiale sunt ilustrate în (a), unde sunt identificate interfața AB și normala de suprafață OC. Planul de incidență este planul diagramei. Raza incidentă formează un unghi θ cu normala. În (h), raza reflectată este construită astfel încât să se formeze θ" — θ și două triunghiuri dreptunghice egale. Calea POP" trebuie să fie demonstrată a fi cea mai scurtă dintre toate căile optice posibile care implică reflexie la interfață. Pentru a realiza acest lucru, Hero a desenat extensia PO la S așa cum se arată în (c), creând astfel patru triunghiuri dreptunghiulare congruente. Rețineți că amenzile marcate PO și SO sunt egale în lungime. Astfel SÕF = ~P0Γ.

Fig. 1.2 Geometria reflexiei și refracției la (a) o interfață plană și (b) o interfață curbă.

Dacă legea reflexiei nu ar fi adevărată, atunci s-ar putea găsi alte puncte, Ov (indice V pentru calea „virtuală”), iar raza rezultată POvP" ar identifica θ'v ≠ θv, așa cum se arată în (d). În (e), se trage SOv, care trebuie să fie egal cu P0v. Astfel SOvP" = POvP". Cu toate acestea, este clar că SOP (sau POP") este Iess decât SOvP (sau POvP"), independent de locația Ov. pe interfata, inclusiv punctele din planul diagramei.De aceea, raza care satisface legea de reflexie este si cea mai scurta cale de reflectare posibila.

Distribuția relativă a intensității luminii între componenta reflectată și componenta transmisă nu a fost explicată corespunzător până în secolul al XIX-lea. Cu toate acestea, teoria mai modernă verifică că conceptul intuitiv al lui Hero despre propagarea luminii de-a lungul „cea mai scurtă cale” și consecințele sale pentru optica geometrică sunt corecte.

C.   Refracția

Geometria refracției a fost studiată experimental de Claudius Ptolemeu (100-170) și este raportată în cartea a V-a a lui Optica. El a recunoscut că unghiul de deviație, θd din Fig. 1.2a, depindea de diferența de densitate dintre mediile care formează interfața. El a documentat relația cantitativă dintre θ' și θ, ajungând la rezultatul empiric că θ' — αθ — bθ2, unde a și b sunt constante care depind de cele două medii. Această expresie se apropie de rezultatul corect atunci când θ este foarte mic. Cu toate acestea, pentru unghiuri de incidență mai mari, acest lucru nu este, desigur, corect. În ciuda inexactității sale, imaginea lui Ptolemeu a refracției a persistat timp de aproape 1500 de ani! Oamenii pur și simplu nu erau motivați să caute răspunsul corect.

Lucrurile au început să se schimbe după 1280 d.Hr., când artizanii italieni au descoperit accidental lentila ochelarilor. Această

dezvoltare a fost considerată în continuare o curiozitate de către comunitatea educată până când Galileo Galilei (1564-1642), celebrul matematician florentin, a început să experimenteze combinații de iense pe care le-a măcinat singur în jurul anului 1609. Deși telescopul era cunoscut înainte de acel moment, Galileo a fost primul intelectual care a luat-o în serios. Folosind propriul său instrument, care consta din Iense cu adevărat bune, el a descoperit lunile lui Jupiter și o mulțime de alte minuni cerești.

Johannes Kepler (1571-1630), marele matematician, optician și astronom din Köln, Germania, a rezumat pentru prima dată o mare parte din lucrarea cunoscută cu Dioptrice (1609). Această lucrare a fost scrisă după ce a verificat descoperirile lui Galileo. Conține teoria combinațiilor Iense și Iens. Kepler a recunoscut că, cu condiția ca unghiurile să fie mici, fenomenul de refracție a urmat relația $\theta' = N\theta$ (unde A este o constantă în funcție de cele două medii). Formalismul rezultat este similar cu cel pe care îl folosim astăzi sub aceeași limitare.

Adevărata lege a refracției asigură că: Raza transmisă este în planul de incidență, iar unghiurile adecvate sunt legate prin $\sin \theta' = A \sin \theta$.

Hero din Alexandria a reușit să obțină legea reflecției folosind principiul căii celei mai scurte în secolul I î.Hr. Aplicarea acestui principiu în refracție este mai complicată decât în reflecție. Este nevoie de cunoștințe despre gradul de viteză de propagare a luminii și despre modul în care viteza depinde de propagare.

mediu. Aceasta a fost una dintre cele mai confuze probleme din jurul teoriei luminii. Nu a fost rezolvat satisfăcător decât după 14 ani de la moartea lui Kepler.

D. Teoria luminii

Înainte de secolul al XVII-lea, cunoștințele despre Iight erau adevărate în „Evul Întunecat”. Deși grecii făcuseră progrese semnificative cu modelele geometrice la vremea lor, această informație, împreună cu celelalte contribuții ale lor, au fost suprimate în anii care au urmat declinului influenței grecești.

În timp ce lumea occidentală s-a luptat cu barbaria, activitatea intelectuală a continuat în Est cu amenzi oarecum independente. Abu Ali Mohamed Ibn Al Hasan Ign Al Haytham (965-1039), sau pe scurt Alhazen, a scris o colecție de șapte cărți despre optică în Bagdad în jurul anului 1000. Acestea sunt remarcate pentru Comentariile lor perspicace referitoare la câteva concepte cheie.

Alhazen a recunoscut că sursele de lumină iluminează obiectele, după care lumina din obiect este detectată de ochi. Avea o idee foarte bună despre cum funcționează optica ochiului. El a descris funcționarea unei „camera obscura”. Aceasta a fost cu 500 de ani mai devreme decât Leonardo da Vinci (1452-1519), căruia i se atribuie de obicei descoperirea camerei stenopeice și demonstrarea acesteia a propagării

rectilinie a luminii. Pe lângă aceste observații, Alhazen a emis corect ipoteza că Iight traveis cu o viteză finită și că viteza este mai mică în medii mai dense.

Imaginea lui fizică nu era totuși corectă, deoarece depindea prea mult de

Fig. 1.4 Modelele lui Alhazen de (a) reflexie, (à) refracție. Acesta, ca și orice alt model de partide clasic, este conceptual incorect, deși Alhazen a înțeles propagarea finită și scăderea vitezei în mediile dense.

analogii mecanice. Alhazen a avut ideea de lumină ca un flux de particule care au fost supuse forțelor de suprafață de reflexie și refracție. Se credea că particulele de lumină reflectată sunt influențate de forțele care erau doar paralele cu suprafața, așa cum se arată în Fig. 1.4. A avut multe dintre răspunsurile corecte, dar le-a raționalizat cu motive incorecte. Maturitatea argumentelor lui Alhazen a influențat gândirea creativă timp de mai bine de 500 de ani, deși evoluția ideilor Iater nu a fost întotdeauna directă.

Problemele care implică natura luminii erau atunci și sunt acum: (1) viteza sa de propagare, (2) cauza senzației pe care o calim, (3) tendința sa de a călători în linii drepte (propagare rectilinie), (4).) legea reflexiei și (5) fenomenul refracției, a cărui „lege” nu a fost descoperită decât mai târziu. Orice teorie a Iight-ului trebuie să se ocupe de toate aceste Caracteristici. În plus, o teorie cuprinzătoare trebuie să se ocupe de fenomenul de interferență și difracție, care nu erau cunoscute la acea vreme. De asemenea, trebuie să fie capabil să explice Subtilitățile efectelor relativiste și detaliile interacțiunilor lumină/materie, care nu au fost dezvăluite decât în secolele XIX și XX.

1.2 Modelele Porfíele

Dezvoltarea ulterioară a teoriei optice a avut loc în virtutea ideilor a trei indivizi proeminenti: René du Perron Descartes (1596-1650, Franța), Pierre de Fermât (1601-1665, Franța) și Isaac Newton (1642-1727, Anglia) . Există diferențe fundamentale în filozofiile fenomenelor naturale susținute de acești fizicieni timpurii. Cele mai notabile dintre contraste sunt punctele de vedere carteziene (orientate geometric) versus punctele de vedere newtoniene (orientate spre forță). Acești trei fizicieni timpurii sunt grupați aici deoarece dinamica partidelor a jucat un rol important în explicațiile lor despre lumină. Am menționat deja că modelele mecanice sunt inadecvate; cu toate acestea, Descartes și Newton au avut o influență atât de dominantă în zilele lor încât orice studiu al opticii este incomplet fără o anumită apreciere a ideilor lor. Printre contribuțiile lor principale - Descartes a fost primul care a publicat forma corectă a legii refracției, iar Newton a explicat pentru prima dată caracterul cromatic al refracției. Fermât a dezvoltat principiul timpului de Est, care era similar principiului căii celei mai scurte a lui Hero. Acesta, am spus, este un concept fundamental care este întărit de teoria modernă.

A. Descartes

Noțiunile lui René Descartes despre Iight erau în concordanță cu impresiile sale despre lumea fizică. Pentru el, toate lucrurile erau legate de geometrie. Mișcarea a fost singura „putere” fundamentală din natură. Singurul tip de mișcare a fost acela prin care un corp trecea de la o stare geometrică la alta prin pași succesivi. Mișcarea ar putea fi comunicată de la un corp la altul doar prin impact. Materia carteziană era infinit divizibilă și incompresibilă (pentru că se credea că un vid este imposibil). Acestea erau, pentru Descartes, adevăruri a priori.

β Natura luminii

Cu acest fundal putem înțelege teoria carteziană a luminii. Potrivit lui Descartes, lumina era o tendință spre mișcare care era transmisă prin tot mediul omniprezent, „eterul”. Acesta este similar modului în care presiunea este transmisă printr-un baston. Pentru Descartes, această „tendință” a urmat aceleași legi pe care le-ar urma mișcarea însăși. „Tendința”, pe care Descartes a echivalat-o cu lumina, s-a propagat instantaneu, dar analogiile mișcării mecanice care necesitau un timp finit pentru a evolua au fost folosite pentru a discuta despre modul în care lumina se va comporta.

În 1637, Descartes a publicat La Dioptrique în care legile opticei au fost derivate din adevărurile sale a priori. Pentru a discuta despre acțiunea luminii în întâlnirea cu o interfață, Descartes a comparat lumina cu o parte mecanică. Ca exemplu a ales o minge de tenis. Atât în reflecție cât și în refracție, componenta vitezei analogului său mecanic paralel cu interfața a fost presupusă a rămâne constantă (vezi Fig. 1.5). Lumina, ca „tendință” spre mișcare, în reflexie ar trebui să urmeze aceeași cale ca cea a unei cauțiuni de retur perfect elastice.

În analogia mecanică pentru refracție, interfața era o pânză fragilă. S-a presupus că viteza după întâlnirea cu interfața este direct proporțională cu viteza inițială $Nv' = v$. Conservarea componentei paralele a necesitat $\nu' \sin \theta, = v \sin \theta$. Împreună aceste relații Ied Descartes la legea refracției, care se dovedește a fi corectă experimental: $\sin \theta, = N \sin \theta$. Totuși, dacă componenta paralelă a vitezei ar rămâne constantă, aceasta a necesitat ca componenta perpendiculară a vitezei să fie crescută după refracție dacă tenisul

Fi9.1.5 Modelele lui Descartes de (a) reflexie, (b) refracție. Aceasta arată analogia mecanică incorectă care a fost necesară pentru a explica refracția dacă $v_{||}$ a fost conservată. Se credea că lumina, ca „tendință” spre mișcare, urmează calea analogiei, dar cu o viteză infinită.

mingea ar trebui să acționeze ca Iight la o interfață aer-sticlă. Pentru ca o minge de tenis să se comporte așa, ar trebui să primească un impuls din pânză. Dacă Descartes ar fi fost mai obiectiv în acest moment, ar fi recunoscut că pentru o minge de tenis adevărată acest lucru este imposibil. El și-a încălcat propriile reguli, perturbând

analogia pentru a se potrivi fenomenului de refracție. Legea lui Descartes a fost corectă. Fundamentul său teoretic era însă greșit.

Legea refracției a fost descoperită independent în 1621 de Willebrod Snell (1591-1626) la Leyden. Lucrarea lui SnelF nu a fost publicată imediat și a fost mult mai empirică decât a lui Descartes. Deși există multe controverse cu privire la plagiat, Descartes aparent nu era conștient de munca SnelF. Cu toate acestea, noi, în țările vorbitoare de limbă engleză, ne referim încă la legea refracției drept „legea SnelFs”. Francezii o numesc „legea lui Descartes”.

B. Fermât

Pierre de Fermât a avut dificultăți în a accepta relația ipotetică a lui Descartes între Iight și mingile de tenis. Era cel mai deranjat de ideea că Iight se deplasează instantaneu.

[După Fermât, în 1676, Olaf Romer (1644-1710) a raportat despre observațiile sale, făcute în Danemarca, ale celui mai interior satelit al lui Jupiter. Acestea au demonstrat că ideile lui Descartes erau greșite și că Iight avea o viteză finită. Metoda lui Romer s-a bazat pe faptul că perioada satelitului era mai lungă atunci când pământul era cel mai îndepărtat de Jupiter. Din aceasta el a concluzionat că Iight trebuie să dureze 11 minute pentru a parcurge o distanță egală cu raza orbitei pământului.]

În 1664, Fermât a scris un Ietter în care a observat că natura acționează întotdeauna pe calea cea mai scurtă. El a presupus că motivul pentru care era preferată calea cea mai scurtă a fost că, pentru natură, acesta era cel mai simplu curs. Aceasta a fost o adaptare a principiului lui Hero. Am văzut deja cum Hero a fost capabil să justifice propagarea rectilinie și legea reflexiei. În aplicarea aceluiași principiu la refracție, Fermât a introdus conceptul de rezistență optică ca o caracteristică a mediului. El a presupus că Iight poseda o viteză de propagare finită și că această viteză era invers proporțională cu rezistența optică. El a presupus, în plus, că rezistența optică era proporțională cu densitatea mediului. Deși cuvântul „timp” nu apare în Corespondența lui Fermafs, teoria lui este adesea numită principiul timpului cel de-al Orientului. Acest concept elegant rămâne astăzi ca un punct de plecare fundamental pentru optica geometrică. Vom discuta mai detaliat principiul Fermafs.

C. Fermafs Principie

Fermât nu a avut avantajul de a cunoaște calculul care a fost inventat la scurt timp după vremea lui. Dovada sa a implicat expresii algebrice complicate pe care a avut dificultăți să le reducă. Deși Descartes a derivat expresia pentru legea refracției mai devreme, Fermât a dorit să găsească legea adevărată din propriile sale idei. După câțiva ani de muncă, Fermât a rămas uluit când a venit cu aceeași lege

de refracție așa cum a avut Descartes, a cărui filozofie nu o putea accepta. Ipotezele lui Fermais Starting au fost corecte, în timp ce ale lui Descartes nu. Descartes a trebuit să mențină o imagine nefizică

pentru a ajunge la rezultatul verificat experimental. Calculas este ideal pentru a gestiona principiul Fermafs. Astfel, deși Fermât nu l-a folosit, vom face.

1. Lungimea căii optice. Rezistența optică Fermaf a devenit ceea ce noi numim acum indicele de refracție. Înțelegem acum și că poate exista un vid și că în vid Iight are o viteză unică c — 299.792.458 m/s. Dacă viteza Iight într-un mediu optic (neabsorbant) este v, atunci indicele de refracție este definit de

(n = - (11)

vf

Lungimea traseului optic I de la punctul P la punctul P' este definită ca fiind integrala de linie

OPL (PP') ≡

-dé

v

(1,2)

n dé ~

unde dé este un element de linie de-a lungul drumului fizic al Luminii, raza, de la P la P'.

Dacă indicele de refracție este o funcție de poziție, n = n(x, y, z), OPL este dat de Ec. (1.2). În mod explicit, am fi făcut-o

n(x, y, z) dé

P

Dacă indicele de refracție este o constantă, atunci OPL = né, iar OPL este direct proporțional cu geometria! distanța Δ/ de-a lungul razei.

Viteza lui Iight în mediu poate fi exprimată și ca r = dé/dt, astfel încât de-a lungul razei se poate scrie c dé/v = c dt și henee,

∫p,

c dt = cΔt

P

(1,3)

Astfel, OPL este proporțional cu timpul de călătorie pentru Iight de-a lungul traseului.

2. Mathematica! Formular pentru Fermafs Principie. Să presupunem că avem două puncte, P și P', și dorim să cunoaștem calea razei sau

razelor de lumină care trece prin ambele (vezi Fig. 1.6). Principii fermi: Orice abatere a căii de la cea luată de raza adevărată, care este de ordinul întâi în cuantificări mici, va produce o deviație în lungimea căii optice care este de ordinul doi în cuantificări mici.

Calea deviantă este cunoscută ca o cale virtuală, deoarece Lumina nu se propagă de-a lungul ei. Mai exact, diferența

I ≡ OPL (cale virtuală) – OPL (rază adevărată) (1.4)

trebuie să fie cel puțin de ordinul doi în parametrii care măsoară deviația căii virtuale de la raza adevărată (Fig. 1.6). Aceasta înseamnă, de exemplu, că dacă

0v

Calea virtuală

adica -

0 Trueray

(b)

Fig. 1.6 Ilustrarea principiului Fermafs: (a) propagare directă, (6) reflexie unică.

parametrul ε este o măsură a separării maxime a căii virtuale de calea adevărată, atunci trebuie să avem, în Iimit ca ε → 0,

l(ε) = const • ε2

(1,5)

sau o putere mai mare a lui ε. Parametrul ε trebuie să fie o „funcție” continuă a căii virtuale (cum ar fi „funcția” se numește funcțional) care este egală cu zero atunci când calea virtuală coincide cu raza adevărată.

O formulare precisă a principiului Fermafs necesită utilizarea calculului variațiilor și nu va fi prezentată aici. Principalul punct care trebuie subliniat este că se poate defini întotdeauna o măsură cantitativă a cât de mult se abate calea virtuală de la raza adevărată.

Odată ce razele virtuale au fost definite în termeni de ε, putem reexprima Ec. (1.4) în termenii unei serii Taylor.

d[OPL]

∫(ε) = Ί-----

dε

1 d2[OPL]

+ 2 dε2

ε2 + termeni de ordin superior (1.6)

P

P

Comparând Eq. (1.6) cu enunțul principiului Fermafs din Ec. (1.5), vedem că principiul este echivalent cu ecuația

<OPL]

dε

- 0

(1-7)

Astfel, raza adevărată este aceea pentru care calea optică este un extrem în raport cu micile deviații ale lungimii căii optice. În cuvintele lui Hero, trebuie să căutăm „cea mai scurtă cale”. Cu toate acestea, pot exista mai multe căi permise de la P la P'. Un exemplu este prezentat în Figura 1.7. Fiecare dintre căile prezentate este un extremum. Acest lucru este cerut de principiul Fermafs. Nu cere un maxim sau un minim absolut.

Fig. 1.7 Calea POP' este un minim local; PAP' este un minim absolut.

Când sunt implicate reflexii sau refracții, calea reală urmată de rază poate fi fie un maxim local, fie un minim - punctul cheie este că trebuie să fie Staționară în ceea ce privește micile modificări ale OPL.

3. Principiul lui Fermat și legea refracției. Am văzut deja cum principiul căii celei mai scurte ale lui Hero a fost legat de legile propagării și reflexiei rectilinie și cum aceasta este echivalentă cu principiile lui Fermat în spațiul uniform. Contribuția lui Fermat a fost aplicarea principiului pentru a deduce legea refracției.

În refracție, ca și în reflexie, legile optice nu sunt limitate la interfețe plane. Cu toate acestea, putem studia aceste legi fundamentale la suprafețe plane fără Ioss de generalitate deoarece, la un punct, suprafețele reale posedă un plan tangent bine definit și o suprafață normală (Fig. 1.2b). În utilizarea principiului lui Fermat, pe măsură ce luăm în considerare abaterile de la raza adevărată, vom investiga căile optice ale căror interceptări cu interfața sunt îndepărtate infinit de interceptarea razei adevărate. În Iimit, pe măsură ce deviațiile infinitezimale ajung la zero, suprafața formată de locul de interceptare se va apropia întotdeauna de planul tangent. Prin urmare, vom dezvolta demonstrația folosind o interfață plană.

În reflexie, este ușor de observat că calea cea mai scurtă este aceea pentru care raza incidentă, raza reflectată și normala suprafeței se află în același plan, planul de incidență. O restricție similară există pentru raza transmisă. După cum se arată în Fig. 1.8, cel mai scurt OPL se află într-un plan perpendicular pe planul tangent.

Fig. 1.9 prezintă o sursă la P în mediul incident și un punct de observare la P' în mediul de transmisie, ambele fiind fixe. Raza adevărată trece prin O la (x, 0), în timp ce o rază virtuală interceptează interfața la Ov, la o distanță ε de O de-a lungul interfeței. Cu această geometrie

OPL(POfPz) = nχ/(x + ε)2 + z2 + n'χ/(x' – x – ε)2 + z2 (1.8) Principiul lui Fermat cere ca acesta să fie un extremum la ε = 0, așa cum este demonstrat de Ec. (1,7),

d[OPL] nxn'(x' - x)

-------i -----V , =Ofl OA

ε = 0 4/χ2 + Z2 χ/(x' – x)2 + z'2

Fig. 1.β În refracție, razele de lumină rămân în planul de incidență, așa cum este cerut de principiul lui Fernnaf: (a) vedere „lateral”, (b) vedere „de sus” a aceleiași refracții care arată calea virtuală mai lungă POvP '.

Figura 1.9 a fost redesenată pentru claritate în Fig. 1.10, unde sunt evidențiate caracteristicile unghiulare. Acolo se vede că

X

= sin θ

și

(ɪ' -x)

. ------ = sin θ

4/(x' – x)2 + z'2

Fig. 1.» Principiul Fermafs în refracție. PO este raza adevărată.

Fig. 1.10 Adaptarea Fig. 1.9.

Comparând aceste informații cu Ec. 1.9, ajungem la legea refracției (legea lui Snell).

rí sin θ' = n sin θ (1-Ю)

Rețineți că, deși aceasta ia aceeași formă a dreptului derivat de Descartes, sin θ, = N sin θ, constanta în forma lui Descartes este N = v/v'. Expresia corectă pentru constantă, din Ec. (1.10) este N — n/rí = v'/v.

4. Philosophica] Baza pentru Fermafs Principie. Nu am explicat încă modul în care Lumina „determină” calea corectă. Lumina nu „știe” dinainte care va fi calea razei adevărate. Nu, așa cum am făcut în urma lui Fermât, nu „investighează” căi alternative. Propagarea se desfășoară fără ezitare pe calea razei adevărate. Trebuie să înțelegem că principiul lui Fermaf este o matematică! declarație despre caracteristicile naturii. Nu este cauza de bază, ci o observație empirică. Adevăratul mecanism din spatele principiului Fermafs are de-a face cu interferența constructivă a undelor. În teoria clasică a luminii, undele sunt variații ale câmpurilor electromagnetice. În teoria cuantică a luminii, undele sunt variații ale amplitudinii probabilității fotonului. Se dovedește că căile optice extreme corespund direcțiilor de-a lungul cărora interferența constructivă este maximizată. Principiul Fermafs poate fi, de asemenea, raționalizat ca o consecință a structurii spațiului și timpului. Aceste detalii nu au fost descoperite decât cu mult timp după Fermât.

D. Newton

Isaac Newton a fost un gigant al științei. El a avut un succes izbitor în dezvoltarea unei teorii a mecanicii care este încă valabilă în limitele de aplicabilitate recunoscute acum. Era firesc să încerce să-și aplice Înțelegerea dinamicii la descrierea luminii. Procedând astfel, el a devenit primul dintre cei mai puternici susținători ai modelului clasic de partide. În 1704, a publicat Opticks, care a devenit acceptată ca cea mai exactă descriere a luminii. Deși a existat o discuție considerabilă pe vremea lui Newton despre adecvarea unei imagini ondulatorii,

Influența lui Newton a fost atât de dramatică încât progresele ulterioare în această problemă au fost amânate cu aproape un secol.

În Opticks, Newton a descris rezultatele unor experimente atente privind refracția și ceea ce cunoaștem acum ca interferență. Unul dintre cele mai faimoase dintre acestea este experimentul său cu două prisme. Folosind lumina de la soare care trece printr-o gaură circulară într-o umbră a ferestrei, el a arătat că lumina de o anumită culoare a suferit o deviație de același unghi la ambele prisme. Aceasta a arătat că fenomenul culorii era o calitate intrinsecă a luminii și că lumina albă era o combinație de raze ale tuturor culorilor.

Newton credea că razele erau fluxuri de particule care se mișcau printr-un mediu eteric pătrunzător. „Mărimea” partidei trebuia să fie legată de culoarea luminii. El a emis în continuare ipoteza că densitatea eterului era invers proporțională cu densitatea de masă a materiei prin care se propaga lumina. Această idee a fost necesară pentru a raționaliza presupunerea incorectă că viteza particulelor Iight a fost mai mare în materialul mai dens. Newton credea că forțele

perpendiculare pe interfață au acționat asupra particulelor Iight asupra reflexiei și refracției.

Newton este, de asemenea, faimos pentru observarea „inelelor lui Newton” (vezi secțiunea 6.4D), un fenomen de interferență care a fost de fapt raportat de Robert Hooke cu 39 de ani mai devreme. Newton a documentat detaliile modelului de brighi și inele întunecate pe care le-a observat în reflexie de la o suprafață sferică de sticlă în contact cu o suprafață de sticlă fiat (Fig. 6.22). El a concluzionat corect că grosimea spațiului de aer dintre suprafețele de sticlă a avut un rol important în model. El a arătat că inelele întunecate au apărut acolo unde spațiul de aer era un multiplu par de l/89000 de inch. În interpretarea sa, Newton chiar a trebuit să-și impulsioneze modelul de partide. El a emis ipoteza că, la trecerea prin interfața superioară în spațiul de aer, Iight-ul a fost plasat în „potriviri” alternante de transmisie și reflexie ușoară. Când lumina a ajuns la interfața de jos, în funcție de „potrivirea” sa, a fost fie transmisă, fie reflectată.

Inelele lui Newton sunt cauzate de interferența undelor. Newton a refuzat să creadă în imaginea undelor în primul rând din cauza gândurilor sale referitoare la propagarea rectilinie. Potrivit lui Newton, dacă Lumina ar fi un val, ca sunetul, ar difuza în jurul obstacolelor și nu s-ar putea forma umbră. Am observat deja, totuși, că propagarea rectilinie nu este o „lege” și că lumina „se îndoaie” în jurul colțurilor în fenomenul de difracție. Experimentele timpurii de difracție erau cunoscute de Newton și el a realizat unele dintre ele. Cu toate acestea, părtinirea lui în favoarea modelului partide a fost prea puternică. El a crezut că „îndoirea” unei raze a fost cauzată de o interacțiune atractivă între particulele de lumină și marginile unei deschideri de difractare.

1.3 Modelele Wove

Trebuie să înțelegem că întreaga optică geometrică poate fi corect formulată fără a recurge la unde, începând cu principiul lui Fermat.

Cu toate acestea, interferența, difracția și alte fenomene optice fizice necesită o imagine a undei.

A. Matematica propagării undelor

Înainte de a dezvălui dezvoltarea gândirii referitoare la teoria ondulatorie a luminii, vom trece în revistă fenomenele ondulatorii în general. Definim un val ca fiind o perturbare de călătorie. Primul nostru caz are o singură variabilă spațială independentă, care reprezintă distanța de-a lungul direcției de propagare a perturbației. Variabila dependentă, care reprezintă cantitatea care face „undă”, va fi transversală și, astfel, va reprezenta mișcarea în unghiuri drepte față de direcția de propagare. Vom demonstra în cele din urmă că Iight poartă acest caracter transversal.

Este potrivit să folosim analogii mecanice pentru a dezvolta formalismul ondulatoriu. Matematica este aceeași cu cea pentru lumină, dar conceptele fizice sunt mai ușor de înțeles. În mișcarea undă

mecanică transversală, informația este transportată de un model caracteristic de mișcare care este transmis în mediu de la o locație la alta (Fig. 1.11). Modelăm acest comportament folosind un lanț unidimensional de particule, care execută această mișcare transversală la rândul lor conform legilor lui Newton.

1. Oscilatie simpla. Fiecare parte a lanțului exercită forțe asupra particulelor vecine. În acest fel, mișcarea este comunicată de la partide la partide pentru a produce mișcarea valului. Dacă am putea imobiliza cumva toate particulele cu excepția uneia, atunci am putea studia mișcarea acesteia sub influența forțelor exercitate de celelalte particule. De o importanță deosebită este cazul special în care, în gândire

P'

t = 0 ·----*- v

D t = -

V

D

t = -

υ________________________

(&)

Fig. 1.11 Propagarea informației prin (a) o partidă în mișcare și (h) o undă transversală. În (h), „mediul” transmite informația de la P la P’ fără să se deplaseze pe direcția de la P la P’.

Ô

00000000000000..0000000000 OOOO

Flg. 1.12 Un „mediu” unidimensional de particule, toate fiind ținute imobilizate, cu excepția uneia.

experimentul tocmai descris, forța care tinde să readucă particul în poziția sa de echilibru respectă legea lui Hooke, adică este proporțională cu deplasarea particulei de la echilibru, $F = -Cx$, unde C este o constantă (Fig. 1.12). Dacă masa particulei este M, a doua lege de mișcare a lui Newton necesită:

$$F = M\frac{d^2x}{dt^2} = -Cx$$

sau

M d2x

C dt2

(1-11)

Această ecuație diferențială liniară de ordinul doi are o soluție dată de

$X = X_0 \cos \varphi$

sau

$x - x_0$ Re[e'ψ],

(1-12) unde φ — 2πvt + φ este faza mișcării, schimbându-se Iinear în timp, iar φ este unghiul epocii, sau faza inițială, care depinde de valoarea lui x la t = O. Aici v este Jfrecvenţa oscilaţiei cu

-ɪ /— V ^ 2π√M

(1-13)

Constanta x_0 este amplitudinea, care reprezintă deviația maximă de la poziția de echilibru.

Deși aceasta ar putea părea a fi o situație specială, oscilatorul de armonie simplă este de fapt o aproximare de ordinul întâi a multor tipuri mai complicate de oscilații. Acest lucru este adevărat deoarece o forță generală de restaurare poate fi extinsă ca o serie Taylor despre x = 0,

F = F

JF

x=o dx

1   d2F

2   dx2

Dacă deplasarea este mică, atunci termenul dominant este Iinear proporțional cu x, așa cum am presupus. Sursa forței într-un mediu real ar fi

interacțiunea particulă-particulă care este legată de coeziunea mediului. Nu trebuie să cunoaștem detaliile acestui lucru pentru scopurile noastre.

2. Ecuația undei. Dacă acum relaxăm starea de imobilizare și permitem tuturor particulelor lanțului să se miște, ajungem la condiția ilustrată în Fig. 1.13. Pentru a simplifica forța complicată în perechi, care corelează mișcarea particulelor între ele, luăm în considerare doar interacțiunile apropiate și presupunem că, în prima

aproximare, forța de restabilire este proporțională cu diferența combinată a deplasărilor x dintre a n-a. partide si cei doi vecini ai sai. Ecuația (1.11) devine

∧∫ d2X

(χn-χn-1) + (χn-χn+ι) +   = Q(l·14)

unde specificăm mișcarea părții particulare etichetate cu n în Fig. 1.13.

Dacă toate particulele sunt egal distanțate, să zicem cu o distanță b, atunci când trecem de la n–1 la n sau de la n la n + 1 vom suferi o translație a lui Δz = b. Putem reinterpreta termenii de diferență în Ec. (1.14) ca

(xn ~ *n-ι) + (xn - *n + ι) = -E(‰ + ι - ⅞) - (ɪn - *n-ι)J = -∧(∧ɪ) (1.15a) unde Δ reprezintă o modificare asociată cu modificările de integrai în n. Rescrie dubla diferență ca

Δ(Δx) =

Δ(Δx)

(Δζ)2

Acum, dacă b este foarte mic, lanțul aproximează un mediu unidimensional continuu și

d2χ

\ { \ x}→^b2

(1.15b)

Înlocuirea ecuațiilor. (1.15a) și (1.15b) în Ec. (1.14), vedem că ecuația de mișcare pentru o bucată din lanțul unidimensional de particule este

ô2x M ô2x

Õz2^ b2Cct2

Am folosit notația derivată parțială deoarece x este o funcție atât a lui z, cât și a lui t.

Cu o oarecare previziune asupra rezultatului nostru final, vom seta b2C | M = v2, care deocamdată poate fi considerată doar o altă constantă. Noua formă pentru ecuația mișcării pentru o bucată de lanț este acum

/ ô2x 1 ∂2x ` Sz2 v2 ôt2

(1,16)

Ecuația (1.16), o ecuație continuă, implică faptul că este posibil să se identifice o poziție arbitrară z la care se va găsi o anumită masă.

Strict vorbind, vor exista întotdeauna lacune într-un model de partide discrete. Cu toate acestea, pe măsură ce decalajele dintre particule devin mai mici, sistemul devine echivalent cu un mediu continuu.

1.3 Ihe Wave Models 19

Fig. 1.15 Un mediu unidimensional de particule în care toate particulele sunt lăsate să se deplaseze paralel cu axa x.

3. Soluție generală: Principiul de suprapunere. Soluția generală a ecuației. (1.16) ia forma

z

V

(1-17)

unde f (u) și g(u) sunt funcții arbitrare ale variabilei и având derivate secunde bine definite. Setând и — t — z/v sau и = t + z/v, obținem o funcție a celor două variabile t și z. Înainte de a demonstra că Ec. (1.17) este o soluție, facem un comentariu foarte important despre soluțiile ecuației de undă (1.16) și aproape toate celelalte ecuații de undă și anume: Suma a două soluții este de asemenea o soluție. Această proprietate a soluțiilor este adesea numită principiul de suprapunere. Folosind-o, ne putem mulțumi să arătăm că funcțiile f și g din Ec. (1.17) Satisfaceți separat ecuația undei.

Dăm doar dovada pentru f, care merge după cum urmează. Diferențiem f (u) o dată față de z și t, unde u = t — z/v.

8f df õf1 df
õt du õzv du
Diferențiem din nou și obținem √< =• V¾
02f d2f 02f1 d2fa, 1 !
∂t2 du2 ' Ôz2v2 du2Λf≡ Z»

Aceste expresii pot fi combinate direct pentru a da Ec. (1.16). Dovada pentru g procedează într-un mod similar.

Cei doi termeni din Ec. (1.17) au următoarea interpretare simplă. Termenul f(t — z/v) descrie o perturbație care se mișcă cu viteza de mărime v în direcția + z fără nicio modificare a dimensiunii sau formei. Și g(t + z/v) descrie o perturbație similară nedistorsionată care se mișcă cu viteza v în direcția — z.

Pentru a demonstra afirmația despre f luați în considerare deplasarea la momentul t ÷ At și comparați-o cu deplasarea la momentul t,

(z \ √ z — υΔt' t + At - - = f It-------------

vj \ v .

unde z' = z — vΔt. Aceasta înseamnă că valoarea funcției/în punctul z și la

z'

V

oo°oo Oθ θ,

OOOOOO00000000000-------

ʌz = vΔt

z

Fig. 1.14 Ilustrarea unei perturbaţii care se deplasează în direcţia +z cu viteza V. («) Deplasarea în timpul t. (i>) Deplasarea la momentul t + Δt. (b) se obține din (a) printr-o deplasare rigidă a formei curbei cu o cantitate Δz = v Δt.

timpul Iater t + At este același ca la momentul t, nu în punctul z, ci în punctul z', care se află la stânga lui z la o distanță vΔt. Henee, întreaga curbă se deplasează spre righi cu viteza v. Acest comportament este ilustrat în Fig. 1.14. Un argument similar se aplică pentru g(t + z/t>).

4. Harmonie Wave Solution. Un caz special deosebit de important printre soluțiile ecuației de undă (1.16) este funcția sinusoidală din secțiunea 1.3A1. Forma este aceeași cu Eq. (1.13), doar aici faza este dată de

Φ — 2πv^t + z/v^ + φ (118)

Fiecare parte din lanțul unidimensional execută o oscilație simplă a armoniei. Dacă am face o fotografie instantanee a lanțului, deplasarea ar fi o funcție sinusoidală a lui z, așa cum se arată în Fig. 1.13. Soluția este

ʌ / z\ Ί

X = X0 cos 2πvl t + - j + φ (1-19)

care poate fi scris și ca

X = X0 cos(ωt + kz + φ) (1-20)

unde Jfrecvența unghiulară este ω = 2πv și numărul de undă este

κ — 2π/λ = 2πv/v ʌ θʃ A“ L

Lungimea de undă λ reprezintă distanța spațială de la creastă la creastă dintre unde la un moment dat.

5. Ecuația de undă tridimensională. Tocmai am discutat câteva dintre proprietățile importante ale mișcării undei în general, care sunt deja relevate în cazul unidimensional. Alte proprietăți importante nu apar până la noi

luați în considerare trei coordonate spațiale. Ne întoarcem astfel la o discuție introductivă a undelor și a perturbațiilor ondulatorii în trei dimensiuni.

În trei dimensiuni, ecuația undelor este generalizată la

θ2p δ2p ∂2p 1 ô2p ôx2 ∂y2 ÕZ2 V2 ∂t2

sau

V2p-

1⅛

V2 dt2

(1-21)

= 0

Aici V reprezintă operatorul diferenţial vectorial „del” sau „nabla”, ai cărui coeficienţi într-un sistem de coordonate dreptunghiulare (axele reciproc perpendiculare x, y şi z specificate de Descartes) sunt daţi de (β/∂x, ∂/∂y , 0/∂z \ și V2 este o abreviere pentru produsul scalar sau produsul scalar al lui V cu el însuși:

vv = v>≡^ + βt + ^~,

∂x2   ∂y2 ÕZ2

Funcția p(x, y, z, t) ar putea reprezenta una dintre mai multe mărimi fizice care se pot supune unei ecuații precum (1.21). De exemplu, ar putea reprezenta presiunea într-un fluid izotropic, caz în care viteza v ar fi dată de

Aici p este masa fluidului pe unitatea de volum și β este modulul în vrac (recipientul compresibilității), definit ca raport

Lumina, după cum vom vedea, poate fi reprezentată ca unde electromagnetice. În spațiul liber, fiecare componentă spațială a câmpului electric E și densitatea fluxului magnetic B respectă o ecuație a fornii din (1.21), cu v înlocuit cu viteza luminii, c. Pe lângă satisfacerea ecuației de undă, E și B trebuie să satisfacă ecuațiile teoriei electromagnetice cunoscute sub numele de ecuații MaxwelFs, care vor fi discutate în secțiunea 1.4. Aceste ecuații suplimentare implică faptul că pentru componentele sinusoidale elementare individuale ale undelor, vectorii E și B trebuie să fie reciproc perpendiculari și, de asemenea, perpendiculari pe direcția de propagare. Această natură transversală a undelor de lumină dă naștere la diferite fenomene asociate cu termenul de polarizare. Multe alte fenomene optice, însă, nu depind de el. Ele pot fi descrise cel mai simplu folosind o teorie a undelor scalare, cum ar fi cea adecvată undelor sonore dintr-un fluid. Din punct de vedere istoric, modelul

scalar pentru undele Iight a fost primul. Într-o astfel de teorie, natura vectorială a perturbației optice (adică natura vectorială a lui E și B) este trecută cu vederea (sau este nerecunoscută așa cum a fost cazul în secolul al XVII-lea) și cantitatea care „unde” este tratată ca scalară. Prin urmare, vom folosi teoria scalară pentru o mare parte a discuției noastre și vom amâna discuția despre lumina polarizată pentru mai târziu.

În următoarele câteva secțiuni vom desemna variabila noastră scalară dependentă cu p. Cititorul se poate gândi la p ca la presiunea într-o undă sonoră sau la câmpul electric într-o undă luminoasă. În acest caz, rezultatele pot să nu fie întotdeauna adevărate, deoarece

am suprimat natura vectorială a luminii. În orice caz, scopul nostru aici este să discutăm câteva soluții simple ale ecuației undei tridimensionale (1.21).

Mai întâi remarcăm că principiul suprapunerii se aplică soluțiilor Ec. (1.21) din același motiv pentru care se aplică soluțiilor ecuației. (1.16). Astfel, suma a două soluții este de asemenea o soluție, iar soluțiile complicate pot fi obținute prin suprapunerea unor soluții simple.

6. Tulburări plane și unde. Se ajunge la o situație simplă sub ipoteza-

că p este o funcție numai a lui z și t. Apoi Eq. (1.21) se reduce la Ec. (1.16) și are aceeași soluție generală și anume

z

V

1.22)

Aici perturbația este constantă pe fiecare plan xy și constă din două părți, una care se propagă de-a lungul axei + z cu viteza de mărime v (termenul/termenul) și una care se propagă de-a lungul axei — z cu viteza de mărime v (termenul g) .

O undă plană care călătorește în armonie este un caz special al ecuației. (1.22) cu, să zicem, g = 0 și

Z

/ z\(z\

p(z, t) = ft — - I = A cos 2πv t--------------+ φ

' 'v J

(1-23)

V

Expresii exact analoge cu Eq. (1.22) ar putea fi scrisă pentru a descrie perturbațiile uniforme pe planul xz care se propagă de-a lungul axei +y sau –y sau perturbațiile neformate peste planul yz care se propagă de-a lungul axei + x sau – x.

Ce se întâmplă dacă normala la planul perturbației nu este de-a lungul unei axe de coordonate, ci de-a lungul unei direcții arbitrare având vectorul unitar s = (sx, sy, sz) (unde s* + Sy + s2 = 1)? Nu este greu de observat că o perturbație plană generală care se propagă în direcția +s ar fi de forma

, 4 г(Γ ■ s∧ /./ xAc + ysv + ZS2` p(r, t) = f t--------= potrivire -
-------ɪ

\ ʋ / \ v

În primul rând, observăm că această expresie este o soluție a ecuației. U = t – r •s/ʋ. Trebuie doar să observăm asta

(1-24)

(1.21). Din nou Iet

3f^Jxdf

Sx v du

și asta

∂2f = s; d2f

Sx2 v2 du2

a obtine

<2f + dJL + Êï = ≤+⅛ + ≤ d2f _ 1 Ëï _ 1 ⅛r

Sx2 ∂y2 Sz2 V2 du2 ~ V2 du2 ~ v2 ∂t2

1.3 Modelele Wave 23

Smochin. 1.15 Ecuația г · â = d definește un plan perpendicular pe vectorul unitar â și o distanță de la originea lui d.

după cum este necesar. În ceea ce privește interpretarea Eq. (1.24), dă o valoare constantă pentru perturbația p la o valoare dată de timp pentru toate valorile vectorului de poziție r respectând r • S = const. O astfel de ecuație definește un plan perpendicular pe s. Pe măsură ce valoarea lui r-â crește algebric, planul se deplasează în direcția +â (Fig. 1.15). Dacă sistemul este armonios, atunci o soluție de undă plană permisă este

p(r, t) – A cos

/ FS

2πv | t------

\   v

+ φ

sau

λ

Prin urmare,

H

Considera

p(r, t) = A Re{ei[2πv('-rs/")+^} (1,25)

Putem simplifica notația, așa cum sa făcut pentru Eq. (1.20), prin utilizarea frecvenței unghiulare ω = 2πv și prin introducerea vectorului de undă κ unde

1   2πv . ω д 2ιτ., ,^

k =------s = -s= — s   (1,26)

VV λ

p(r, t) = A Re{ei<ωt~k r+^}   (1.27)

În utilizarea formei exponențiale pentru Ec. (1.27) în Ec. (1.21) și în alte ecuații diferențiale, putem ignora restricția „Re” în timpul calculului dacă ne amintim că valoarea reală a rezultatului final este cea care are semnificație fizică. Notația exponențială este un mecanism convenabil prin care se ține evidența fazei funcției.

În coordonate dreptunghiulare, operatorii diferențiali õ/õt și V au o anumită interpretare simplă atunci când sunt aplicați unei funcții de undă plană exponențială.

J —[A i√>'→•r+φ)] = iω A eil•ω,~k'r+*° ⅛ ôt √

Dacă oriunde se găsește S/St îl înlocuim cu iω, operatorul diferențial este înlocuit cu rezultatul său. De asemenea, luați în considerare o componentă a lui V și

i(ωt -κ •r +

BOU

φ)] = — ikxA e

i(ωt- k•r + <p)

Deoarece V = x(∂/∂.x) + y(∂/<3y) + τ(S/Sz), putem înlocui ξ în operații diferențiale pe unde plane exponențiale cu — ik. Ori de câte ori întreaga dependență spațiu-timp a unei unde este descrisă de factorul exp z(ωt — κ · r), atunci

derivatele spațiu-timp pot fi înlocuite cu

V→ -ik

Folosind aceste tehnici, Eq. (1.21) devine

(— ik) · (— ik)p —~ (ioj)2p = 0 υ

care este în concordanță cu definiția vectorului de undă, Eq. (1,26).

(1-28)

(1-29)

7. Tulburări sferice și unde. O altă soluție simplă importantă a ecuației de undă tridimensională se obține atunci când presupunem că funcția p(r, i) are simetrie sferică față de origine; adică presupunem că

p(r, t) = p(r, t) (1,30)

numai, unde

r = ^Jx2 + y2 + Z2 Pentru a calcula V2p în acest caz, începem cu

Sp __ Sp(r, t) Sr /dp \ X

Sx Sr Sx ycr J r

și mai diferențiază o dată pentru a obține

1 Sp S

r Sr + X Sx

1 dp \ Sr r Sr y Sx

1 Sp 1d2p'

r2 ∂r + r∂r2

S2p _ 1 Sp X2Spx2S2p

Sx2 r Srr3Srr2Sr2

S2p _S Sx Sp\

Srj Sx \ r Srj i•Λ**l -;ï·4 _ 1 dp X2 / r Sr r \

În același mod, obținem celelalte derivate:

d2p _ 1dpy2дpy2∂2p

∂y2 rdrr3∂r+r2∂r2

∂2p 1дpZ2дpz2∂2p

∂z2 r∂rr3∂r+r2∂r2

Suma acestor trei ecuații rezultă

γ2 _ з ⅜ _ (χ2 + ʃ2 + Z2) Ôp (χ2 + y2 + z2) ∂2p P r ∂r r3 ∂r + r2 ∂r2

_2dp ∂2p~l,∂2

r ∂r ~ | ~ dr2 r dr2 rp

Ecuația undei devine atunci

1 d2 1 d2

r [r/>0•, <)] - -2 P(r, 0 = o

OΓ

d2 1 d2

lʃp(r, OJ - ʋi [rp(r, t)] = 0

Această ecuație diferențială pentru funcția [rp(r, t)] are din punct de vedere matematic aceeași formă ca ecuația de undă unidimensională discutată mai devreme pentru funcția x(z, t). Astfel soluția matematică generală poate fi scrisă sub forma.

rp(r, t) - f(t - -) + g(r + - J y vj \ vj

Perturbarea reală p ia apoi forma

P(r, t) = -f(t - -ʌ + ɪ g(t + -ʌ (1.31)

ry vj ry vj

Primul termen din Ec. (1.31) poate fi interpretată ca o perturbație simetrică sferic care are originea la origine și se propagă spre exterior cu viteza de mărime v. Amplitudinea perturbației a scăzut ca 1/r. În cazul unei unde sonore, o astfel de perturbare ar putea fi cauzată de o sursă rotundă mică la origine. Al doilea termen din Ec. (1.31) reprezintă o perturbare sferică de intrare care ar fi greu de realizat experimental. O undă sinusoidală sferică de ieșire este obținută prin stabilirea f egală cu o expresie similară cu Eq. (1,23).

A

√4. Y

p(r, t) = — cos 2πv | t — -

1 v

(1-32)

+ φ

[Desigur, A din această ecuație trebuie să aibă dimensiuni diferite decât A din Ec. (1.23)].

B. Teorii ale undelor timpurii

În 1665 au fost publicate două documente care au emis în mod independent ipoteza că Iight era un val. Acestea au fost Physico Mathesis de Luminie, Coloribus et Iride de Francesco Maria Grimaldi (1618-1663) la Bologna și Micrographia de Robert Hooke (1635-1703) în Anglia.

Grimaldi a fost primul care a observat fenomenul de difracție, prin care modelele complexe se formează în afara marginii geometrice a umbrei. El a comparat lumina cu valurile din apă și a emis ipoteza că a existat un mediu eteric în care undele se propagă.

Hooke a fost un adversar al lui Newton și s-a confruntat direct cu Newton în Royal Society din Londra. El a descoperit interferența care duce la modele multicolore în corpuri subțiri și transparente. El a făcut, de asemenea, analogia dintre lumină și valuri în apă și a acceptat ipoteza mediului eteric. Spre deosebire de Grimaldi, Hooke credea că viteza Iight era mai mare în mediile dense decât în mediile rare. Aceasta a dus la o imagine defectuoasă a propagării undelor. În Fig. 1.16 vedem că modelul lui Hooke a cerut ca frontul de undă să nu poată rămâne perpendicular pe rază după refracție. Înțelegem acum că astfel de fenomene pot apărea în materiale ale căror proprietăți optice sunt funcții de direcție. Cu toate acestea, modelul lui Hooke a fost conceput pentru a se aplica în general pentru medii izotropice optic.

C. Huygens

Christian Huygens (1629-1695), un fizician olandez timpuriu, a formulat primul model semicantitativ de undă pentru Iight și l-a prezentat sub formă de prelegeri înaintea Academiei Regale de Științe din Paris în 1679. A fost foarte influențat de filosofia lui Descartes, dar a recunoscut-o. Neajunsurile teoriei lui Descartes despre

Fig. 1.1« Conceptul incorect al refracției lui Hooke. Frontul de undă OA este inițial perpendicular pe direcția razelor care avansează. Dacă viteza transmisă ar fi mai mare decât viteza incidentă, atunci Iight-ul ar trebui să călătorească peste OB în același timp necesar pentru ca o altă rază să parcurgă distanța AO'. În interiorul mediului, frontul de undă BO' ar trebui să fie înclinat în raport cu razele.

ușoară. El a acceptat viziunea carteziană conform căreia geometria este baza fundamentală a fizicii. Prin urmare, Iight trebuie să fie explicabil cu o analogie mecanică. Spre deosebire de Descartes, însă, Huygens credea în existența vidului. Acest lucru ia permis să raționalizeze faptul că mediul eteric era elastic, alcătuit din particule ale căror separări puteau fi variate. Având în vedere aceste Caracteristici, eterul ar propaga o perturbare la fel ca un fluid elastic.

Teoria valurilor lui Huygens despre Iight este prezentată în Traite de la Lumière, care a fost tipărită în 1690. În modelul său, Huygens nu a avut în vedere un tren de unde transversale, ci mai degrabă o serie neregulată de un singur puși care se propagă. Deși conceptul de interferență a fost în cele din urmă invocat de alții pentru a pune ideile lui Huygens pe o bază solidă, Huygens nu a menționat inițial conceptul de „fază” în teoria sa.

1. Principiul lui Huygens. Am văzut în secțiunea 1.3A6 cum o undă sferică sau o perturbare se propagă în trei dimensiuni, dar nu am discutat încă metodele de excitare a unor astfel de perturbații. Ele depind în mod clar de problema specifică în cauză și vor varia în funcție de natura valurilor. Într-un mediu mecanic, cum ar fi un fluid, forțele dintre o parte a mediului și o parte din apropiere transmit perturbația. Sursa fizică a perturbării va acționa local prin forțe similare asupra mediului din apropiere. (Gândiți-vă la un difuzor care emite unde sonore în aer, de exemplu.) Ați putea bănui că ar face o mică diferență dacă o anumită regiune a mediului a fost excitată de o sursă externă sau de o regiune apropiată a mediului. De fapt, este rezonabil să considerăm fiecare mică regiune excitată a mediului ca o sursă de unde sferice proprii. Procedeul sugerat de principiul lui Huygens este atunci de a imagina perturbația la un moment dat ca fiind compusă din suma mai multor perturbații separate, fiecare dintre acestea acționând ca o sursă punctuală care radiază o perturbație sub formă de undă simetrică sferic la un timp ulterior.

Această schemă de gândire a naturii propagării undelor se numește principiul Huygens. Metoda spune cum se calculează poziția în spațiu a unei perturbații la un moment ulterior, dacă aceasta este cunoscută la un moment anterior. Ea nu oferă informații cantitative despre amplitudinea rezultată, deși rafinamentele procedurii făcute de matematicienii Iater o fac.

Principiul lui Huygens conține două reguli importante despre modul în care ar trebui combinate waveletele secundare. Le vom prezenta așa cum se aplică situației prezentate în Fig. 1.17, în care o sursă trimite o perturbare sferică pe un ecran cu o deschidere în el. Să presupunem că la momentul t perturbația poate fi Iocalizată pentru a se afla chiar în interiorul suprafeței deschiderii σ și dorim să știm unde este perturbația la momentul t + At. Conform părții 1 a principiului lui Huygens, construim undele sferice secundare cu raza lui vΔt, originare din fiecare punct de pe σ.

Acum trebuie să formăm suprapunerea acestor undele secundare pentru a produce perturbarea la momentul t + At. Rețineți că undeletele sunt cele mai dense în regiunea inclusă între finele PA și PB din Fig. 1.17. Această regiune este numită regiunea luminozității geometrice deoarece

dacă se presupune că Iight se deplasează în exterior de la sursă în fine sau raze drepte, această regiune va fi iluminată, în timp ce regiunile exterioare, regiunile de umbră geometrică, nu vor fi iluminate.

Fig. 1.17 Construcția lui Huygens și legea propagării rectilinie.

Rețineți, de asemenea, că regiunile din thè geometrica! umbra sunt atinse doar de câteva dintre undele secundare care provin din σ. Presupunem în partea a 2-a a prescripției lui Huygens că putem neglija aceste undele și determinăm noua perturbare σ' ca anvelopa tuturor undeletelor secundare de ieșire. Fiecare punct de pe anvelopă este tangent la o singură undă a lui Huygens. Plicul se termină brusc la marginea geometrică! umbră. Undurile care se mișcă înapoi prezentate punctate au, de asemenea, un înveliș care s-ar propaga spre sursă. Ele sunt analogul termenilor g(t + z/v) în cazul unidimensional, în timp ce waveletele care se deplasează înainte sunt analogul termenilor f(t – z/v). Undele care se mișcă înapoi sunt neglijate în prescripția lui Huygens, fără nicio justificare dincolo de un apel la faptul experimental că învelișul undei din spate nu apare în natură. Versiunile ulterioare ale teoriei sunt capabile să explice această neapariție. Versiunile Iater țin cont și de undeletele din umbră, care dau naștere la efecte de difracție.

O analiză mai detaliată va arăta că entitatea care se propagă în modul descris nu este perturbația optică în sine, ci mai degrabă acele părți ale acesteia care sunt discontinue în funcție de timp și spațiu. Aceste discontinuități sunt limitate la suprafețe și se propagă conform principiului lui Huygens. Propagarea unei perturbații continue va fi descrisă aproximativ de acest principiu dacă perturbația se modifică rapid pe distanțe care sunt mici în comparație cu dimensiunile obiectelor fizice relevante.

Capacitatea noastră de a neglija acele părți ale undeletelor lui Huygen care nu formează învelișul, adică cele din umbra geometrică, este strâns legată de Iocalizarea părții în schimbare a perturbației. Acest lucru va fi mai clar în discuția noastră despre difracție (Capitolele 6 și 7), unde luăm în considerare în mod explicit aceste părți neglijate ale waveletelor.

Pentru a urmări propagarea perturbației optice prin spațiu sau prin medii optice, trebuie, în teorie, doar să facem aplicații repetate ale lui Huygens.

principiul. În exemplul din fig. 1.17, pentru a determina locația perturbației la momentul t + 2Δt am trasa anvelopa tuturor undelelor care se deplasează înainte de raza υΔt, originare de pe suprafața σ'. Acest proces poate fi repetat la infinit.

Noțiunea de raze decurge pur și simplu din imaginea noastră idealizată a unei perturbări optice iocalizate. În medii izotropice: razele de lumină sunt direcționate Unes care sunt întotdeauna perpendiculare pe

suprafața ocupată de perturbație la un moment dat și punctează de-a lungul direcției mișcării sale.

2. Dovada legilor opticii geometrice cu Principiile lui Huygens, a. Propagare rectilinie. O singură rază nu are nicio semnificație în contextul principiului lui Huygens deoarece suprafața undei, oricât de mică, va avea o zonă finită și prin ea pot fi trase infinite de norme. Dacă suprafața este Iimitată – de exemplu, de o deschidere – vor exista raze Iimitate, cum ar fi PB din Fig. 1.17, care sunt normale cu ea la marginea sa. Acum susținem că aceste raze respectă legea de propagare rectilinie în medii izotropice.

Noua suprafață σ' va fi, de asemenea, brusc limitată, deoarece este definită ca fiind anvelopa de ieșire a tuturor undeletelor secundare ale lui Huygens originare de pe σ. O undă centrată într-un punct de pe marginea lui σ, cum ar fi B în Fig. 1.17, va fi tangentă la σ' la marginea sa (punctul B' în figură). Nu există altă undă dincolo de cea centrată în B; astfel plicul se termină brusc la B'. Aici σ și σ' sunt ușor de văzut a fi normale cu vectorul rază PB. Dacă repetăm construcția lui Huygen pentru a determina încă o suprafață σ", prelungirea dreptei PB va trece doar prin marginea ei. Astfel, o linie prin P și B definește o rază Iimitatoare care respectă o lege de propagare rectilinie.

Este prescripția plicului din principiul lui Huygens care dă margini bine definite suprafețelor ondulate și ne permite să vorbim despre aceste raze Iimitatoare. Când renunțăm la prescripția plicului în favoarea unui tratament cantitativ al waveletelor secundare, nu trebuie să fim surprinși să constatăm că rezultă un comportament negeometric. Pe vremea lui Huygens, acest rafinament nu era apreciat deoarece difracția era foarte prost înțeleasă. Obiecția majoră a lui Newton la teoria undelor a fost, de fapt, că razele care nu au putut fi menținute. Acest lucru a fost corect, totuși dimensiunea deviației este mult mai mică decât se aștepta Newton.

b. Reflexie și refracție. Luați în considerare interfața piană reprezentată în Fig. 1.18 cu 00"'. O perturbație optică plană σ este găsită inițial, la momentul t, la fel cum marginea frontului de undă A atinge interfața la 0, așa cum se arată în Fig. 1.18α. La în acest moment, cealaltă muchie a unui front de undă A" este o distanță A"'0"' de punctul O'" unde va întâlni interfața. Această întâlnire va avea loc la momentul t + Δt, unde Δt = v/ A "'O'". Conform principiului lui Huygens, orice punct de pe frontul de undă inițial poate fi considerat ca o sursă a unei undele secundare. Alegem punctele în mod secvenţial pe măsură ce fiecare punct al frontului de undă întâlneşte interfaţa. Astfel, începând cu t în Fig. 1.18α, A va fi prima parte a frontului de undă care acționează ca o sursă de wavelet secundară și aceasta va fi centrată pe punctul 0. Un timp mai târziu, Fig. 1.18h, A' contactează interfața la O' Ieading la o altă undă secundară. Între timp, unda secundară care a început la 0 s-a propagat în incident

30 Natura luminii

Fig. 1.1β Construcția lui Huygens pentru legile refracției și reflexiei.

mediu cu viteza v şi în mediul de transmisie Cu viteza v'. Aici am presupus că v' < v astfel încât OC < OB. La un moment ulterior, Fig. 1.18c, o nouă sursă secundară este identificată la 0"', în timp ce sursele anterioare au produs undelete care au atins B și B' pe mediul incident și C și C în mediul de transmisie. , în Fig. 1.18d, timpul At a trecut și undele secundare au progresat și mai departe.

Am ales doi timpi arbitrari în Fig. 1.18b și c pentru a ilustra undele secundare intermediare. Ar trebui să fie clar că există un continuum de oportunități și că undele secundare, fiecare întârziată corespunzător, pot fi imaginate de-a lungul întregii interfețe de la 0 la 0".

Tangentele comune ale undeletelor secundare identifică noua locație a perturbației optice în mediul incident și în mediul de transmisie.

În Fig. 1.18d, unda secundară al cărei centru este la 0 contribuie la perturbația reflectată la B, care este o distanță υΔt față de 0. Aceeași undă contribuie, de asemenea, la perturbația transmisă la C, care este o distanță υ' Δt de la 0.

Situația din Fig. 1.18d a fost redesenată în Fig. 1.19 pentru claritate. De asemenea, în Fig. 1.19α sunt prezentate razele – direcțiile perpendiculare pe fronturile de undă. În Fig. 1.19b unghiurile tradiționale sunt prezentate cu toate razele care întâlnesc interfața într-un punct.

În Fig. 1.19, un segment de linie 00"' este o ipotenuză comună pentru triunghiurile 0 A"'O", OBO"' și OCO"'. Astfel, putem scrie

- _A'"0"'_ OB _ OC

sin θ sin θ" sin θ'

Din discuția anterioară mai putem concluziona că

A'"0'" OB OC

Δt =--------= – =---------

vv v'

(1,33)

(1,34)

Combinarea ecuațiilor. (1.33) și (1.34), găsim

V Δi V Δt ν' Δí

sin θ sin0" sin 0'   (ɪɜʒ)

Din Eq. (1.35), care iese direct din geometria din Fig. 1.19 și principiul lui Huygens, putem extrage legea reflexiei, θ" = θ și legea refracției

sin θ' sin θ

v, V

sau

n' sin θ' — n sin θ

_ I K. ,

unde, ca formalism ш Fermais, n/ri — v'/v. y γ7" -

3. Relația cu alte teorii. Huygens a subliniat în Tratatul său că construcția waveletului secundar dă naștere unei perturbații optice care se propagă în conformitate cu „principiul timpului Iest” prezentat de Fermât. Cele două abordări sunt metode echivalente pentru tratarea opticii geometrice. Cu toate acestea, principiul lui Huygens este mai puternic pentru că în el sunt conținute ideile necesare pentru a explica difracția. Cartea lui Huygens a fost publicată înainte de Opticks lui Newton. Cu toate acestea, Newton a fost atât de respectat încât lumea științifică a acceptat mai degrabă ideile lui decât pe cele ale lui Huygens. După cum sa menționat mai devreme, timp de aproape 100 de ani, progresul suplimentar în optică a fost inhibat de această părtinire.

D. Experimente definitive

Controversa din jurul naturii Iight a continuat, în ciuda dominației lui Newton, pe tot parcursul secolului al XVIII-lea. Dezbaterea activă a fost reînnoită la

începutul secolului al XIX-lea în urma unor noi experimente. Pe măsură ce implicațiile acestor date au fost acceptate treptat, modelele clasice de partide pentru Iight au murit în favoarea imaginii undei.

1. Tânăr. În raportarea rezultatelor observațiilor sale asupra tiparelor formate de pelicule subțiri, Newton a invocat fenomenul „potrivirilor” pentru a explica regiunile alternante de „reflecție ușoară” și „transmitere ușoară”. Conceptul său a fost total inacceptabil pentru Thomas Young (1773-1829), medicul londonez care, în timpul studiilor sale, s-a familiarizat cu teoria optică prin interesul său pentru viziune.

Young a avut intuiția de a combina excelenta lucrare de observație a lui Newton cu teoria ondulatorie a lui Huygens, ajungând astfel la „legea interferenței” sa. El a presupus corect că lumina dintr-o singură sursă, după ce a fost divizată astfel încât să urmeze căi optice de diferite lungimi, s-ar întări astfel încât să producă o zonă brighi numai dacă diferența rutelor este multiplu al unei anumite lungimi. El a explicat astfel „inelele lui Newton” prin interferența dintre lumina reflectată de la suprafața de sus și cea de jos a spațiului de aer.

Pentru a-și ilustra mai mult punctul de vedere, el a realizat experimentul acum faimos în care se observă „franjuri de interferență ale lui Young”. Discutăm detaliile acestui experiment în capitolul 5. Figura 1.20 arată cum a împărțit lumina soarelui în două surse identice folosind găuri în nuanțe. La fiecare gaură, undele secundare ale lui Huygens diverg pentru a se recombina pe ecranul de observație.

Pentru a înțelege imaginea lui Young, trebuie să presupunem că Iight se comportă ca un val

Umbra ferestrei

Observarea diafragmei

ecranul ecranului

Flg. 1.20 Demonstrarea experimentală a interferenței lui Young. Undele secundare ale lui Huygens provin din cele două găuri din ecranul de deschidere. Punctele identifică locațiile pentru armare pe măsură ce undeletele se combină.

și că undele sunt periodice. Ultima idee nu a făcut inițial parte din teoria lui Huygens, dar este necesar să se explice modelul regulat al franjurilor de pe ambele părți ale franjurii strălucitoare centrale. Cercurile din Fig. 1.20 reprezintă locațiile instantanee ale maximelor în ondulațiile periodice ale perturbației optice. Young a putut deduce periodicitatea spațială. Pentru lumină roșie a găsit 1/36.000 de inch, pentru culoarea violetă a găsit 1/60.000 de inch. Aici avem prima asociere a culorii cu lungimea de undă a unui val periodic.

Prezentarea de către Young a concluziilor sale în fața Societății Regale în 1802 a fost întâmpinată cu ridicol. Acest lucru a fost nu numai pentru conținutul lucrării, ci și pentru modul său de prezentare excesiv de încrezător și pentru atacul său direct asupra ideilor lui Newton. Young nu era înclinat din punct de vedere matematic; astfel, el nu a putut să-și justifice „legea interferenței” în toate cazurile pentru care credea că se aplică. El a încercat, fără succes, să explice fenomenul difracției ca rezultat al combinației a doar două fascicule de lumină de la marginile obiectului de difracție.

2. Fresnel. Augustin Fresnel (1788-1827) a fost un inginer civil al guvernului francez care, deși a fost instruit în matematică, nu știa să citească engleza sau latină. Prin opoziția sa față de Napoleon, el și-a pierdut slujba, devenind astfel liber să-și dedice timp curiozității sale cu privire la natura luminii. Întrucât nu a putut beneficia de publicațiile anterioare din străinătate, și-a propus să efectueze câteva experimente proprii foarte atente cu privire la difracție. Folosind o sursă mică (o imagine a soarelui transmisă printr-o mică gaură acoperită cu o picătură de miere) și observând direct lumina cu ochiul, mai degrabă decât în proiecție pe un ecran, Fresnel a reușit să documenteze modelele detaliate ale franjuri. Înconjurând umbrele micilor obstacole.

El a descoperit că, pe măsură ce punctul de observație s-a îndepărtat mai mult de obstacol, locul unei margini date nu a urmat o linie dreaptă, ci mai degrabă o hiperbolă. Acest lucru a fost complet inexplicabil cu modelul partide în care se credea că interacțiunea de difracție are loc pe măsură ce lumina trecea de marginile obstacolului, după care ar fi trebuit să urmeze o linie dreaptă. Observațiile lui FresneF au arătat că fenomenul marginal în difracție afișează o deviație continuă. Raportul acestei observații, împreună cu explicația ei, a fost comunicat Academiei de Științe din Paris în perioada 1815-1818.

Fig. 1.21 ilustrează ideea lui FresneF pentru o deschidere. Undele secundare se combină pentru a forma frontul de undă transmis nu doar în regiunea luminozității geometrice, ci și în umbră. Acolo unde apare suprapunerea constructivă, vor exista regiuni luminoase în modelele de difracție. Deoarece lungimea de undă a luminii este atât de mică, variațiile de iluminare sunt limitate pentru a se afla aproape de umbra geometrică. Susținătorul opticii newtoniene nu a putut să se potrivească noțiunilor elegante ale lui FresneF, dar pentru a ajuta la soluționarea problemei au ajutat la înființarea de către Academia de Științe a unui concurs pentru a solicita cea mai convingătoare explicație teoretică și experimentală a difracției. Fresnel a intrat în competiție cu un raport despre experimentele sale atente, susținut de un model matematic care folosește teoria undelor. El a fost ales ca învingător în 1819. Astfel, recunoașterea formală și decisivă a teoriei ondulatorii a Iight-ului a ajuns în sfârșit.

Unda plană incidentă

Undele Huygen1S

Barieră

Flg. 1.21 Metoda FresneFs pentru explicarea difracției printr-o deschidere. În deschidere, toate punctele de pe frontul de undă incident sunt considerate a fi surse pentru un continuum de undele lui Huygen.

3. Alte evoluții. A. Polarizare. Din 1669, fenomenul „dublei refracții” a fost una dintre cele mai încurcate probleme ale opticii. În acel an, la Copenhaga, Erasmus Bartholinus (1625-1698) a arătat că cristalele de „Spar Islandei” (pe care acum îl calițim calcit, $CaCO3$) au produs două raze refractate dintr-un singur fascicul incident. O rază, „raza obișnuită”, a urmat legea SnelF, în timp ce cealaltă, „raza extraordinară”, nu a fost întotdeauna nici măcar în planul incidenței.

Mai târziu, alții au stabilit că cele două fascicule, la ieșirea din cristal, posedau Caracteristici unice, ca și cum razele ar avea „laturi”. Cele două grinzi care ieșeau din calcit s-au comportat ca și cum laturile lor ar fi fost orientate în unghiuri righi una față de cealaltă. Etienne-Louis Malus (1775-1812) a câștigat premiul Academiei Franceze în 1810 prin descoperirea sa că lumina reflectată și împrăștiată poseda și această „lateralitate”, pe care a numit-o „polarizare” (vezi Fig. 1.22).

Existența polarizării a fost, de fapt, salutată de susținătorul teoriilor partide, deoarece nicio explicație nu putea fi imaginată de către teoreticienii undelor. Acest lucru se datorează faptului că, în analogie cu sunetul, teoriile undelor au emis ipoteza unor oscilații longitudinale. Adică, mișcarea particulelor mediului a fost întotdeauna considerată a fi paralelă cu direcția de propagare.

Flg. 1.22 Demonstrarea dublei refracții Caracteristicile calcitului. Raza E, sau raza extraordinară, este polarizată inițial în planul desenului. Raza O, sau raza obișnuită, respectă legea lui SnelF și este polarizată perpendicular pe desen.

1.4 Modelul undelor electromagnetice 35

În 1816, un colaborator al lui Fresne, Dominque-Francois Arago (1786-1853), i-a transmis lui Young în Anglia rezultatele unui experiment pe care îl făcuse cu Fresnel. S-a observat că două fascicule de lumină polarizate opus nu interferează între ele, în timp ce în aceeași configurație geometrică, interferența a fost observată cu lumină naturală sau cu lumină având o stare de polarizare. Acest lucru l-a stimulat pe Young să propună în 1817 că oscilațiile perturbației optice au fost transversale sau perpendiculare pe direcția de propagare. Fenomenul de polarizare liniară ar fi atunci asociat cu direcția oscilației. Fresnel a extins această idee încorporând-o în matematica sa! teoria luminii. Aceste lucrări rămân astăzi ca o teorie utilă parametrizată a polarizării optice și o dovadă a succesului modelului ondulat al luminii.

b. Viteza luminii în apă. Treptat, întreaga lume științifică a acceptat teoria ondulatorie a luminii. Succesul continuu al teoriei în urma contribuțiilor lui FresneF a fost imposibil de ignorat. Lovitura finală adusă modelului partide al lui Newton a venit în 1850, când Jean Bernard Léon Foucault (1819-1868), un fizician francez, și-a finalizat măsurarea vitezei luminii în apă. Figura 1.23 ilustrează principiul din spatele experimentului său. Lumina de la o sursă la P a trecut printr-un separator de fascicul într-o oglindă rotativă R apoi spre o oglindă staționară la M. La întoarcerea ei, lumina a lovit din nou oglinda rotativă, care se învârtise printr-un unghi a cărui magnitudine depindea de timpul de propagare. de la R la M şi înapoi la R. Cu aer în traseu (Fig. 1.23Ò) lumina reflectată a fost găsită la P'. În Fig. 1.23c, cu apă în cale, lumina reflectată era la P”, indicând faptul că oglinda s-a rotit printr-un unghi mai mare și că viteza luminii în apă era I mai mică decât în aer.

Modelul clasic al partidelor lui Newton, așa cum am văzut, a cerut ca viteza luminii în mediile dense optic să fie mai mare decât în aer, în timp ce teoria undelor, așa cum a inițiat Huygens, a prezis corect că viteza trebuie să fie mai mică în mediile dense optic. Pe parcursul primei jumătăți a secolului al XIX-lea teoria valurilor a devenit universal acceptată. Modelul de partide era mort, deocamdată.

1.4 Modelul țesăturii electromognetice

Deși s-a stabilit că lumina se comportă ca o undă până la mijlocul secolului al XIX-lea, a existat încă o întrebare despre ce anume

„flutură”. Majoritatea fizicienilor de la acea vreme credeau în existența unui mediu eteric în care se propaga perturbația optică. Acest mediu trebuia să posede unele Caracteristici neobișnuite. Trebuia să pătrundă în tot spațiul, fiind astfel extrem de rară. Cu toate acestea, Young a arătat, în urma experimentelor cu fenomenul de polarizare de către Fresnel și Arago, că unda luminoasă trebuie să fie transversală. Era greu de imaginat un mediu la fel de rar precum eterul, care să fie suficient de rigid pentru a putea suporta forța de restabilire a forfeinței necesară într-o undă mecanică transversală. După cum vom vedea, conceptul de eter a fost abandonat în teoria electromagnetică modernă a luminii. Așa cum sa propus inițial, totuși, eterul a fost imaginat ca fiind vehiculul forțelor electromagnetice, precum și al luminii.

Fig, 1.25 Determinarea lui Foucaulf a vitezei luminii în apă.

Asocierea dintre magnetism și lumină a fost făcută pentru prima dată în 1851 de Michael Faraday (1791-1867), experimentatorul englez talentat. În cursul Lucrărilor publicate în cele din urmă în Experimental Researches in Electricity, el a observat că orientarea polarizării liniare a unui fascicul de lumină ar putea fi rotită atunci când fasciculul de lumină a călătorit printr-o bucată de sticlă de-a lungul direcției liniilor de forță create de un electromagnet. Această relație l-a determinat pe Faraday să speculeze că eterul care fusese ipotetizat în teoria Iightului a jucat, de asemenea, un rol important în comunicarea liniilor de forță în magnetism.

În 1856, Wilhelm Weber (1804-1890) și Rudolph Kohlrausch (1809-1858) au determinat experimental că constanta proporțional dintre mărimile electrice și mărimile magnetice era, în cadrul erorii experimentale, aceeași cu viteza Iight. Că această constantă trebuie să suporte unitățile de viteză este relevat din definițiile fundamentale. Forța magnetică pe unitatea de lungime dintre două fire paralele lungi care transportă curent în spațiul liber separate de distanța r este dată de

dF   ii'

d¿   2πr

unde μ_0 este o constantă (Fig. 1.24a) cunoscută sub numele de permeabilitatea spațiului liber. Magneliclorce are uñlts de

/ Încărcați!2

/⅞ ' II y Timpul J

Se scrie forța electrică dintre două sarcini în spațiul liber separate prin distanța r

F_ * 1 ΨÏ 4πε0 r2

unde ε_0 este o constantă cunoscută ca permisivitatea spațiului liber (Fig. 1.24b).

Forța electrică are unități de

1 / Sarcina \ 2 ʌ ε_0 y Distanța

Deoarece acestea sunt echivalente dimensional, trebuie să avem (μoεo)^1/2 ɪɪ1 unitățile de (distanță/timp). Acest lucru a fost recunoscut la scurt timp mai târziu ca mult mai mult decât o coincidență. Dar abia când fizicianul scoțian James Clerk Maxwell (1831-1879) a adunat teoria electromagnetică într-un set corelat de relații matematice a fost justificată ipoteza că Iight se comporta ca o undă electromagnetică.

Teoria lui Maxwel, dezvoltată în perioada 1861-1862, s-a ocupat de eterul ca mediu în care au existat fenomenele electromagnetice. El a propus ca

Fig. 1.24 (a) Forța magnetică între fire lungi paralele care transportă curenții i și ï. (b) Forța electrică între sarcinile asemănătoare q și q'.

câmpul electric a fost o „deplasare” sau o distorsiune a particulelor de eter încărcate din echilibrul lor, în timp ce câmpul magnetic a fost asociat cu regiuni rotative sau „vórtices” ale particulelor de eter încărcate. O schimbare în structura vortexului eterului (câmp magnetic) ar produce deplasare în mediu (câmp electric). Această interrelație este necesară pentru ca undele constând din fluctuații simultane în câmpurile electrice și magnetice să fie posibile.

Caracterul mecanic al formalismului original al lui Maxwel a fost un produs natural al vremurilor. Chiar și astăzi Studenții au dificultăți în înțelegerea câmpurilor electrice și magnetice fără o analogie mecanică. De la propunerea lui MaxwelF, am învățat că câmpurile electrice și magnetice sunt considerate mai corect ca caracteristici ale spațiului și relativității (mișcarea relativă a unui cadru de referință în raport cu altul). Ecuațiile lui MaxwelF pentru câmpuri, totuși, rămân valabile chiar și în absența unui eter, deoarece descriu modul în care aceste Caracteristici sunt legate între ele și cu sarcinile materiale statice și dinamice. Nu trebuie să inventăm un eter a cărui condiție de străină sau de rotație este legată de acțiunea forțelor electrice și magnetice. A face asta înseamnă a complica și mai mult problema. Fenomenele electromagnetice clasice observate experimental, inclusiv propagarea Iight3 sunt explicate în întregime în termenii câmpurilor în sine. În plus, dacă eterul ar exista, atunci nu exista niciun motiv să ne așteptăm ca etnerul să fie în repaus în ceea ce privește pământul sau, de altfel, nici în ceea ce privește soarele. În modelul din secolul al XIX-lea, viteza Iight a fost legată de cadrul de referință al eterului. Acest lucru a necesitat ca viteza luminii măsurată pe pământ să depindă de direcția de măsurare.

Detectarea acestei anizotropie a făcut obiectul experimentelor efectuate de fizicianul american Albert Abraham Michelson (1852-1931)

în 1881 și cu Edward Williams Morley (1838-1923) în 1887. Michelson A construit un dispozitiv în acest scop, interferometrul Michelson. Detalii despre funcționarea acestuia sunt descrise în secțiunea 5.4C. Aici este important doar să recunoaștem că interferometrul poate fi folosit pentru a măsura mici diferențe de fază între două fascicule perpendiculare. Timpul de propagare pentru fiecare dintre aceste două fascicule ar fi trebuit să depindă de direcția și viteza de mișcare a interferometrului în raport cu eterul propus . Deoarece grinzile erau perpendiculare, timpii lor de propagare ar fi trebuit să fie diferiți. Sensibilitatea instrumentului a fost suficientă pentru a permite detectarea diferenței de fază rezultată din diferiții timpi de propagare. Acest experiment a dat rezultate negative atunci când a fost efectuat pentru prima dată și când a fost repetat în alte perioade ale anului. Aceasta însemna că Iight are o viteză constantă, independentă de mișcarea aparatului de măsurare în raport cu eterul ipotetizat. Deoarece eterul nu exercită nicio influență asupra luminii, cel mai bine este să renunțați cu totul la concept.

A. Ecuații MaxweIPs

1. Relații Integrale. Majoritatea cursurilor elementare de fizică se ocupă de electromagnetism prin ecuații integrale (de exemplu, Halliday și Resnick). Teoria electromagnetică a luminii, așa cum este prezentată de Maxwell, este cel mai direct dezvoltată.

Fig. 1.25 (a) j√ este suprafața de integrare pe care teorema lui Gauss este definită pentru câmpul vectorial. (b) ⅛ este bucla de integrare pentru teorema lui Stoke.

Ioped dacă aceste ecuații pot fi reformate în forni diferențiale. Pentru a face acest lucru, avem nevoie de două teoreme generale din calculul vectorial.

A. Teorema lui Gauss. Luați în considerare câmpul vectorial F. Adică pentru fiecare punct din spațiu (și în fiecare moment), o magnitudine și o direcție pentru F sunt definite. Aici F este o mărime generalizată, dar în aplicația noastră o asociem fie cu câmpul electric E, fie cu inducția magnetică B. Se consideră și o suprafață închisă j√, în același spațiu ocupat de F. Debitul net sau „fluxul” lui F din t√ este

F-dA

unde dA este îndreptat de-a lungul normalei exterioare la suprafață și |</A| = d.rf este aria elementului de suprafață (Fig. 1.25). Teorema lui Gauss echivalează acest flux cu integrala de volum (în interiorul suprafeței închise de j√) a unei alte mărimi care depinde de variația spațială a lui F.

Gλ<U55,

(VF) dΨ~

(1,36)

unde ≠^ este volumul cuprins de sá. Aici VF este „divergența” lui F și este calculată ca un produs scalar sau punctual al „del” și F.

d. Stokes, Teoremă. În cadrul aceluiași câmp vectorial se consideră acum o curbă închisă. În fiecare punct de-a lungul curbei, identificați segmentul incremental dì a cărui direcție este tangentă la curbă. „Circulația” totală a lui F în jurul ⅛? este

(j) F dl

Putem identifica, de asemenea, una dintr-un număr de suprafețe deschise j√ a căror margine este conturată de teorema lui Stokes, raportează circulația lui F la o altă mărime, care este definită pe sá.

O F-Jl = J(VxF)-JA

<e sá

(1,37)

Aici VXF este „curi” lui F și este calculat ca un vector sau produs încrucișat al „del” și F.

2. Forma diferențială a ecuațiilor MaxwelPs, α. Câmpuri macroscopice. Când materia este prezentă, o parte din termenii sursă – adică densitatea de sarcină și densitatea de curent – care apar în ecuațiile lui Maxwel sunt formate din sarcini „libere” și Curenți și o parte provine din răspunsul materiei la câmpuri (legate). sarcini și curenți). Dar câmpurile, la rândul lor, depind de aceleași sarcini și curenți, oferindu-ne un sistem cuplat de ecuații.

Sarcinile și curenții asociați cu atomii și moleculele materiei au discontinuități ascuțite la scară atomică, adică pe distanțe de aproximativ 0,1 nm. Câmpul electric rezultat E și inducția magnetică B se schimbă foarte dramatic pe distanțe similare. Acestea sunt atunci câmpuri de microscopie. Dispozitivele de măsurare macroscopică nu vor putea, de obicei, să observe discontinuitățile ascuțite din câmpurile de microscopie. Este foarte util să se introducă câmpurile de macroscopie E și B obținute prin medierea câmpurilor de microscopie pe un element de volum care este macroscopic mic, dar suficient de mare pentru a conține foarte mulți atomi sau molecule. Fluctuațiile spațiale ascuțite din câmpurile de microscopie vor fi atenuate, lăsând funcții bine comportate pentru mărimile electrice și magnetice.

b. Versiunea MaxwelPs a Legii lui Gauss pentru E. Aceasta este o declarație a Legii lui Coulomb în termeni de câmp. În cuvinte, se spune că fluxul câmpului electric macroscopic printr-o suprafață închisă este egal cu sarcina totală din interiorul suprafeței împărțit la o constantă. Constanta este introdusă în sistemul SI de unități astfel încât să putem măsura sarcinile în coulombi și curenții în amperi. Forma integrală a Legii este

Fig. 1.26 Legea lui Gauss pentru o sarcină punctiformă în centrul unei suprafețe de integrare sferică. |E| este constantă pe sferă.

E•dA = ɪ

εo

pdV

(1,38)

unde p este densitatea totală de sarcină medie spațială și ε0 este permisivitatea spațiului liber care este determinată experimental a fi ε0 = 8,854187817 × 10-12 C2/N — m2. Figura 1.26 ilustrează legea pentru o taxă punctuală^

Folosind relația matematică a teoremei lui Gauss, Ec. (1,36), Ec. (1.38) poate fi rescris ca

Ш(ve)^4

- eu

p dv

ceea ce arată, deoarece limitele integrării sunt arbitrare, că o expresie echivalentă a legii lui Gauss pentru câmpul electric este

VE = -

εo

(1,39)

c. Versiunea MaxwelPs a legii lui Gauss pentru B. În termeni de câmp, această lege rezultă din presupunerea că monopolurile magnetice nu există. (Dacă sunt găsite experimental, această ecuație va necesita modificare.) Se spune că fluxul inducției magnetice macroscopice printr-o suprafață închisă este zero. În formă integrală, această afirmație este

B-î/A - 0

(1-40)

care poate fi transformată ca în secţiunea precedentă într-o ecuaţie diflerenţială.

VB = O / Γ. (1,41)

d. Versiunea MaxwelP a legii lui Faraday. Aceasta este ecuația inducției magnetice. În cuvinte, se spune că circulația câmpului electric macroscopic în jurul unei curbe închise (sau forța electromotoare) este egală cu negativul

Fig. 1.27 Legea lui Faraday raportează o modificare (n flux magnetic la un câmp electric.

viteza temporală de modificare a fluxului magnetic macroscopic prin curba închisă (Fig. 1.27). Forma integrală este

E dì =

d_

dt

BdA

(1-42)

Rețineți că suprafața din această ecuație nu este. închis dar este conturat de curbă

Folosind teorema lui Stokes, Ec. (1.37), putem transforma partea stângă a ecuației. (1.42) și inversați ordinea diferențierii și integrării pe partea de righi pentru a ceda

si

(VXE)•dA =

l' B•JA

õt

Notația derivată parțială este utilizată deoarece B este o funcție atât a timpului, cât și a spațiului. Aceasta arată că o formă echivalentă pentru Legea lui Faraday este

VxE=-

гв

õt

(1,43)

e. Extinderea lui Maxwel a legii lui Ampere. Înainte de funcționarea lui MaxwelF, legea lui Ampere a conectat o inducție magnetică în vecinătatea unui fir doar cu curentul din fir. În cuvinte, se spunea că circulația inducției magnetice macroscopice în jurul unei curbe închise a fost egală cu o constantă μ0 ori curentul electric total prin curbă.

OB • dɪ = μ0

= μ0i

Aici i și J sunt media spațială a curentului total și, respectiv, a densității totale a curentului prin curbă. Maxwell a adăugat un nou termen care acționează ca o sursă suplimentară a inducției magnetice. El a numit acest lucru „curent de deplasare”, care a fost legat de viteza de schimbare în timp a fluxului electric prin curba închisă. Constanta μ_0 este necesară pentru a asigura consistența dimensională. ($\mu_0 = 4\pi\times 10^{-7}$ N · sec^2/C^2 este permeabilitatea spațiului liber). Că noul termen a fost necesar se poate observa din Fig. 1.28, care ilustrează metoda de calcul a inducției magnetice în jurul unui fir care conține un curent care variază în timp. Un condensator este, de asemenea, în circuit. Dacă este furnizat de o baterie (nu este prezentată), curentul va scădea

$2\pi rB = \mu_0 i$

(c)

Fig. 1.2β Ilustrație a necesității termenului lui Maxwel în legea lui Ampere. (a) Această cale de integrare înconjoară curentul i. (b) Această cale de integrare înconjoară un câmp electric care variază în timp, dar fără curent. (c) Reprezentări ale curentului și ale câmpului care arată echivalența curentului de deplasare cu curentul liber.

cu timpul după conectarea bateriei pe măsură ce încărcarea plăcilor condensatorului crește. Folosim legea lui Ampere așa cum a fost formulată inițial pentru a găsi inducția magnetică din jurul firului. Pentru a face acest lucru, folosim calea de integrare (α). Dacă mutam calea în golul dintre plăci, inducția magnetică ar fi zero după forma inițială a legii, deoarece curentul liber în interiorul intervalului este zero. Maxwell a recunoscut că acest lucru era incorect, deoarece inducția magnetică nu va scădea la zero pur și simplu pentru că în circuit era un condensator. El a propus că câmpul electric în schimbare în decalaj va juca rolul unei densități de curent, $\varepsilon_0\, \partial E/\partial t$, completând astfel circuitul și oferind o inducție magnetică care a fost continuă.

Forma integrală a noii ecuații este

$B \cdot dl = \mu_0$

(1,44)

Ca și în cazul legii lui Faraday, aceasta poate fi transformată într-o relație diferențială folosind teorema lui Stokes, Ec. (1,37).

$(\nabla \times B) \cdot dA = \mu_0$

■° õt Jd

care, deoarece Iimits pe j/ sunt arbitrare, Ieads to

1#   /∂E'

,v'- VxB-Jj + ⅛-

(1,45)

În rezumat, prezentăm cele patru ecuații ale lui Maxwell sub formă diferențială cu numerele lor de ecuație originară în această secțiune:

I   V•E = - εo
II   VB = O
III   VxE=-
IV   VXB = μ0 |

6B

õt

(1,39)

(1,41)

(1,43)

∂E'

õt

(1,45)

Sinteza fenomenelor electromagnetice reprezentate în aceste patru ecuații relativ simple rămâne una dintre cele mai mari realizări ale fizicii. Ele sunt punctul de plecare de la care pot fi explicate toate efectele electromagnetice clasice, inclusiv natura luminii.

B.   Ecuația undelor electromagnetice

Aici dorim să demonstrăm, urmând Maxwell, că Iight se comportă ca o undă electromagnetică, adică o perturbare de propagare care implică variații în timp și spațiu ale câmpurilor electrice și magnetice cuplate. Pentru a face acest lucru, vom simplifica problema luând în considerare Iight în vid, așa cum există în spațiul cosmic. În acest caz, termenii sursă din Ecs. (1.39) și (1.45) sunt zero și nu trebuie să realizăm medii spațiale. Cele patru ecuații Maxwell sunt, în această situație

I   VE= 0
II   VB= o
III   VxE=-
IV   VX B = μ0

5B

õt

(1,46)

5E

£°õT

Începând cu Eq. (1.46) III, luăm produsul vectorial al ambelor părți ale ecuațiilor cu „del.” (Acest lucru se numește „a lua curul” cantităților.)

VX (VXE) = V x Í - – ∧ = - - (VXB)

\dt õt

(1•47)

unde este ordinea spatiului! și derivatele temporale au fost interschimbate pe partea dreaptă. Acum partea stângă a ecuației. (1.47) poate fi simplificată folosind identitatea produsului triplu vectorial,

Ai × (A2 × A3) = A2(A1 • A3) – (Ai • A2)A3.

Aici

A1= V, A2 = V și A3 = E

Prin urmare

V × (V × E) = V(V -E) - V -VE

Deoarece, prin Ec. (1.46) I, VE = O, aceasta se simplifică la

V x (V x E) = – V -VE

a cărui parte dreaptă am scris mai înainte ca

-V-VE= -V2E

Ec. (1.47) a devenit

-V2E = -((Vx B)

ot

Folosind Eq. (1.46) IV, aceasta poate fi reexprimată numai în termeni de E

,   ∂2E

V2E = μ0ε0 –2-

sau ______

(4 V2E - μ0ε0 7 |= 0 (1-48)

Într-un mod similar, luați curi al Eq. (1 46) IV și folosiți ecuația. (1.46) III pentru a obține ____

Astfel, fiecare componentă a lui E și B respectă ecuația wavɪ tridimensională obișnuită, Eq. (1.21), de exemplu,

r52F

$V2E_x - \mu_0\varepsilon_0 = 0$ (1,50)

Acest lucru este adevărat cu condiția ca viteza undei electromagnetice să fie egală cu $(\mu_0\varepsilon_0)$-ɪz2. La momentul lucrării lui Maxwel, acest lucru fusese deja demonstrat în mod explicit. Astfel, în spațiul liber,

$v = c = (\mu_0\varepsilon_0)$~i,2 (1,51)

Deși acceptarea teoriei lui Maxwel asupra Iight a fost lentă la început, e aproape

Corespondența cu fenomenele experimentale nu putea fi ignorată Până la sfârșitul secolului al XIX-lea, modelul undelor electromagnetice a Iight a fost ferm stabilit. Singurul aspect rămas care nu fusese încă rezolvat se referea la natura eterului. Viziunea actuală este că un mediu eteric nu există în niciun sens operațional. Câmpurile există în spațiul liber, jucând roluri de sprijin reciproc, în așa fel încât o undă purtătoare de energie să poată fi menținută. Trebuie să înțelegem că conceptul de câmpuri electrice și magnetice oscilante este cel mai util mecanism cu care se descrie fenomenele optice clasice. Acesta este criteriul pe baza căruia orice teorie ar fi considerată de succes. Până când vom întâlni fenomene care nu se supun predicțiilor modelului, suntem îndreptățiți să aplicăm modelul și să tratăm lumina ca pe o undă electromagnetică.

Aceasta este, în cea mai mare parte, abordarea adoptată în restul acestei cărți. Interferența și difracția pot fi tratate în mod adecvat cu teoria clasică a undelor electromagnetice a lui Maxwell. Multe aspecte ale interacțiunii Luminii cu materia pot fi, de asemenea, tratate clasic, cu condiția ca caracteristicile materiei să poată fi parametrizate. Alte aspecte ale interacțiunilor luminoase cu materia necesită o abordare teoretică cuantică. Nu vom atinge acest lucru, deoarece este mai bine dezvoltat într-un curs dedicat de optică cuantică. După cum am menționat anterior, baza filozofică pentru geometrica! optica este cea mai simplă dintre toate. Optica geometrică poate fi dezvoltată doar prin aplicarea principiului Fermafs.

C. Caracteristicile undelor electromagnetice

Ecuațiile de undă Ec. (1.48) și (1.49) și soluțiile lor nu sunt independente unele de altele deoarece ecuațiile. (1.46) trebuie să se aplice în continuare. Când se obțin soluții ondulatorii, conexiunile dintre B și E dau proprietățile de polarizare transversală prezise de experimentele din secolul al XIX-lea. Ca valuri care călătoresc, soluțiile arată și modul în care energia poate fi transportată prin spațiu de lumină.

1. Polarizate liniar, unde plane de armonie. Știm deja asta

cos(ωt — k•r + φ) = Re{e'iω'~k'r+φ,}

respectă ecuația undei în spațiu liber (1.50) dacă ω = c\k\ și φ = constantă. Prin urmare, următoarele două ecuații vor fi automat soluții ale ecuațiilor. (1 49) și (1,50):

E = Re{E0ei<ω,-kr+^} (1.52a)

B = Re{B0e'<ωt-kr+φi} (1.52b)

unde E0 și B0 sunt vectori constanți asociați cu amplitudinea maximă a oscilațiilor. În continuare, când nu există nicio șansă de neînțelegere, vom renunța la „Re” în ecuații precum (1.52). Se va înțelege că câmpurile fizice vor fi date de partea reală a câmpurilor complexe care apar în ecuațiile noastre.

Deoarece acestea sunt unde plane, putem folosi comenzile rapide ale operatorului ecuațiilor. (1.28) și (1.29) în ecuațiile Maxwell (1.46) I și II pentru a găsi

și

VE = -ik•E = 0

VB = -ik•B = 0

Aceasta arată că E și B trebuie să fie ambele perpendiculare pe k, care este de-a lungul direcției de propagare. Astfel, E și B sunt ambele oscilații transversale.

Pentru a găsi relația dintre E și B, aplicați comenzile rapide ale operatorului la ecuația Maxwell (1.46) III. Prin urmare,

v7 τ. aB

VxE=-----

õt

devine

— ik XE = — iω B

sau

в = κxE

ω

IkxE c κ

Prin urmare

B - ɪ s XE

c

(1,53)

unde s = k/k este vectorul unitar pe direcția de propagare. Ecuația (1.53) spune trei lucruri importante: (1) B este perpendicular pe E, (2) B este în fază cu E și (3) mărimile lui B și E sunt legate prin B — E/c, pentru spațiul liber în sistemul SI de unităţi.

Cei trei vectori E, B și κ formează un sistem de coordonate dreptunghiular dreptunghiular. Modelul de câmp rezultat pentru o valoare fixă a timpului este schițat în Fig. 1.29. Lungimile vectorilor de câmp sunt proporționale cu mărimile câmpurilor

Fig. 1.29 Modele de câmp electromagnetic într-o undă plană la timp fix.

de-a lungul unei linii, care coincide cu k, în spațiul real. Acest model se mișcă în direcția κ cu viteza c pe măsură ce timpul evoluează.

Rețineți că B_0 este determinat în mod unic odată ce E_0 și κ sunt cunoscute, deoarece B_0 = (κ ж E_0)/ck. Rețineți, de asemenea, că E_0 poate lua orice direcție în planul transversal perpendicular pe κ. Două unde diferite de tipul discutat tocmai având aceleași ω și κ pot fi suprapuse, producând, în general, lumină polarizată eliptic. După cum sa discutat în capitolul 9, natura elipsei va depinde de raportul dintre amplitudini și valoarea diferenței de fază pentru aceste două unde.

2. Densitatea Energiei și Fluxul Energetic. Teoria electromagnetică conduce la următoarea expresie pentru densitatea energiei (în unități SI) asociată câmpurilor electrice și magnetice din spațiul liber:

U — ~ ε_0 E • E H----B * B

2   μ_0

Dar

B • B — ɪ E • E — $\varepsilon_0\mu_0$E • E

c

ASA DE

U = ε_0E•E = ε_0 | E | 2

(1.54a)

(1.54b)

Fluxul de energie pe unitatea de suprafață de timp, sau densitatea fluxului de energie, în direcția de propagare este definit de vectorul Poynting (John Henry Poynting, 1852-1914).

(1,55)

Acest vector important dă energiei Aux densitatea sau iradierea într-o direcție arbitrară (care este identificată prin unitatea τvectoTI⅛) prin intermediul produsului scalar η*S (vezi Fig. 1.30).

Fig. 1.50 Densitatea fluxului de energie pe o suprafață depinde de unghiul de incidență.

O expresie pătratică în câmpuri, cum ar fi S sau U, trebuie calculată cu grijă atunci când se utilizează notație complexă pentru câmpuri. Pentru undele plane polarizate inițial în vid, avem următoarele expresii pentru câmpurile fizice reale:

$E – E_0 \cos \varphi, \varphi = \omega t – k \cdot r + \varphi$

_ „   , κ × E_0

$B = B_0 \cos \varphi$ =--------cos φ

ck

Henee, S este dat de

1 (κ × E)

$S = – E_0$ ×------—— $\cos^2 \varphi = \varepsilon_0 c \mid E_0 \mid^2$ â $\cos^2 \varphi$ (1,56)

/1q   CK

Deoarece media de timp pe mai multe cicluri de $\cos^2(\omega t – \kappa \cdot r + \varphi)$ este 1/2, media de timp a lui S este dată de

<S> = ε^ | E_0 | ⅛ (1,57)

Aceasta este cantitatea la care ochii noștri sau orice detector ar fi sensibili. Fluxul de energie mediat în timp este de-a lungul vectorului de undă k, (sau s = k/k) în direcția de propagare a undei.

Pentru o undă în vid, densitatea de energie este dată de Ec. (1.54) de către

$U = \varepsilon_0 \mid E_0 \mid^2 \cos^2 \varphi$

cu o medie de timp

<C> = ^ | E_0 | 2 (1,58)

Rețineți că magnitudinea lui <S> respectă

<5>≡ |<S> |= <t7>c (1,59)

Acesta este un rezultat general

Densitatea fluxului de energie = (densitatea de energie) x (viteza de propagare)

Pe parcursul acestei cărți, când nu există nicio șansă de confuzie, vom elimina parantezele medii de timp. În cele mai multe cazuri, suntem interesați de cantitatea pe care ochii noștri sau un detector o simte, așa că implicit ne vom ocupa de valorile medii în timp de 5 sau I7. Pentru a pune lucrurile în perspectivă, să presupunem că E0 are o mărime de

1 V/cm — IO2 V/m. Atunci densitatea fluxului este

S = —-ʒ-^ɪθ ɪ2 X 3 X IO* S * * 8 X (102)2 = 13,3 W/m2

= 1,33 mW/cm2

3. Confirmare experimentală. Cea mai veche dovadă documentată că electromag-

undele netice puteau fi produse prin manipularea câmpurilor electrice și magnetice a fost furnizată de Heinrich Hertz (1857-1894) care la Kiel, Germania, în 1888 a creat

Fig. 1.51 Reprezentarea schematică a dispozitivului folosit de Hertz pentru a demonstra că o undă electromagnetică poate fi generată din energia electromagnetică stocată.

prima fabricatie! unde radio. Acest lucru a realizat cu aparatul prezentat schematic în Fig. 1.31. Emițătorul era un circuit LC rezonant, condensatorul căruia era format din plăci metalice mari. Oscilația în interiorul circuitului a putut fi detectată atunci când tensiunea condensatorului a atins o dimensiune suficientă, astfel încât o scânteie a sărit peste decalaj. Aparatul său avea o frecvență de rezonanță de 5,5 × IO7 eps (sau Hz!). Undele electromagnetice au fost produse atunci când sarcinile au accelerat în circuit. Acestea au fost propagate la un circuit detector a cărui frecvență de rezonanță era aceeași cu emițătorul. El a putut observa o scânteie în receptor, indicând că ceea ce a început ca o oscilație a circuitului LC într-un circuit a fost transmis prin spațiu către al doilea circuit LC, susținând astfel predicțiile MaxwelF.

Hertz a mers mai departe, totuși, pentru a arăta că aceste unde au afișat interferență caracterizată printr-o lungime de undă de 5,4 m. Astfel, viteza de propagare trebuia să fie de 2,97 X IO8 m/s - în limita erorii experimentale de a fi egală cu viteza luminii. El a arătat, de asemenea, că aceste unde ar putea fi reflectate de un perete, refractate de o prismă cu pas dur și polarizate de un grătar de sârmă. Acest lucru a dovedit că undele electromagnetice aveau toate caracteristicile asociate cu lumina vizibilă.

1.5 Dezvoltarea modemului

Modelul undelor electromagnetice pentru lumină cuprinde acele aspecte ale geometrică! și optica fizică care ne preocupă în acest text. Optica relativistă și optica cuantică, evoluții recente, sunt necesare pentru o imagine cuprinzătoare a luminii. Nu vom dezvolta aceste subiecte aici, deoarece pentru a face acest lucru ar fi nevoie de abateri semnificative de la zonele optice clasice - formarea imaginii, Iens.

design, aberații, radiometrie, interferență, difracție și polarizare. Menționăm doar evoluțiile modemului de dragul Completitudinii.

A. Optica relativista

Ecuațiile lui Maxwel, care specifică comportamentul câmpurilor electrice și magnetice, sunt enunțuri matematice ale legilor fizice pe care Iight le respectă. În forma lor originală, aceste ecuații erau strâns legate de proprietățile mecanice ale unui mediu eteric. Experimentul Michelson-Morley a arătat că conceptul de eter nu este necesar și că viteza Iight este independentă de viteza observatorului.

Acest punct de vedere era în contradicție cu conceptul newtonian al mișcării relative. Pe lângă această problemă, s-a recunoscut, de asemenea, la începutul secolului, că ecuațiile lui Maxwel se schimbau dacă observatorul era în mișcare. Aceasta a fost, de asemenea, o urmare a aplicării relativității newtoniene.

Inconsecvențele au fost rezolvate odată cu introducerea teoriei relativității speciale, care a fost declarată elocvent în 1905 de Albert Einstein (1879-1955). Einstein a pornit de la faptul experimental că Iight are o viteză care este independentă de viteza observatorului. El a recunoscut că toate cadrele de referință neaccelerate sunt total echivalente pentru efectuarea tuturor experimentelor fizice. Din aceste fapte a ajuns la un nou concept de relativitate întruchipat în transformările Lorentz. Transformările newtoniene de la un cadru de referință la altul sunt un caz special al transformărilor Lorentz, în cazul în care viteza relativă între cadrele de referință este mult mai mică decât viteza luminii.

Ecuațiile lui MaxwelF se dovedesc a fi invariante (conservate în formă) atunci când sunt supuse unei transformări Lorentz. Noul concept de relativitate duce la o nouă formulare a legilor mișcării. Vedem aici rolul central pe care Iight îl joacă în formarea teoriei fizice.

B. Optica cuantică

Modelele clasice de partide pentru Iight au fost respinse în prima jumătate a secolului al XIX-lea. Succesul modelului undelor electromagnetice a fost Striking. Am văzut cum ecuațiile lui MaxwelF, pe care se bazează teoria undelor, sunt chiar în concordanță cu teoria relativității speciale. În 1900, s-au născut câteva idei noi care au readus conceptul de „partide” (foton) al luminii. Cadrul clasic a dispărut și în locul lui a fost un nou mod de a descrie, nu numai lumina, ci și alte fenomene naturale. Încă o dată, căutarea unei

înțelegeri mai profunde a luminii a dus la o reevaluare a fizicii. Noua revoluție a dat naștere fizicii cuantice. Caliam aplicarea sa la optica cuantică de lumină. Nu vom discuta, în cea mai mare parte, optica cuantică în acest text. Fenomenele de care ne preocupă sunt explicate adecvat cu modelul electromagnetic. În ceea ce privește interacțiunea luminii cu materia, parametrizăm influența materiei prin cantități care pot fi considerate în general determinate experimental.

REFERINȚE

General

Born, Max și Emil Wolf. Principii de optică. Pergamon Press, Oxford, 1980. Ditchburn, RW Light Academic Press, Londra, 1976.

Driscoll, Walter G. și William Vaughan. Manual de optică. McGraw-Hill, New York, 1978. v

Hecht, Eugene și Alfred Zajac. Optica. Addison-Wesley, Reading, Mass., 1974.

Jenkins, Francis A. și Harvey E White. Fundamentele opticii. McGraw-Hill, New York, 1976.

Kingslake, Rudolf, Robert R. Shannon și James C. Wyant, ed. Optică aplicată și inginerie optică, Vois. 1-9. Academic Press, New York, 1965-1967, 1981-1983.

Levi, Leu. Optica aplicata. Wiley, New York, 1968.

Lipson, SG și H. Lipson. Fizica optică. Cambridge University Press, New York, 1969.

Longhurst, RS Optică geometrică și fizică. Wiley, New York, 1967.

Mathiew, JP Optics. Pergamon Press, Oxford, 1975.

Meyer-Arendt, Jurgen R. Introducere în optica clasică și modernă. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1972.

Rossi, Bruno. Optica. Addison-Wesley, Reading, Mass., 1967.

Strong, J. Concepte de optică clasică. Freeman, San Francisco, 1958.

Wolf, Emil, ed. Progrese în optică, Vois. 1-21. Olanda de Nord, Amsterdam, 1961-1984.

Young, M. Optica si Lasere. Springer-Verlag, Berlin, 1977.

Capitolul 1

Arfken, G. Metode matematice pentru fizicieni. Académie Press, New York, 1970.

Baker, BB și EJ Copson. Teoria matematică a principiilor lui Huygens. Oxford University Press, Londra, 1969.

Bliss, Gilbert A. Calculul variaţiilor. Asociația de matematică din America, 1944.

Born, Max și Emil Wolf. Principii de optică. Pergamon Press, Oxford, 1980.

Buchdahl, HA O Introducere în Optica Hamiltoniană. Cambridge University Press, Cambridge, 1970.

Cook, David M. Teoria câmpului electromagnetic. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1975.

Ditchburn, RW Light. Académie Press, Londra, 1976.

Fowles, Grant R. Introducere în optica modemului. Holt, Rinehart și Winston, New York, 1968.

Goldwin, Edwin. Unde și fotoni: o introducere în optica cuantică. Wiley, New York, 1982.

Jackson, John D. Electrodinamică clasică. Wiley, New York, 1975.

Klauder, John R. și ECG Sundarshan. Fundamentele opticii cuantice. Benjamin, New York, 1968.

Kline, Morris și Irwin W. Kay. Teoria Electromagnetică și Optica Geometrică. Interscience, New York, 1965.

Loudon, R. Teoria cuantică a luminii. Oxford Clarendon Press, Londra, 1973.

Misner, CW, KS Thorne și JA Wheeler. Gravitația. Freeman, San Francisco, 1973.

Newton, Isaac. Optica. Dover, New York, 1979, (publicat inițial, 1704).

Ohanian, HC Gravitație și spațiu-timp. Norton, New York, 1976.

Pearson, JM O teorie a undelor. Allyn & Bacon, Boston, 1966.

Resnick, Robert. Introducere în relativitatea specială. Wiley, New York, 1968.

Rindler, Wolfgang. Relativitatea esențială. Springer-Verlag, New York, 1977.

Ronchi, Vasco. Natura Luminii. Harvard University Press, Cambridge, Mass., 1971. Rosser, WGV O introducere în teoria relativității. Butterworths, Londra, 1964. Rossi, Bruno. Optica. Addison-Wesley, Reading, Mass., 1957.

Sabra, AI Teorii ale luminii de la Descartes la Newton. Osbourne, Londra, 1967.

Shapiro, Alan E., ed. Lucrările optice ale lui Isaac Newton. Cambridge University Press, Cambridge, 1984.

Stavroudis, ON Optica razelor, fronturilor de undă și causticii. Academic Press, New York, 1972.

Weinstock, Robert. Calculul variațiilor. Dover, New York, 1974, (publicat inițial, 1952).

Whittaker, Edmund T. O istorie a teoriilor eterului și electricității. Harper & Row, New York, 1960.

Prodlems

Secțiunea 1.1 Idei și observații timpurii

1. Identificați câteva fenomene optice comune care ar fi putut fi observate de grecii antici și care nu pot fi explicate prin cele trei legi ale geometricei! optica.

2. Reconstruiți dovada geometrică a lui Hero a legii reflexiei în dimensiunile t/iree, luând în considerare punctele virtuale Ov care se află pe interfața de reflectare, dar nu neapărat în planul de incidență.

3. Următoarele date au fost raportate de Ptolemeu după studiile sale de refracție:

5. Folosind legea propagării rectilinie, descrieți umbra lunii pe pământ în timpul unei eclipse în termeni cantitativi. Diametrele medii ale soarelui și ale lunii sunt de 1.390.600 km și, respectiv, 3.476 km, în timp ce distanța lor medie față de pământ este de 149 x IO6 km și 38 x IO4 km.

6. Folosind expansiunea seriei de puteri pentru sin θ și sin θ', determinați următorii doi termeni care acționează ca corecții la forma lui Kepler a legii de refracție (adică θ' = Nθ + termeni de corecție). Cum se compară aceasta cu relația Ptolemy5S? Aflați valoarea lui θ dincolo de care corecțiile sunt mai mari de 10 la sută din θ'.

θ 10°20°30°40°50°60°70°80
θ' 8°15.5°22.5°29°35°40.545.550

Folosind legea sa, determinați constantele a și b. Folosind adevărata lege de refracție, determinați N. raportul indicilor de refracție ai celor două medii, la o precizie compatibilă cu datele.

4. Discutați mecanismul prin care camera obscura este capabilă să producă o imagine. Pentru un astfel de dispozitiv,

care are o dimensiune față-spate de 10 cm, derivă o expresie pentru mărire (definită ca dimensiunea imaginii împărțită la dimensiunea obiectului) în funcție de distanța obiectului. Cum se schimbă această

relație dacă interiorul camerei este din sticlă solidă, un material al cărui indice de refracție este de 1,5 ori mai mare decât cel al aerului?

Secțiunea 1.2 Modelele de particule

7. Newton credea că, dacă lumina ar fi o undă, atunci, similar undelor sonore, ar difracta în jurul marginilor obstacolelor (ceea ce face). Estimați dimensiunile relative ale modelelor de difracție a sunetului în comparație cu modelele de difracție optică.

8. Obțineți o copie a Newton5S Opticks și examinați raportul său despre „inelele lui Newton.55 Aceste date au fost folosite pentru a susține modelul partide pentru lumină. Identificați acele aspecte ale experimentelor sale care ar fi putut fi folosite și pentru a susține modelul valului. Folosiți datele lui Newton pentru a determina lungimea de undă a luminii în experimentul său.

9. Stabiliți cum a măsurat Romer viteza luminii din observațiile sale asupra lunilor Jupiter5S. Folosind datele Romer5S, determinați valoarea lui pentru viteza luminii.

10. Folosiți principiul Fermafs așa cum este exprimat de Ec. (1.7) pentru a dovedi legea reflecției.

11. În text am demonstrat legea refracției folosind principiul Fermafs luând în considerare căile virtuale care au fost identificate cu lungimea deviației de-a lungul interfeței în planul de incidență. Rededuceți legea de reflexie considerând ε o deviație unghiulară aplicată la θ, unghiul de incidență.

12. i Luați în considerare calea de propagare a Iluminii de la P la P', inclusiv reflectarea dintr-o oglindă sferică, așa cum se arată în Fig. 1.32. Fie P' în centrul de curbură al oglinzii, cu raza R, iar P pe axa z. Utilizați principiul Fermafs pentru a găsi calea adevărată și arătați că OPL este o cale maximă pentru z > R și o cale minimă pentru z < R.

13. Punctul C este în centrul unei sfere reflectorizante cu raza R (vezi Fig. 1.33).

(a) Găsiți valorile a pentru care segmentele de linie PO + OP' vor fi căi reale ale razelor Iight de la P la P1 prin reflexie la O.

(b) Găsiți o expresie analitică pentru pătratul OPL în funcție de a.

(c) Trasează pătratul OPL în funcție de a,

arătând cantitativ valorile extreme ale (OPL)2 și ale valorilor corespunzătoare ale α. /

14. În orice punct al unui pământ ideal sferic, puteți identifica un plan imaginar care este tangent la sfera pământului. Aceasta definește

geometria! orizont. Folosind acest concept, poate fi calculată o adevărată oră de apus. Explicați în

Fig. 1.52

termeni calitativi, folosind principiul Fermafs, de ce ora observată a apusului este de fapt mai mare decât ora reală a apusului.

15. Considerăm o serie de interfețe plane toate paralele (vezi Fig. 1.34). La prima, indicele se modifică de la n_0 la H1; la al doilea, de la n_1 la n_2; la cu, de la n_{m-1} la n_m; și așa mai departe. Fie θ_m unghiul de refracție la acea interfață și θ_{m-1} unghiul de incidență acolo.

Să se arate că aplicarea repetată a lui Snelfs Iaw dă «o $\sin \theta_0 = n_m \sin \theta_m$.

16. Considerăm un caz de propagare a Iight în două dimensiuni în care n este doar o funcție a lui z; $n = n(z)$. Luați în considerare elemente diferențiale dz în care un incrément de

Fig. 1.54

Problema 55

Fig. 1.35

calea fizică este ds (vezi Fig. 1.35). În acest element, θ_z este unghiul pe care raza îl formează cu axa z și $\sin \theta_z = dx/ds$.

j(a) Folosind SnelFs Iaw (care poate fi derivat din principiul lui Fermat, așa cum am arătat), demonstrați că

$$n(z) \sin \theta_z = n_0 \sin \theta_0$$

unde n_0 și θ_0 sunt măsurate la $z = 0$.

z/√(b) Arătați că

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + 1 = \frac{n^2(z)}{n_0^2 \sin^2 \theta_0}$$

Ce se întâmplă când partea dreaptă a acestei ecuații este egală cu unitatea?

Această ecuație oferă panta razei în terras de n(z) și condițiile inițiale la $z = 0$. Poate fi

integrat pentru a obține $z = z(x)$ sau $x = x(z)$ ca equa-

țiunea razei.

ì? (c) Aflați ecuația razei când $n(z) = a + bz$ dacă raza trece prin origine la un unghi de înclinare θ_0 care este I mai mic de 90°.

(Atenție: x nu va fi o funcție cu o singură valoare a lui z când b este negativ.)

Secțiunea 1.3 Modelele unde

17. Pentru fiecare dintre următoarele numere complexe z (unde a, b și c sunt numere reale), găsiți partea reală, partea imaginară și reexprimați numărul în forma | z | eiψ: z = (a + ib)~1 ; z = (a + ib)2; z = iaeιc; z = (1 + i)aeic; z = a + 1/ib + ic; z = (i/2)b

18. Ecuația undei, Ec. (1.16), a fost derivată dintr-o luare în considerare a particulelor discrete de masă m separate de distanța b și supuse forței de restaurare — Cx. Viteza undei este v = cu/C/m. Arătați că în limitele b → 0, cu masa pe unitate de lungime (densitatea masei) apropiindu-se de μ, pătratul vitezei se apropie de T/μ, unde T este tensiunea din șirul de particule, acum continuă.

19. Deduceți o expresie pentru energia cinetică a uneia dintre particulele din lanțul din Fig. 1.13 în funcție de timp. Faceți același lucru pentru energia potențială în funcție de timp. Arătați că soluțiile formei de ecuație. (1.20) Înseamnă la o propagare a energiei mecanice totale.

20. Determinați forma soluțiilor la ecuația de diferență 1.14. Încercați undele de armonie cu r = nb. Aici n este un număr întreg, deoarece unda are semnificație doar la locația uneia dintre mase. Găsiți o relație între ω și κ pentru această undă.

21. O perturbație sferică care se propagă departe de o sursă la origine cu viteza v se constată că are valoarea p0(t) la o rază r = a. Aflați perturbația p(r, t) pentru r ≠ a și pentru ail t. Repetați acest calcul cu aceeași sursă mutată acum în r' ≠ 0, astfel încât pe o sferă de rază a în jurul r' perturbația să aibă valoarea p0(t). Găsiți p(r, t) pentru toate r și t.

22. Demonstrați că Ar ~1/2 cos(ωt — kr) este o soluție a ecuației de undă pentru r > 2π/k, care corespunde unei unde cilindrice care se îndepărtează de o sursă de linie cu viteza ω/k.

Identificați care dintre următoarele funcții s-ar califica hiatematic drept soluții de propagare a perturbațiilor la ecuația undei:

P = P1(vt — z); P = P2(vt + z);

P = P3(vt -z)3; P = PJfvt - z)2 + z2]'1;

P = P5[vt-(z-z0)]-1; P = P6 exp[-(υt - z)2];

P = P0[cos(ωt — kz) + cos(ωt + kz)].

24. Pentru cele două cazuri care urmează, exprimă faza unei unde Iight sferice sub forma la — br, cu t în secunde și r în nanometri.

(a) O undă a cărei lungime de undă este de 500 nm care se deplasează printr-un mediu cu un indice de refracție egal cu 1,5.

(b) O undă a cărei frecvență este de 1015 Hz în vid.

56 Natura luminii

25. O undă plană sinusoidală de frecvență unghiulară ω se propagă în direcția vectorului 3x + 3ÿ + 4î. Are amplitudinea maximă la origine. Scrieți expresia pentru fază în funcție de timp și poziție. Identificați ecuația suprafeței de fază constantă care trece prin origine.

câmpurile nu se schimbă în timp. Potențialul electrostatic poate fi determinat dintr-o distribuție arbitrară a sarcinii p(r) până la

26. Cât de departe trebuie să fim de o sursă punctiformă care emite Iight la λ = 600 nm, astfel încât câmpurile optice rezultate să devieze de la undele plane cu I mai puțin de o opteme de lungime de undă / pe un punct iluminat de 1 cm în rază?

K , 27.,Folosiți construcția lui Huygens pentru a demonstra că va exista

nu poate fi transmisă, unde se propagă dacă sin θ > v/v'.

Secțiunea 1.4 Modelul undelor electromagnetice

28. Demonstrați prin calcul direct că media de timp a

cos2</> este egal cu | unde φ este o funcție liniară arbitrară a timpului. / .•√Λ

/ .*'¿A , (ee-₫(ɑ-'

29. Să se arate că media de timp a lui E2 este echivalentă cu

(E*E)/2 dacă E = E0 exp(i(ωt — kr)).

30. Demonstrați următoarea identitate: Vx(A1-A2) = A2-(VxA1)-A1-(VxA2).

31. Demonstrați identitatea produsului triplu vectorial: A1 x (A2 x A3) = A2(A1 • A3) — (A1 • A2)A3.

32. Dat un vector F în coordonate dreptunghiulare, Fx& + F1, y + Fz è . Scrieți componentele în coordonate dreptunghiulare ale lui V • F și VxF.

33. Evaluați gradientul lui r~1 unde gradientul lui f (r) este definit ca V/(r).

34. Fie f (r) = (constant) să definească o suprafață în spațiul tridimensional. Să se arate că Vf evaluată la r = r0 este perpendiculară pe acea suprafață în punctul r0.

35. La y = 0, x = b, găsiți vectori unitari perpendiculari pe

(a) x + y + z = 1;

(b) $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$;

(c) $x^2 + y^2 = az$.

În fiecare caz, faceți o schiță a soluției dvs.

κ 36) Folosiți teorema lui Gauss pentru a calcula fluxul net al lui r^2/r printr-o suprafață sferică cu raza a în jurul originii.

37. Demonstrați că o mărime scalară, potențialul electrostatic V, poate fi definită astfel încât E = — VK. Aceasta asigură că E îndeplinește legea lui Faraday, cu condiția ca

Demonstrați acest rezultat printr-o aplicare a legii lui Gauss.

38,/ Determinați potențialul electrostatic care este asociat cu un dipol la origine. Un dipol este format din sarcini pozitive și negative egale (+ q la z = + a/2 și — q la z = — a/2, unde a este mult mai mică decât distanța r până la punctul de observație). Exprimați răspunsul în termeni de moment dipol p = qaz și vectorul r. Din acest rezultat, găsiți câmpul electric la r.

39. Un dipol dinamic este.găsit la origine cu momentul său dependent de timp dat de p = qaeιω'i. La o poziție r dependența de timp a acestei variații este înregistrată cu o întârziere cauzată de timpul finit de propagare r/c de la origine la punctul de observație. Pentru o singură încărcare qeιω, poate fi definită o potențială „întârziată”.

V =

q Γ- Λ r' \

----- exp ιω | t----

$4\pi\varepsilon_0 r$ yc Ì

unde r’ este distanța de la sarcină până la punctul de observare. Utilizați aceste informații pentru a calcula potențialul întârziat pentru dipolul dinamic în funcție de r (unde r > a).

40. Demonstrați că densitatea de energie asociată câmpului electrostatic uniform E_0 într-un condensator cu plăci paralele este $\varepsilon_0 E$^/2 luând în considerare munca efectuată de o baterie care încarcă condensatorul la tensiune constantă.

41. La o anumită regiune din spațiu, câmpul electric se găsește a fi $(E_0/\alpha^2)(x^2 i + y^2 y + z^2 z)$. Determinați densitatea de sarcină locală.

42. Cum ar trebui modificate ecuațiile lui MaxwelP dacă ar exista monopoluri magnetice?

43. Să presupunem că soluțiile la ecuațiile undelor electromagnetice au forma Ec. (1,52). Prezentați un argument similar cu cel pe care îl conduce la Ec. (1.53) în care E și B sunt arătate a fi perpendiculare, pornind de la ecuația Maxwell IV.

44. Deduceți ecuația de undă pentru B Pornind de la ecuația Maxwell IV.

Probleme 57

45. Ce-ar Eq. (1.48) arata ca daca V•E ≠ O?

46. Să se arate că unda plană dintr-un câmp vectorial F este transversală dacă V •F = O și este longitudinală dacă V × F = 0.

47. O undă electromagnetică poartă impuls pe lângă energie. Pornind de la Caracteristicile vectorului Poynting, deduceți o expresie pentru impulsul pe unitate de suprafață pe unitatea de timp care este livrat pe o suprafață cu incidență normală, cu condiția ca suprafața să reflecte 50 o/o din densitatea fluxului optic incident. Care este mărimea ratei de livrare a densității de impuls într-un fascicul de 1 W/cm2?

48. Demonstrați că vectorul Poynting este egal cu densitatea de flux optic. (Începeți prin a forma divergența dintre

S.)

49. Un bec IOO-W Iight se află în geometria! centrul unei camere cubicai cu laturile de 3 m. Găsiți energia totală medie în timp din cameră din becul, presupunând că nicio lumină nu este absorbită sau reflectată de pereți. (Pereții sunt perfect transparenți.)

50. Determinați mărimea inducției magnetice într-o undă electromagnetică care poartă o densitate de putere de 100 mW/cm2. Cât de mult curent ar fi necesar într-un fir drept lung, astfel încât o inducție magnetică de aceeași magnitudine să fie generată la o distanță de 1 mm de fir?

51. Densitatea fluxului la 1 m de la o sursă punctuală este de 15 mW/cm2. Determinați fluxul total emis de sursă. Calculați densitatea fluxului la o distanță de 2 m de sursă.

52. Deduceți o expresie pentru densitatea fluxului în termenii vectorului Poynting S(r) în funcție de distanța radială r de la o sursă punctuală a cărei Forță este A (unde A are dimensiunile câmpului electric înmulțit cu Iength). Repetați calculul pentru o sursă de linie infinit lungă unde r este distanța radială departe de sursă și A are dimensiunile câmpului electric ori (lungime) lz2.

53rjA Fascicul luminos cu secțiune transversală circulară cu un diametru de 5 mm transportă 200 mW de putere. Grinda intersectează un val, astfel încât unghiul dintre perete și grinda de intrare este de 20o. Determinați cantitativ dimensiunea și forma punctului iluminat și calculați densitatea de putere pe perete presupunând că fasciculul este uniform.

54. În experimentul cu oglindă rotativă a lui Foucault, care ar trebui să fie distanța dintre oglinda rotativă și oglinda retroreflectorică dacă oglinda ar avea o viteză unghiulară de 100 rad/s și s-ar dori o deviere de Io pentru reflexia de întoarcere?

55. Cum este posibil ca o rețea de sârmă, așa cum a fost folosită de Hertz, să polarizeze o undă electromagnetică cu o lungime de undă de 5,4 m?

2 Optica interfețelor planare

Am văzut că legile fundamentale ale geometricii! optica, inclusiv cele două care implică interacțiune cu materia (legile reflexiei și refracției), pot fi derivate fie din principiul lui Fermaf, fie din construcția lui Huygens. Niciuna dintre aceste abordări, totuși, nu este capabilă să ofere informații despre fracțiunea de energie radiantă care ajunge în fasciculele reflectate sau transmise. Avem nevoie de o teorie mai completă pentru a descrie aceste fenomene, precum și interacțiunea Luminii cu materiale absorbante, mai degrabă decât transparente.

În principiu, putem pleca de la teoria cuantică a materiei, dar este mai practic să parametrizăm comportamentul mediului în prezența câmpurilor electrice și magnetice. Odată ce parametrii sunt identificați teoretic sau experimental, teoria electromagnetică a Iight este suficientă pentru a explica caracteristicile de reflexie și refracție ale unei interfețe. În cele din urmă, teoria cuantică este necesară pentru a justifica detaliile acestor parametri.

Cu interfețele plane, geometria modificării direcțiilor razelor și a fronturilor de undă este deosebit de simplă. Descrierea modificărilor de amplitudine și fază ale câmpurilor optice este subiectul opticii interfețelor plane.

2.1 Țesături ușoare în Motter

Punctul de plecare pentru tratarea Iight-ului în materie din perspectiva electromagnetică este cuprins în cele patru ecuații ale lui Maxwell, pe care le amintim aici pentru comoditate:

I VE = - εo (139)
II VB = O (1,41)
III ca VxE= ôt (1,43)
IV V × B = μ0l J + ε0£Ê\ ôt /(1-45)

Forma microscopică pentru aceste ecuații a fost mediată pe un element de volum ΔYz^ astfel încât să se elimine variațiile dramatice datorate structurii atomice a materiei. Astfel, aceste ecuații sunt deja în termeni de câmpuri macroscopice E și B și densitatea de sarcină macroscopică p și densitatea de curent J.

Trebuie să separăm contribuțiile la termenii sursă p și J care provin din sarcinile statice și în mișcare asociate cu electronii și ionii materiei. Făcând acest lucru, putem grupa influența materiei în parametri ușor de manevrat și, în același timp, putem produce o formă de ecuații Maxwell din care poate fi derivată o ecuație de undă.

Aceasta ne va spune cum se propagă unda electromagnetică în materie și cum caracteristicile propagării depind de parametrii din ecuațiile MaxwelFs.

Trebuie să ne amintim că câmpurile despre care vorbim sunt câmpuri optice oscilante de înaltă frecvență și că răspunsul electronilor și ionilor trebuie luat în considerare la aceste frecvențe înalte. Acest lucru este ușor de uitat pentru mulți studenți, deoarece o mare parte din teoria electromagnetică introductivă se referă la câmpurile electrice și magnetice statice. Parametrii materialelor sunt funcții ale frecvenței optice. În termeni mecanici cuantici, aceasta înseamnă că excitațiile elementare ale materiei depind de energiile fotonilor individuali. Dacă nu se specifică altfel, vom presupune că lumina luată în considerare este monocromatică cu frecvența v — ω/2π, reprezentând astfel fotoni de energie hv.

A. Sarcini și curenți legati

1. Polarizare. Regiunile macroscopice ale materiei pot conține o sarcină netă sau o densitate de curent. De exemplu, o garnitură de pith poate fi încărcată electrostatic, sau un conductor metalic poate transporta un curent de macroscopie. Acestea se numesc taxe gratuite și, respectiv, curent liber. Ele ar trebui să fie distinse de sarcina legată și curentul legat. Argumentul pentru taxa legată este rezumat după cum urmează.

O moleculă dată poate avea o sarcină netă; dacă da, contribuie la densitatea de încărcare gratuită pf. Indiferent dacă molecula are sau nu o sarcină netă, aceasta poate fi polarizată; adică poate exista o separare relativă a sarcinilor pozitive (nuclee atomice) și a sarcinilor negative (electroni). Fie r+J vectorul de poziție al celei-a sarcini pozitive (+ ρj) în raport cu, să zicem, centrul de masă al moleculei, iar r_i să fie vectorul de poziție al celei-a sarcini negative (-qi). Atunci momentul dipolar electric al moleculei este definit a fi

P = Σ‰•-∑^-i (2.1)

J i

Na+ CΓ

-<----P

-*—P

Fig. 2.1 (a) Dipol permanent.

(b) Atom nepolarizat (dipol zero).

(c) Atom polarizat (dipol indus).

(A)

(b)

(c)

În imaginea mecanică cuantică a unei molecule, vectorii de poziție r+j și r trebuie să reprezinte toate regiunile spațiului în care există o anumită probabilitate de a găsi un electron sau un nucleu. Nu putem identifica în mod unic poziția exactă a fiecărei schimbări de punct. Această problemă poate fi rezolvată prin interpretarea contribuției electronilor ca integrală:

- | e | ∫∫ ∫ P(r)r ¿y

L4' ' HiPVdf

unde – | e | este sarcina unui electron și P(r) este probabilitatea mecanică cuantică de a găsi un electron în poziția г. O interpretare similară poate fi făcută pentru ∑ qjr+j, dacă este necesar.

În general, facem distincție între dipolii electrici permanenți, așa cum este cazul unei molecule de NaCl, care este compusă din doi ioni încărcați opus, și dipolii induși rezultați din sarcina deplasată într-un câmp extern. Aceste două cazuri sunt ilustrate în Fig. 2.1.

Vectorul de polarizare P este definit ca fiind momentul dipol mediu pe unitate de volum:

P=1Y p

(2,2)

unde suma este peste toți dipolii din volumul macroscopic mic, dar microscopic mare AУ".

Sarcina legată este definită ca fiind sarcina macroscopică în materie rezultată din prezența polarizării macroscopice P. Când P este constant, fiecare element de volum macroscopic conține același număr de sarcini legate pozitive și negative, iar densitatea sarcinii legate pb este zero. Când P(r) variază spațial, poate apărea o densitate de încărcare legată diferită de zero. Acest lucru este prezentat schematic în Fig. 2.2α. Momentul dipol mediu <p> crește treptat de la zero în planul A la o valoare netă în direcția + x în pianul B. Vedem că planul B tinde să taie prin niște dipoli, în timp ce planul A nu. Există astfel o sarcină negativă (legată) netă în volumul dintre planurile A și B.

Formula generală pentru densitatea de sarcină legată este

pb= -V•P≡

∂Px 8Py cPz dx dy ÕZ

(2,3)

Nu vom deriva Ec. (2.3) aici, dar în schimb o vom face plauzibilă prin referire la Fig. 2.2. Partea (¿>) a figurii arată dipolii moleculari individuali așezați,

IP = P0

(A)

P(x)

(Po)

Fig. 2.2 Ilustrarea conceptului de densitate de sarcină legată și relația sa cu momentul dipolului pe unitate de volum dependența spațială a momentului dipol pe unitate de volum.

producând o polarizare uniformă P0 în interiorul unei plăci dielectrice. Funcția P(x) dă mărimea lui P și este schițată în partea (c). Apoi VP = dP/dx este schițat în partea (d), care constă din două „tepi” iocalizate. Din partea (h) vedem că există o densitate netă de sarcină de suprafață pozitivă pe suprafața dreaptă și o sarcină de suprafață negativă pe partea stângă. În acest exemplu, vârfurile reprezintă densitatea de sarcină de suprafață legată.

2. Curentul legat. Curentul legat rezultă din mișcarea sarcinilor legate în materie. Densitatea de curent rezultată este

= J_VZ dr+i dr~ib Δr∑ \ q+idt q~idt

dP

dt

(2,4)

În materialul magnetic, trebuie să se țină seama și de magnetizarea M, care este definită ca fiind momentul dipolului magnetic mediu pe unitate de volum:

M - —ɪ У m

(2,5)

Magnetizarea materialului provine din curenții atomici care rezultă fie din rotirea electronilor, fie din mișcarea electronilor în interiorul atomilor. Telationship-ul general este

Jm = V × M

(2,6)

Ca și în cazul Eq. (2.3), vom oferi un argument de plauzibilitate pentru a justifica această expresie. Să considerăm o secțiune transversală pătrată a unui material care posedă un moment magnetic net de-a lungul axei z, ca în Fig. 2.3α. Curenții atomici care dau naștere momentului net se anulează peste tot, cu excepția suprafeței. Dacă o regiune adiacentă a materialului are o magnetizare diferită, atunci curentul de circulație în jurul acelei regiuni va diferi ca mărime față de prima regiune (Fig. 2.3b).

În acest exemplu, VxM = {dMJdy)x., care este legat de Jm = Jmx prin Ec. (2.6). Pentru a vedea acest lucru mai clar, luați în considerare aproximarea momentului dipol magnetic al uneia dintre regiunile mici, mz — IAxAy. Într-o regiune magnetizarea este

cjcjcjcjcj cjcjcjcjcj CJCJCJCJCJ CJ Cr CJ CJ CJ

f⅛. A." Ilustrație a conceptului de densitate a curentului de magnetizare și a relației sale cu dependența spațială a momentului magnetic pe unitate de volum.

64 Optica interfocalelor plane

Mz

mz ~ J_ à'F' ~ àz

iar derivata cu privire la y este aproximativ dMz ~ ài dy ~ àyàz

Dar modificarea curentului de suprafață este, din Fig. 2.3h, ài = Ix

prin urmare,

dM2~Jx_ dy ~~ àyàz

(2,7)

(2,8)

(2,9)

Când orientarea și variația spațială a lui M sunt mai complicate, atunci sunt necesare celelalte componente ale lui V × M pentru a specifica densitatea completă a curentului de magnetizare.

Această modificare a Eq. (2.4) Înseamnă la cea mai generală formă pentru densitatea de curent legat,

Jb = — + VXM (2,10)

dt

Încărcările și curenții gratuiti sunt apoi definiți de diferențe

Pf = P-Pb (2•11)

Jz = J-Jb (2,12)

3. Ecuații MaxwelFs în materie. În Ec. (2.11) și (2.12), am Separat densitatea totală p și densitatea de curent J, care apar în ecuațiile Maxwell I și, respectiv, IV (Ecuațiile 1.30 și 1.45), în părți care decurg din structura materiei și părți rezultate din liber. sarcini și curenți. Acest lucru face posibilă clarificarea rolului materiei în definirea câmpurilor electromagnetice.

A. Ecuații de câmp. Folosind ecuațiile. (2.11) și (2.3), ecuația I a lui MaxwelF (Legea lui Gauss pentru E) devine

1 ∩ V • P

V • E = — (pʃ + pb) = —---- (2.13)

εo εo εo

Prin Ecs. (2.12) și (2.10), ecuația Maxwell IV (versiunea curentă de deplasare a legii lui Ampere) se modifică de asemenea:

VxB = μ0^J f + Jb + ε0 —

A dp V7 ∂E \

= 4J/+dΓ +vx M + ε°7ζ) (2Л4)

Scopul nostru este să le transformăm în forme care să semene cu ecuațiile Maxwell I și IV. Acest lucru îl putem face prin introducerea deplasării electrice D:

D ≡ ε0E + P (2,15)

Am lăsat bara peste E în Eq. (2.15). De acum înainte se înțelege că E și B se referă la câmpuri de macroscopie. Introducem, de asemenea, câmpul magnetic H:

B

H ≡ — - M (2,16)

μ0

Ecuația (2.13) poate fi scrisă atunci

V•D = pf (2,17)

şi Eq. (2.14) poate fi scris

∂D

VXH = Jz + - (2,18)

Alături de ecuațiile Maxwell II și III (Legea lui Gauss pentru E și legea lui Faraday), care rămân neschimbate, Ecs. (2.17) și (2.18) oferă cele patru ecuații Maxwell în prezența materiei:

I VD = pf(2,17)
II VB = O(1,41)
III VxE = —— õt(1,43)
IV ∂D v×h = jz + -(2,18)

Ecuațiile sursei conțin acum doar taxe și curenți gratuiti.

b. Ecuații de energie. În prezența materiei devine necesar să se redefinească densitatea energetică ca

1/ = | [D•E + B•H] (2.19)

Vectorul Poynting este acum

S = ExH (2,20)

B. Funcții de răspuns

1. Parametrizarea materiei. Pentru a continua cu dezvoltarea unei ecuații de undă pentru Iight în materie, trebuie să exprimăm D și H ca funcții ale lui E și B. Acest lucru este deosebit de simplu dacă relațiile sunt locai, izotropie și liniare.

Răspunsul mediului la un câmp aplicat este localizat dacă răspunsul poate fi determinat examinând câmpul aplicat în același punct. În cazul câmpului electric, răspunsul poate fi evaluat prin polarizare. După cum se arată în Fig.

Local Nonlocal

Flg. 1.4 Reprezentarea schematică a parametrizării Caracteristicile materiei care sunt importante în identificarea parametrilor materialelor. Aici ele sunt exprimate ca relații între E și P.

2.4α, polarizarea depinde de natura câmpului electric dintr-o regiune din jurul punctului de interes în mass-media nelocală. Aceasta este o complicație care este mai importantă în sistemele neomogene.

Într-un mediu izotropic, direcția câmpului aplicat este păstrată în răspuns. După cum se arată în Fig. 2.4h, direcția de polarizare poate fi diferită de câmpul electric din materialul anizotropic. Acest lucru are consecințe importante atunci când se iau în considerare caracteristicile de polarizare ale undei de lumină pe măsură ce se deplasează prin material. Vom discuta acest lucru în detaliu în Capitolul 9. Aici ne vom ocupa doar de sistemele izotropice în care direcția câmpului aplicat nu este importantă.

Dacă, în plus, mediul este liniar, atunci magnitudinea răspunsului este direct proporțională cu magnitudinea stimulului. După cum se arată în Fig. 2.4c, un mediu neliniar poate demonstra câștig. Această

caracteristică importantă a opticii nonlin-ear este baza funcționării laserului. Frecvent, neliniaritatea este cuplată cu anizotropia.

Pentru locație, izotropie, caz liniar, polarizarea este legată de câmpul electric total prin

P = ⅞XE   (2,21)

unde χ este susceptibilitatea electrică. Aceasta înseamnă că

D = ε0E + P = ε0(l + χ)E

Pentru a simplifica notația, sunt introduse frecvent două funcții alternative: Permitivitatea mediului este

2.1 Unde uriașe în metrul 67

ε = εo(ɪ + X)   (2,22)

care în sistemul SI are unitățile de ε0, C2N~1m^2. Alternativ, se poate utiliza permisivitatea relativă sau funcția dielectrică

'   —*-

ε   \ 4

κ = - = (l+x)   <(2,23)

deci

Acesta este un număr adimensional. Oricare dintre aceşti parametri de material sunt funcții ale frecvenței optice. Relația dintre deplasare și câmpul electric total devine

D — ε0κE = εE   (2,24)

În materialul magnetic care se conformează simplificărilor noastre, relația dintre magnetizare și câmpul magnetic este

M = χmH   (2,25)

astfel încât

в = μ0(H + M) = μ0(l + χm)H.

Dacă definim permeabilitatea ca

μ = μ0(l + Xm)   (2,26)

care are unități de μ0, N sec2 C-2 sau permeabilitatea relativă

κm = μ/μ0 = 1 + Xm   (2-27)

inducția magnetică B va avea o conexiune simplă cu intensitatea câmpului magnetic H.

$B = \mu_0 \kappa_m H = \mu H$ (2,28)

Parametrii dependenți de material χ și χm sunt, în general, numere complexe. Aceasta înseamnă că D poate fi defazat cu E, iar B poate fi defazat cu H.

În abordarea aleasă aici, toate proprietățile mediului sunt înglobate în parametrii complecși χ și χm. O procedură alternativă ar fi să se considere susceptibilitatea electrică ca fiind un număr real. Partea defazată sau imaginară a răspunsului ar trebui să fie asociată cu un alt parametru dependent de material. Acest lucru se realizează de obicei prin introducerea legii lui Ohm și tratând mișcarea electronilor liberi în mediile metalice ca o contribuție la densitatea curentului liber.

2. Ecuații de câmp reformulate. Caracteristicile mediului sunt acum conținute în parametrii χ (sau e) și χm (sau μ), care sunt funcții ale frecvenței optice. Acestea includ informațiile necesare pentru a descrie dispersia, absorbția și răspunsul magnetic de înaltă frecvență. Vom lua în considerare problemele în care nu se găsește încărcare liberă sau curent liber. Doar sarcina și curentul legat, care sunt asociate cu electronii și ionii atomilor din mediul optic, apar în ecuațiile dependente de sursă. Cu toate acestea, Ecs. (2.17) și (2.18) sunt simplificate

în aceste condiții. Deoarece sursele legate au fost reexprimate în termeni de câmpuri asociate, ecuațiile Maxwell reformulate arată ca Eq. (1,46):

εV • E = 0

II

VB = O

III

VxE=-

∂B

õt

(2,29)

IV

ÕE

VXB = με — r Õt

C. Undele plane în materie

1. Ecuația undelor. Prin asemănarea dintre seturile de ecuații. (2.29) și (1.46) putem nota imediat ecuațiile de undă pentru E și B în materie.

/)2F r52R

V2E - με = O; V2B - με ~τ = O   (2,30)

l0t2 õt2

Aceste ecuații sunt valabile pentru D și H. Ele diferă de ecuațiile din spațiul liber prin substituții

și

μ0→ μ

unde noile valori sunt mărimi complexe.

Soluții de unde plane la ecuațiile. (2.30) există sub forma ecuațiilor. (1,52).

E = E0?(ωί_Iί·Γ+<PE)   (2,31)

B = B0ei<ωt^k'r+v≡>

Putem folosi în continuare comenzile rapide ale operatorilor Ecs. (1,29) și (1,30). Când se aplică la Eq. (2.30), găsim

k2 — μεω2

Aceasta arată că κ este, în general, complex.

Definim un indice complex de refracție

(2,32)

ii : - :r- /   n2≡(n~ ÍZ)2 ≡ μεc2 =

□ ■   /2o εo

'' astfel încât ----

k = ñ —

c

(2,33)

(2,34)

Unii autori scriu ñ = n(l — iκ), unde κ se numește indicele de atenuare. Alții folosesc o dependență de timp e~ιωt, care schimbă semnul lui i în toate ecuațiile noastre. De exemplu, indicele de

refracție ar fi scris n + i/. Totuși, n și Z ar fi aceleași funcții ca cele definite aici.

Aplicarea comenzilor rapide ale operatorului la Eq. (2.29) III, ajungem la o relație între E și B, similară cu Eq. (1,53).

κ XE ñ

B =-----= -â × E

ω c

(2,35)

Astfel, E și B sunt încă perpendiculare între ele și reciproc perpendiculare pe direcția de propagare â. Dar nu mai sunt în fază unul cu celălalt pentru cel mai general caz care încă îndeplinește restricțiile noastre de localitate, izotropie și inearitate.

2. Atenuare. În cazurile în care κ este o mărime complexă, așa cum este pentru metáis și alte medii absorbante, câmpurile optice se atenuează cu distanța. Înlocuirea ecuațiilor. (2.34) în prima dintre ecuațiile. (2.31) (cu φE = ϕ) arată că

E = E0exp —/ —S•r

c

(ω a ωt — η — s · r

c

Presupunând că direcția de propagare este astfel încât

ST - r

aceasta duce la simplificare

E = E0 e~r,seiω<,~nr,c)

Unde

c _ A0

Âœ 2π/

(2,36)

(2,37)

(2,38)

este adâncimea s/cin clasică și este o măsură a lungimii pe care lumina o va pătrunde prin mediul de atenuare. (A0 este lungimea de undă a luminii măsurată în vid.)

3. Dispersia. Dacă κ este pur real, așa cum este pentru mediile transparente optic, în conjuncție cu valorile reale pentru ε și μ, atunci Ec. (2.37) devine

E = E0 eiωi,~nrlci (2.39)

Unda electromagnetică descrisă prin această formulă se propagă cu o viteză de fază de

(2,40)

c 1

V = - — —=

ny/με

Aceasta confirmă definiția noastră a indicelui de refracție și arată consistența

teoria electromagnetică cu ideile timpurii care înconjoară viteza luminii în materie.

Deoarece proprietățile optice ale unui mediu transparent sunt funcții ale frecvenței, unghiul de deviație descris de legea de refracție a lui Snel trebuie, de asemenea, să se schimbe cu frecvența. Această caracteristică a materiei se numește dispersie.

4. Energia electromagnetică într-un mediu. Știm că, în general, E și B nu vor fi în fază unul cu celălalt. Pentru a vedea acest formular explicit

B = — ă × E0e~r,ielφ, φ = ω(t — nr/c) (2.41)

c

care poate fi scris ca

eu ñ eu

B -'-s × E0e-,zV<≠^^ (2,42)

c

Unde

... /

tari (pEB = -n

Ecuația (2.20) este o expresie a vitezei de propagare a energiei pe unitatea de suprafață datorită undei plane optice din mediu. Trebuie să avem grijă în Calcularea produsului vectorial. Pentru a face acest lucru, exprimăm E și H sub formă de trigonometrie. În cele ce urmează

vom presupune că μ este real, o presupunere excelentă pentru majoritatea materialelor optice. Apoi,

H = — = — sx E°er/¿ cos(Φ ~ Φeb) a∏d E = E0e rlδ cos φ

Vectorul Poynting este

S = ɪɪɪ \ E0 \ 2e~2rlδ cos φ cos(</> — <p£B)s

Media de timp implică

<cos φ cos(φ — φ£B)> = <cos2 φ cos φEB + cos φ sin φ sin φ£B>

= ɪ cos <ρEB

Dar din moment ce tan φEB — ¿/η, atunci

η

cos φEB = ——

|η|

Prin urmare, media în timp

densitatea fluxului de energie în materie este

<S> = /---—e κrs

cμ 2

(2,43)

unde coeficientul de absorbție este „2 4πZ

¿ 7 A0

(2,44)

Există o decădere exponențială a semnalului optic cu r. Puterea optică este redusă la e~l din valoarea sa de pornire pe o distanță egală cu K~1. Rețineți că atunci când Z = 1, atunci K~1 = A0/4π, astfel încât pénétrația este cu aproximativ un ordin de mărime I mai mică decât A0-

În medii nemagnetice (deseori cazul) μ-μ0 și (cμ0)~l = cε0. Prin urmare

<S> = n ε | ≤ | E0 | ⅛ e

-Kr

(2,45)

unde termenii dintre paranteze ar fi densitatea fluxului de energie medie în timp în vid.

5. Proprietăți optice. Funcțiile n și Z față de frecvență (sau lungime de undă) reprezintă Caracteristicile unui mediu local, izotropic, liniar în teoria electromagnetică a luminii. Acestea pot fi măsurate prin observarea atentă a reflexiei și/sau transmiterii luminii printr-un eșantion din materialul de interes. Ele pot fi, de asemenea, calculate din teoriile microscopice ale interacțiunilor optice cu electronii și ionii materialului. Vom trata acest lucru mai detaliat în secțiunea 2.4.

Odată determinate, proprietățile optice pot fi tabulate pentru utilizare ulterioară în rezolvarea problemelor de proiectare optică. Aceste date sunt utile și ca verificări experimentale ale teoriei microscopiei. Din ambele motive, proprietățile optice ale materiei sunt importante.

Tabelul 2.1 oferă indici complecși de refracție pentru două materiale caracteristice. Proprietățile optice ale unui metal tipic sunt prezentate în Fig. 2.15a; acolo găsim o valoare mare a lui Z.

2.2 Reflectarea și transmiterea luminii la o interfață

În această secțiune, derivăm și discutăm coeficienții care descriu modificările în amplitudinea câmpului și iradierea la care este supusă Iight la reflectare și transmitere la o interfață între două medii având proprietăți optice diferite. În plus, vom demonstra încă o dată legile reflexiei și refracției (legea lui Snell).

Presupunem că există o interfață bruscă între două medii izotropie și omogene locale și liniare. În general, indicii de refracție pot fi complexi.

A. Condiții limită

Baza abordării electromagnetice a acestei probleme este stabilirea condițiilor la limită care impun restricții asupra relațiilor dintre câmpurile de pe ambele părți ale interfeței.

Tabelul 2.1. Proprietăți optice caracteristice

Lungime de undă (micrometre)	Siliciu topitASiliciumb
	ncn
0,28	1,494163,2445,230
0,30	1,487794,8943,938
0,32	1,482734,9833,272
0,34	1,478655,2343,018
0,36	1,475286,1472,976
0,38	1,472486,5100,881
0,40	1,470115,6190,341
0,42	1,468095.1300.191
0,44	1,466344,8240,130
0,46	1,464834,6080,093
0,48	1,463504,4540,069
0,50	1,462324,2810,055

0.52 1.461284.2070.042
0.54 1.460344.1120.035
0,56 1,459494,0490,029
0,58 1,458733,9870,025
0,60 1,458033,9330,022
0,62 1,457393,8920,019
0,64 1,456813,8540,017
0,66 1,456263,8160,015
0,68 1,455763,7820,014
0,70 1,45529.3.7550.012

„IH Malitson. J. Opt. Soc. A.m. 55, 1205, 1965.

b GE Jellison și FA Modine. Raportul Laboratorului Național Oak Ridge TM-8002, 1982.

c Partea imaginară a indicelui de refracție al silicei topite este atât de mică în acest interval de lungimi de undă încât este de obicei neglijată.

Sunt prezente patru ecuații ale lui MaxwelF! în formă integrală în Ecs. (1,38), (1,40), (1,42) și (1,44). După introducerea noastră a răspunsului materiei și a parametrizării sale pentru aproximarea liniară a izotropiei locale, aceste ecuații devin

εE • dA = 0

II ^B •dA = 0

(2-46)

E · ¿I = f

ôt

BdA

III

IV

-•dl = ~ μ ot

εE · dA

unde, în general, ε este complex. Vom presupune de acum încolo că μ este real.

1. Continuitatea componentei normale a lui εE și B. Luați în considerare regiunea geometrică în formă de „cutie de pastile” ilustrată în Fig. 2.5α. Înălțimea h este considerată infinit de mică. Aria jV este finită, dar arbitrară. Volumul stfh = ,F este infinit de mic. Din ecuația Maxwell am aplicat la această regiune pe care o avem

εEn dstf - 0

Deoarece h este foarte mic, nu există o contribuție finită la integrai din partea acestor părți. Ceea ce rămâne este

∫∫ εEn ds# +

32/1

∫∫ εEn dsé —

sai

∫∫ (εi-εin - ε2£2η) d⅞ = 0

já

unde ε1Eln și ε2E2n reprezintă componenta normală exterioară a deplasării Áeldsjust la stânga și la dreapta interfeței. Deoarece suprafața ,⅞ este arbitrară, suntem liberi să alegem o zonă suficient de mică pentru a ne asigura că En rămâne constant.

Putem concluziona că

εiEιn = ε2E2n (2,47)

Componenta normală a lui εE este continui de-a lungul interfeței.

Fi9. 2.5 Ajută la determinarea condițiilor la limită.

Aceeași derivație se aplică și lui B. Prin urmare

(2,48)

Bin - B2n

Componenta normală a lui B este de asemenea continue.

2. Continuitatea componentei tangenţiale a lui B/μ şi E. Consideraţi acum suprafaţa „în formă de panglică” prezentată în Fig. 2.5b. Lățimea h este infinitezimal de mică, iar lungimea ¿ este finită, dar arbitrară. Aria panglicii este neglijabilă deoarece h este foarte mic. Astfel, atunci când se aplică ecuația Maxwell IV pe această suprafață, partea dreaptă a ecuației va fi zero. Integrala de linie trebuie luată în jurul periferiei panglicii, dar capetele nu contribuie cu nimic.

Astfel tragem concluzia că

B j .\

) di = 0

V-2J.

unde Blf/μ1 și B2Jp2 sunt componentele tangențiale ale câmpului magnetic de ambele părți ale interfeței. Panglica este arbitrară, așa că putem alege o lungime suficient de mică pentru a evita variațiile în câmpurile de pe o anumită parte a interfeței. Prin urmare,

Bu B2t

μι μ2

sau, componenta tangențială a lui B/p este continuu de-a lungul interfeței. O derivație analogă produce

(2,49)

Eц — E2t

(2,50)

Deci Et, componenta tangențială a lui E trebuie să fie, de asemenea, continue pe interfață.

B. Legile Geometrica! Optică la interfețe

Fie interfața să se afle în planul xy, iar planul de incidență să fie planul xz așa cum se arată în Fig. 2.6. Câmpurile E și B pot fi rezolvate în componentele lor în planul de incidență și componentele lor y normale cu planul de incidență. Apar apoi două cazuri independente: cazul în care E este perpendicular pe planul de incidență (cazul σ) Cu B în planul de incidență și cazul în care E este în planul de incidență (cazul π) cu B perpendicular pe aceasta.

Dependența spațială a undelor plane care reprezintă fasciculele incidente, reflectate și transmise sunt e~ik 'τ, e~ik" 'r și, respectiv, eik' 'r. Vectorii de undă vor avea componente

κ

= (kx, O, kz) = ni —)(sin θ, O, cos θ)

(2.51a)

k" = (k", ky, k"J cu k"x2

+ k? + k"z2 = n2

2

(2.51b)

Fig. 2.6 Geometrie care stabilește convențiile pentru optica la o interfață: (a) E perpendiculară pe planul de incidență; (b) E paralel cu planul de incidență.

k' — (k'x, ky, k'z) cu

k'x2 + k'y2

+ k'z2

(2.51c)

unde ñ și ñ' sunt indicii complecși de refracție în cele două medii.

Cerințele de continuitate pentru părțile tangențiale ale lui E și B/μ de-a lungul interfeței la z — 0 iau apoi forma

Eteixkχ + Ete~iixkχ+yk** — E'te~iixk'x+yky,

Jl \ / R"\/ R'\ J∑r

_L | e-ixfcjc I / _L | gi(x<⅛ + ykj) — I_I | g-V⅛ + yfcy)

μ y   \м/   \ μ' /

Câmpurile Et, Et, Et, Bt, Bt și Bt din expresiile anterioare sunt amplitudinile componentei câmpului respectiv. Dependența de timp este aceeași pentru toate câmpurile, deci poate fi eliminată. (Am eliminat indicele „0” pentru a simplifica notația. Mai târziu, când avem de-a face exclusiv cu câmpul electric, vom folosi A, A”, și A’ pentru mărimea amplitudinilor câmpului E0, E0 și E0. sau pentru Puterea câmpului electric într-o undă sferică.) Aceste ecuații trebuie să fie valabile pentru toate X și y și vor fi valabile dacă și numai dacă fazele sunt peste tot la fel.

O consecință este condiția

ce faci; = k,y = Q   (2.52a)

Aceasta spune că vectorii de undă reflectat și transmis trebuie să se afle în planul de incidență (planul xz). Alte cerințe sunt

K = kx

(2.52b)

și

k' = k.

(2.52c)

Combinarea ecuațiilor. (2.51) cu Ecs. (2.52b și c) Iead la kx — n(ω/c) sin θ și k'x = n(ω/c) sin θ. Din fig. 2.6 acestea pot fi scrise și ca

(2,53)

sau

păcatul θ" = păcatul θ

și

păcatul θ

(2,54)

sau

ñ' sin θ' – ñ sin θ

Ecuația (2.53) este echivalentă cu θ" = θ', legea de reflecție, care este valabilă pentru orice valoare a lui ñ și n'. Ecuația (2.54) este echivalentă în forni cu legea lui SnelF, care este folosită pentru a găsi direcția lui fascicul transmis în dielectrici Deși ecuația (2.54) rămâne valabilă atunci când indicii sunt complexi, direcția fasciculului transmis nu este egală cu θ' decât dacă atât ñ, cât și ñ' sunt reale (cum sunt pentru mediile transparente optic).

C. Relaţii de amplitudine

Cu condițiile de potrivire de fază astfel luate în considerare corect, condițiile la limită devin condiții privind amplitudinile câmpurilor

Ey + E1; = E'y (2.55a)
Bx + B"x = -,B'x μ' (2.55b)
Prin + Br; = ʒ в'y μ (2.56a)
Ex + E^ = E'x (2.56b)
De aici încolo vom presupune că mediile sunt nemagnetice (un excelent

aproximare în majoritatea cazurilor), astfel încât μ = μ0 în toate ecuațiile.

1. σ Caz: E Perpendicular pe planul de incidentă. Condițiile la limită sunt

exprimată în Ec. (2,55). Pentru cazul σ, E are doar componenta ay. Atunci B trebuie să se afle în planul xz. Ecuația (2.35) dă B în termeni de E

b = 11×e

ω

Ecuația (2.55b), care spune acum că Bx este continuă, apoi devine

(k XE)x + (k" X E")x = (k' X E')x (2,57)

Deoarece E-urile au doar y componente, putem scrie

Ey ≡ E, E'; ≡ E", E'y ≡ E'

K au doar componente x și z; astfel, (k × E)jc = — kzEy. Folosind aceste relații specifice, obținem din Ec. (2.55a) (care spune acum că Ey este

continuu) E + E" = E'(2.58a)
iar din Ec. (2,57) kzE + kzE" = k'zE'

Dar k"z = — kz. Astfel

- ~=- - ■ k' EE" = f E'(2.58b) | iz

Ecuațiile (2.58a și b) sunt ușor de rezolvat

- E' =E = τσE(2.59a) 1 + (u)
\ kzJ
X ; T' il©
/7 7> '-× ,×z Io' ■ V Din Ec. (2.54) avem E" =E≡p E(2.59b) k' ñ' cos θ' tan θ a ≡ — == (2.60) kz ncosθ tan θ'v , .

prima egalitate care rezultă din legea Snel. Folosind Eq. (2.60) și identitatea trigonometrică

$\cos\theta \sin\theta' + \sin\theta \cos\theta' = \sin(\theta + \theta')$ găsim pentru coeficientul de transmisie

2 2ñ cos θ

Ț = ------- = ----------------

σ 1 + a ñ cos θ + ñ' cos θ'

2 sin θ, cos θ sin(0 + θ') și în mod similar pentru coeficientul de reflexie

1 — a ñ cos θ — ñ' cos θ'

1 + a ñ cos θ + ñ' cos θ'

(2.61a)

(2.61b)

(2.62a)

sin(0 — θ')

sin(0 + θ')

I (2.62b)

Ultimele egalități pentru τ_σ și ρ_σ din ecuațiile. (2.61) și (2.62) sunt cunoscute ca relații Fresnel pentru cazul σ (după Augustin Fresnel care a fost primul care a derivat forma lor din teoria mecanico-elastică a luminii). Ele descriu mărimile câmpurilor electrice reflectate și

transmise în termeni de mărime a câmpului incident. În plus, deoarece $\tau\sigma$ și $\rho\sigma$ sunt, în general, numere complexe, acești coeficienți exprimă modul în care faza câmpului electric se modifică la întâlnirea unei interfețe. Trebuie făcută o referire atentă la convențiile stabilite în Fig. 2.6 pentru direcțiile câmpurilor care au fost definite ca fiind pozitive și în fază unele cu altele. De exemplu, în Ec. (2.62b) dacă raportul funcțiilor sinus este pozitiv, coeficientul de reflexie este negativ. Aceasta înseamnă că există o schimbare de fază de 180° pentru câmpul electric optic la reflexie în acest caz.

În acest moment, este util să comparăm rezultatele precedente cu cele care sunt valabile atunci când rolurile undelor incidente și transmise sunt schimbate. Să luăm, așadar, în considerare situația când Iight travees înapoi de-a lungul – k'. Unghiul de incident este acum θ'. Lumina reflectată apare la θ" – θ', iar lumina transmisă se găsește la θ în ceea ce este acum mediul de transmisie. Raportul a devine

, ñ cos θ 1 a = –,-----X, = ~

n cos θ a

iar coeficientul de reflexie se supune

, 1 – a' 1– a~1– (1 – a)

Pa = 1 +α' = l÷α^1 = 1+a = ~ Pa

Semnul minus în relație

corespunde unei diferențe de fază de 180° atunci când se compară coeficienții de reflexie din părțile opuse ale unei interfețe.

Dacă facem o comparație similară pentru câmpurile transmise, coeficientul de transmisie din partea opusă este

, _ 2 2 2a

τ°~ 1 +a'~ 1 +ɑ-ɪ “ 1 +a~aτ°

sau

Lr ⅛ = ɑɪɑ

4α

<Γ + α)i

Acest lucru ar trebui comparat cu

1 fa Pa =

(1 + a)2 - (1 - a)2

(1 + a)2

4a

(1 + «)2

Prin urmare

⅞< = ɪ - P*

(2,64)

Ecuațiile (2.63) și (2.64) sunt valabile și pentru cazul π. Sunt relații importante care vor fi folosite mai târziu în cârlig.

2. π Cazul: E în planul de incidentă. În acest caz, B are doar o componentă y. Direcțiile rezultate ale lui E, E", și E' sunt așa cum se arată în Fig. 2.6h. Această figură sugerează că adoptăm pentru mărimile scalare

Prin ≡ B, B,; ≡ B"

și

B'y≡B'

Deoarece din Ec. (2.35) B = ñE/c, condiția la limită pentru B în cazul π

[Ec. (2.56a)] este

ñE + ñE" = n'E'

(2,65)

Pentru a genera o modificare a Eq. (2.56b) care este similar cu Eq. (2.57), ca

forma modificată a Eq. (2.55a), trebuie să aplicăm comenzile rapide ale operatorului de undă plană

la ecuația Maxwell (2.29) IV. Aceasta înseamnă

— ik XB = μ0εiωE

Componenta tangențială sau x a lui £, care trebuie să fie Continuă pe interfață, este atunci

-1 (κ XB)x 1 kzB

μ0ω n μ0ω n

(2,66)

unde prima egalitate rezultă din faptul că ky = O. Folosind Ec. (2.66) în Ec. (2.56b) randamente

kzñE k"zñE" _ k'zn'E' ~2 T ~2   ~/2

H2 n n

sau, deoarece = — kz

/ ñ \ 2 / L·' \

ñ(E - E") = (- I]Λ'E,

\ñ J \ kz)

(2,67)

Soluțiile la ecuațiile. (2.65) și (2.67) sunt

E' = τπE E" = pnE

cu

2(n/fi')   1 — b

τ* = i + & ' Pn = TTb

(2,68)

și

/n \ 2/7ζ \ _ /ñ\2 \ n' J \ kzJ \ñ'J

-2 ɪ ¿2

(2,69)

bth Optica interfețelor Plonor

Pot fi derivate versiuni alternative, și anume,

2ñ cos θ   2 sin θ' cos θ__

τ =------------------=--------------------(2.70a)

π ñ' cos θ + ñ cos θ' sin(0 ÷ θ') cos (θ — θ')

ñ' cos θ — ñ cos θ' tan(0 — θ')   λ, ∧

0 —--------------------=----------- (2./(Jb)

π ñ' cos θ + ñ cos θ' tan(0 + θ') ν

Ultimele egalități din Ecs. (2.70a și b) exprimă relațiile Fresnel pentru cazul π. Printr-o dezvoltare similară cu cea a Ecuațiilor înconjurătoare. (2.63) și (2.64) putem demonstra cu ușurință că

p,π= - Pπ

și

√1 = 1 - Pn

Astfel, expresiile generale sunt scrise cel mai potrivit ca

(2,71)

(2,72)

D. Reflectarea energiei și coeficienții de transmisie

Vectorul Poynting mediu <S) dă puterea medie în timp pe unitatea de suprafață; pentru o undă plană acesta este un maxim pe o suprafață normală direcției de propagare. Din Eq. (2.45) avem la r = 0

<S> = n^ | E0 |⅜

unde n este partea reală a lui ñ.

Puterea medie Traversarea unei unități de suprafață a unei suprafețe plane paralele cu interfața, iradința, este dată de mărimea componentei z a lui <S>, care este <S,>z = (S) cos θ. Astfel avem pentru cele trei valuri

Incident (S)2 – ɪ n|E|2 cos θ

Reflectat (S)2 – ɪ n \ E" \ 2 cos θ

Transmis (S)2 = ɪ n'|E'|2 ∞s θ'

Reflectanța R este definită de raport

R =

<s)ï

(S)2

E" 2 ~Ë

IpI2

(2,73)

iar transmitanța T este definită de raport

τ= <s×

<S\

| E' | 2n' cos θ'

| E | 2n cos θ

lτ | 2

rí cos θ' η cos θ

(2,74)

Putem arăta cu ușurință că atât pentru cazurile σ cât și pentru π avem

((2,75)

care trebuie să rezulte din conservarea energiei, deoarece puterea pe unitate de suprafață la

interfața din fasciculul incident este egală cu puterea din fasciculul reflectat plus

puterea în fasciculul transmis.

E. Medii dielectrice

Când materialele de pe ambele părți ale interfeței sunt dielectrice, indicii ñ și ñ' sunt reali. La o incidență normală, distincția dintre cazurile σ și π se pierde. Avem a și b~1 = ríjríañiTrence

n~n' \ Pa = = - Pn(2.76a)

___ n + n

2n

= = \(2.76b)

Diferența de semn în Ec. (2.76a) este necesară deoarece convenția noastră din Fig. 2.6b arată câmpul electric optic incident și reflectat în direcții opuse la incidență normală.

Pentru un exemplu numeric simplu, luați n'/n = 1,5. Apoi

Pa = - Pn = -θ•2

iar reflexia este

R = Rσ = Rπ = pl = 0,04 ! ⅛Γ ^

Coeficientul de transmisie este

⅞ = ⅞ = θ•8

iar transmitanța este

T = Tσ = T2 n'/n = 0,96 = IR

Următoarele cazuri care vor fi discutate implică un unghi de incidență diferit de zero.

1. Incidență oblică Unde и < n' (Reflexia externă). Acesta ar fi cazul incidentului de lumină din aer pe o suprafață de sticlă, de exemplu. În cazul σ parametrul a este dat de

rí cos θ'

n cos θ

n'y/l — sin2 θ' y/n'2 — n2 sin2 θ n cos θ   n cos θ

62 Optica interfețelor plane

Acest lucru este real și pozitiv pentru toate valorile lui θ. Mai mult, din Legea lui Snell — sin θ' = (n/n') sin θ — constatăm că pentru toate valorile lui θ între zero şi 90° se respectă inegalitatea θ' < θ. Prin urmare,

— sin(θ — θ,)

sin(θ + θ,)

\

este întotdeauna negativă, indicând că în cazul σ câmpul electric suferă o defazare de 180° la reflexia externă.

La incidența pășunatului, când θ → 90° avem a → + oo și henee pσ→ — 1. Comportamentul general al lui pa și Rσ = p2 în funcție de θ este prezentat în Fig. 2.7 pentru cazul n'/n = 1.5.

Pentru cazul π, trebuie să luăm în considerare parametrul b = (n/n')2a și un coeficient de reflexie dat de

1 — b tan(θ — θ')

1 + b tan(θ + θ') '.

Valoarea limită la incidența pășunatului este pπ(90o) = — 1. La incidența normală p„ este pozitivă

Pπ(0o)

—-----[= 0,2 pentru exemplul nostru numeric

n' + n   F

Reflectance   Coeficient de reflexie

Fl9. 2.7 Coeficienți de reflexie și reflexe pentru o interfață dielecîrică cu ri/n =1,5.

2.2 Reflectarea și transmiterea luminii către o interfață 03

[Rețineți că convenția din fig. 2.6 cere ca un p_π pozitiv să fie asociat cu o defazare de 180° la incidență normală.] Deoarece θ variază de la Oo la 90o, p_π scade monoton de la 0,2 la – 1. Este egal cu zero atunci când

$$\theta + \theta, = 90° \quad (2,77)$$

deoarece atunci tan(θ + θ') devine infinit.

Când θ satisface Ec. (2.77), atunci unghiul de incidență este la unghiul lui Brewster θ_b. Dacă se utilizează legea lui Snel, Ec. (2.77) dă (la $\theta = \theta_b$), j√ '

n' \ /z^~

$$/ \tan \theta_b = -) \quad (2,78) ;$$

\ Π ' ` -ʃ

Pentru exemplul nostru numeric de n'/n = ɪ-ʒ, θ_b – 56,3o. Unghiul de refracție corespunzător este de 33,7° în condiția Brewster. Deoarece p_π este zero la unghiul lui Brewster, acest efect poate fi folosit ca o modalitate eficientă de a reduce lumina la o componentă polarizată inițial. Componenta σ are un coeficient de reflexie

$$\rho_\sigma(\theta_B) = - \sin(\theta_\beta - \theta_b) = \sin 22,6o = - 0,384$$

iar reflexia $R(\theta_b)$ este 0,147 ≈ 15%.

Când materialul are un indice complex de refracție, reflectanța față de unghiul incident este similar cu exemplul mediu dielectric, cu excepția faptului că nu există, în general, niciun unghi la care relația lui Brewster să fie satisfăcută. În schimb, este demonstrat un unghi pseudo-Brewster la care componenta π-polarizată trece printr-un minim (Fig. 2.15b).

2. Incidență oblică Unde n > n' (Reflexia Internai). Un exemplu al acestei situații este incidentul Iight pe suprafața unui bazin de apă de sub apă. Legea lui Snel arată că θ, > θ până la θ = 90o. Aceasta definește unghiul critic de incidență θ_c:

$$\sin \theta_c = - \quad (2,79)$$

n

Pentru n/ri = 1,5, θ_c – 41,8.

La unghiuri de incidență mai mari decât unghiul critic, avem sin θ, > 1 ; aceasta înseamnă că unghiul θ' devine imaginar. În această subsecțiune vom presupune că unghiul de incidență este I mai mic decât unghiul critic. Atunci θ' este real, așa cum este

n' cos θ' ʌ/n'2 – n2 sin2 θ

a = ---------= –----------------

n cos θ' n cos θ

La o incidență normală, acum avem o valoare pozitivă pentru

n — η' Γ   n

Pa = - Pπ(θo) = —- = ÷ θ•2 pentru - = 1,5

n + n   n

La unghiul critic avem a = b = 0, astfel încât

pσ(θc) = PM = 1

84

Opficul interfețelor planare

Fig. 2.8 Coeficienți de reflexie, defazări și reflexe pentru o interfață dielectrică cu n/rí = 1,5.

Coeficientul pπ crește acum monoton de la -0,2 la +1 pe măsură ce θ crește de la Oo la θc. Acum pπ trece prin zero la noul unghi al lui Brewster dat de

/1 n' tan θb — — n

Pentru η/rí = 1,5, 0b = 33,1°. Comportamentul rezultat al pσ, pπ, Ra și Rπ este prezentat în Fig. 2.8.

3. Reflecția totală internă. În cazul în care n > n' și unghiul de incidență este mai mare decât unghiul critic definit de Ec. (2.79), parametrul a devine pur imaginar. Prin urmare, introducem un nou parametru real γ astfel încât

iy ≡

λ/n2 sin2 θ — n'2

n cos θ

(2,80)

i

Alegerea semnului minus în Ec. (2.80) este dictată de necesitatea de a avea o dependență exponențială descrescătoare în direcția z pentru unda transmisă. Vom vedea în câteva linii că acest lucru este necesar deoarece unda transmisă nu se propagă. Notația complexă pentru câmpul transmis este apoi dată de

E,(x, z, t) = E'ei<ω' -k' ·r) = E'e*ω, ~xkχ,e ~γk*z   (2.81)

cu kx = nω (sin θ)/c, kz = nω (cos θ)/c = 2πn (cos θ)/λ0 iar cu A0 lungimea de undă în vid. Densitatea fluxului de putere în al doilea mediu este proporțională cu

| E' | 2 e~2^z = | E' | 2 e~2z'i

cu o adâncime a pielii dată de

7 2πχ/n2 sin2 θ — rí2 }

(2,82)

O undă precum (2.81) care are o dezintegrare exponențială reală într-o direcție spațială se numește undă plană neomogenă sau undă evanescentă.

Coeficienții de reflexie devin

Pa

1 + iγ.

1 — eu

./ n\2

1 + il —) y

p* =----/ \ Γ

1 — i — y \n /

Reflectanțele sunt unitate:

K, = IPσ | 2 =

1 + iy

1 — iy

1 + V2

ÏT7=1; λ' = lp*1 =1

Lumina este reflectată total atâta timp cât unghiul incident este mai mare decât unghiul critic. Aceasta se numește reflexie internă totală.

Deoarece Rσ = Rπ = 1, transmisiile Ta și Tn sunt zero. Nu există un flux de energie în al doilea mediu într-o direcție normală cu interfața. Acest lucru poate fi demonstrat direct printr-un calcul al lui <S>f2. Cu toate acestea, există o componentă diferită de zero a lui <S> în direcția x. Aceasta înseamnă că unda evanescentă se deplasează de-a lungul suprafeței la intersecția planului de incidență.

Coeficienții pσ și pn sunt complecși și impun o schimbare de fază asupra câmpului electric care este o parte fracțională de 180o. Acest lucru rămâne adevărat chiar dacă amplitudinea câmpului reflectat rămâne aceeași la toate unghiurile mai mari decât unghiul critic. Pentru a

discuta mai bine acest lucru, introducem unghiurile φa și φπ așa cum sunt definite

de

po - eiφa și pπ = e'ț dc G⅞ - c»< ? ^2,83)
Aceasta necesită f φaφπn2Á 22 rí2γfli

Unghiurile de fază φa și φn sunt reprezentate în partea strânsă a vârfului din Fig. 2.8.

Dacă unda incidentă este polarizată liniar astfel încât orientarea câmpului optic are atât componente σ cât și π, atunci va exista o diferență relativă de fază între componentele reflectate σ și π. Aceasta duce la polarizare eliptică (vezi secțiunea 9.2).

4. Reflecție totală internă frustrată. Decăderea exponențială a E ~ e г/д a câmpurilor din al doilea mediu poate fi detectată dacă o a doua interfață este plasată la un

>

⅜

F⅛. 2.9 Geometrie în care se poate demonstra reflecția internă frustrate.

o anumită adâncime d în acel mediu. Adesea, al treilea mediu are același indice de refracție ca primul, ca în exemplul din Fig. 2.9. Dacă d este oarecum mai mare decât adâncimea pielii δ, putem neglija efectele de reflexie multiple — primul fascicul reflectat multiplu va parcurge o distanță 3d și va fi atenuat de factorul e 3d'i, care presupunem că este mult mai mic decât e ~dlδ.

Chiar în interiorul celei de-a doua interfețe, amplitudinea câmpului transmis pentru, de exemplu, componenta 77 va fi dată de

K = Enτπτ'π

unde E77 este amplitudinea câmpului chiar în afara primei interfețe. Există o expresie similară pentru componenta σ. Rezultatele noastre anterioare pentru menținerea lui τ cu parametrul a înlocuit cu iγ. În special, avem

VÍ = 1 - PÌ = 1 - e2iφ"

Coeficientul de transmitere a energiei prin decalaj este apoi dat de

Tn = 2e"2dzdU - cos 2φn) j (d > δ) (2,84)

și, deoarece nu există mecanisme disipative, producătoare de pierderi, prin principiul conservării energiei, fasciculul reflectat de „sandwich” n — ri — n ar fi descris printr-o reflexie.

$Λπ = 1 - Tπ$

Când d nu este mai mare de câteva ori adâncimea pielii, aceste rezultate trebuie modificate pentru a lua în considerare reflexiile multiple sau, echivalent, pentru a ține cont de condițiile de limită adecvate.

Fenomenul de reflecție internă totală frustrată este exact analog cu fenomenul mecanic-cuantic al pătrunderii sau tunelării unei unde plane printr-o barieră dreptunghiulară unidimensională.

2.3 Aplicații în optica suprafețelor plane

Prin înțelegerea teoriei electromagnetice a Iight-ului, suntem capabili să rezolvăm multe probleme în optica suprafeței plane. Vă prezentăm aici o mică colecție de exemple.

A. Dielectrice

Când coeficientul de absorbție al materialului este zero, K = 4π//z0 = 0, atunci indicii de refracție sunt reali. Legea Snel poate fi folosită pentru a defini direcția razei transmise în mod unic. Acesta este, de asemenea, cazul în care reflexia internă totală este bine definită.

1. Refracția prismei. Unghiul de refracție va fi o funcție a lungimii de undă a Iight prin indicii media care cuprinde o interfață. Acest fenomen, numit dispersie, este de așa natură încât pentru multe materiale optice (cum ar fi sticla) indicele de refracție este o funcție descrescătoare a lui Л (după cum este ilustrat în Tabelul 2.1). Aceasta poate fi o problemă în multe situații de proiectare optică, deoarece duce la aberații cromatice. Efectul poate fi, de asemenea, utilizat în avantaj pentru a produce lumină monocromatică, cu condiția ca radiația dorită să poată fi blocată fizic după ce este dispersată. O formă convenabilă pentru analiza și exploatarea dispersiei este prisma (vezi Fig. 2.10).

Prisma este inima monocromatorului prismatic. Deși astfel de instrumente au fost în mare parte înlocuite cu monocromatoare cu rețea (în care rețeaua de interferență efectuează dispersia), analiza dispersiei într-o prismă stili oferă un exemplu instructiv pentru aplicarea legii lui Snell.

Urmând convenția stabilită în Fig. 2.10, vedem că unghiul de deviație la P este 0 – θ'. La R deviația este 0f – 0in. Deviația totală este așadar

$$0d = 0 + 0f-0, - 0in$$

Prin Cxtrapolarea normaisului la locul în care se încrucișează la Q definim un triunghi mic PQR. Se identifică și un unghi exterior, la Q, care este egal cu unghiul de vârf a prismei. Deoarece suma celorlalte două unghiuri interioare trebuie să fie egală cu unghiul exterior, avem

$$œ – θ' + θ || y$$

n = 1

(2,85)

Fc. 2.10 Refracția printr-o prismă.

Optica QQ a interfețelor Planor

Abaterea totală devine

$\theta d = \theta + \theta f - \alpha$(2,86)
Unghiul final θf este legat de θ și α prin SnelTs Iaw de
$\sin \theta f = \eta \sin \theta in$ \ (2.87)
$\sin \theta = \eta \sin \theta'$(2,88)
şi Ec. (2,85).
Dispersia unghiulara este
dθβ dθo dn(2,89)
dλ dn dλ

Dacă θ este fix, atunci

= I (2 90) dn dn

Ecuația de diferențiere. (2.87) Înțeleg să

$\cos \theta f = n \cos \theta in + \sin \theta in$ (2 91)

dn dn

Din Ec. (2,85)

dθlfi — dθ'

dn dn

iar din Ec. (2,88)

n, dθ'. .n,

$\theta = n \cos \theta$ -—1- $\sin \theta$

dn

Prin urmare

f'" = TanS' (2,92)

dn n

Combinarea ecuațiilor. (2.91) și (2.92) duce la

$Mp = \cos \theta in \tan \theta' + \sin \theta in$

dn cos0f1}

Dar cos θin = cos(a – θ') = sin α sin θ' + cos a cos θ', iar sin θin – sin(a – θ') = sin a cos θ' – cos a sin θ'. Dacă le înlocuim în Ec. (2.93), obținem

d0F sin a

= –ъ-----------ñ, (2,94)

dn cos 0f cos 0

Caracteristicile dispersive ale unei prisme pot fi utilizate pentru a măsura indicele de refracție al prismei cu mare precizie. Să presupunem că incidentul este

Rg. 2.11 Deviația totală printr-o prismă, al cărei unghi de vârf este a = 60°, care este Construită dintr-un material transparent cu indice n = 1,5, în funcție de unghiul de incident.

monocromatic. Pe măsură ce θ este variat, vom găsi că 0d

minim la un unghi bine definit (Fig. 2.11). Să examinăm condițiile pentru deviația minimă.

Pentru un extremum în 0d, trebuie să avem [din Eq. (2,86)]

dθp _ . dθf• _

dθ ~ dθ ~

modificări, trecând prin a

sau

dθ

(2,95)

Formele diferențiale ale ecuațiilor. (2,87) și (2,88) sunt

cos θf dθp – n cos O.dOIN

și

cos θ^dθf^. = n cos θ, dθ'

tot din Ec. (2.85) avem

dθ' – – άθIN

Folosind ultimele trei ecuații din Ec. (2.95) produce

d0F d(Г

— n cos θУ cos 0f

În cos θ' și cos θ

Acest lucru necesită ca

cos 0in cos θ' cos 0f cos θ

90 Optica interfețelor planare

Acest lucru va fi adevărat dacă

θ = 0f ;

și ;

a —ff! *^

σIN — u

Folosind aceste informații din Ecs. (2.85) și (2.86) stabilește următoarele condiții la o deviație minimă

»·=«„=^ ;«Мб>

și . [:y&'

= (2,97)

Aceste expresii pot fi reintroduse în Legea lui Snell pentru ca oricare dintre interfețe să producă . /α + 0d \ . ía\ sm —-— = n sin -

\ 2 / \2j

sau · ■

Lungimea de undă incidentă poate fi modificată. La fiecare lungime de undă poate fi măsurată deviația unde 0f = 0iλ (sau deviația minimă). Apoi din Ec. (2.98) se poate identifica indicele de refracție față de λ.

2. Ghiduri de undă dielectrice. Una dintre cele mai proeminente aplicații ale tehnologiei optice este în domeniul comunicațiilor prin fibră optică. Se pot folosi fibre cilindrice de sticlă sau plastic subțiri (≈ 50 μm) pentru a transporta semne în locul firelor metalice. Marele avantaj este în lățimea de bandă disponibilă atunci când purtătorul este un val Iight. Acest lucru face posibil ca o fibră să transporte mult mai multe semnale independente diferite decât poate un fir. Există, de asemenea, avantaje în greutate și independență față de resursele limitate. In Iaborator sunt foarte utile si fibrele optice de lungime scurta; de exemplu, puteți izola un dispozitiv fotoelectric sensibil de zgomotul electronic prin ecranarea dispozitivului și direcționarea semnalului Iight către acesta printr-o fibră.

Un tratament adecvat al propagării undelor electromagnetice într-o fibră optică necesită o soluție a ecuației undei supuse condițiilor la limită impuse de fibră. Nu vom acoperi acest subiect. Abordarea noastră este să luăm în considerare optica geometrică a unei raze care rămâne într-un pian care conține axa optică. Acest lucru ne va permite să discutăm câteva dintre ideile fundamentale asociate cu fibrele optice fără complicațiile teoriei undelor complete.

F⅛. 2.12 Unghiuri relevante în tratamentul razelor în planul meridional al unei fibre optice.

Principiul din spatele teoriei razelor unei fibre optice este reflexia internă totală. Lumina este multi-reflectată și, prin urmare, este ghidată în jos prin fibră.

A. Unghiul de acceptare. Fibra noastră model este prezentată în secțiune transversală în Fig. 2.12. Indicii de refracție nc și nf sunt funcții ale lungimii de undă. Comportamentul pe care îl discutăm acum este valabil pentru o gamă limitată de lungimi de undă pentru un sistem de fibre compus din materiale date. Trebuie să avem reflexie internă totală în punctul Q. Prin simetrie, toate reflexiile ulterioare se vor conforma și ele acestei condiții. Acest lucru înseamnă

(2,99)

Unghiul interior θin este legat de unghiul transmis θ' la P prin θ' = 90° — θin Acesta, la rândul său, este legat de unghiul exterior θ prin legea lui SnelT.

n0 sin Θ — nf sin θ'

Înlocuind aceste informații în Ec. (2,99) Înțeleg să

θin = 90° — sin~1fn° S^n θʌ ≥ sin~1(nc/nf)

\ nf J

sau

≥ păcat

n0 sin θʌ

Luați sinusul ambelor părți ale inegalității pentru a obține

păcat

> n0 sin 0 nf

Partea stângă este

Prin urmare,

$n0 \sin 9 \leq y/n\}- ∏c$ (2.100)

Acest lucru arată că există un unghi maxim de incidență în afara căruia razele care intră nu vor fi reflectate total în interiorul fibrei. Calimăm cantitatea din partea stângă a ecuației. (2.100) deschiderea numerică a fibrei. Este o măsură a conului de acceptare pentru fibra în mediul exterior cu indicele n0.

Pentru cel mai mare con de acceptare, am dori să aranjăm ca indicele de refracție al placajului să fie cât mai mic posibil. Acest lucru se realizează dacă nu există deloc placare. Totuși, acest lucru duce la alte probleme asociate cu pierderea de intensitate.

b. Atenuare. În aplicațiile de comunicații fibrele optice trebuie să aibă o lungime de mulți kilometri. Pe această distanță, chiar și o atenuare foarte mică pe unitate de lungime poate fi costisitoare în ceea ce privește puterea semnalului.

Pentru a evalua acest parametru, luați în considerare Fig. 2.13, care arată o secțiune mică a unei fibre care poartă o rază înclinată la 9' față de axa fibrei. Lungimea unei călătorii între reflexii este <f1, corespunzând unei lungimi în jos pe fibra L1. Acestea sunt legate de

lλ

cos 9'

sau

L1

$1 - \sin 2\theta$

Pe lungimea totală L a fibrei, calea reală a razei traversează o lungime

$z = -\frac{1}{8}$ (2•101)

cos 9

Eficiența de transmisie a fibrei va fi legată de coeficientul de absorbție al materialului de miez al fibrei prin Eq. (2.45), care este echivalent cu

T = expl

KL

cos 9'

(2.102)

Pe lângă pierderea de absorbție, vor exista pierderi de reflexie dacă suprafața miezului nu este curată. Acest lucru poate fi prevenit prin introducerea de placare pentru a le proteja

¿1

Fig. 2.13 Analiza căii de propagare printr-o fibră optică în pianul meridional.

suprafață optică sensibilă de la contaminare. În absența acoperirii, reflectanța pentru o reflexie poate fi de 99,9% mai degrabă decât de 100%.

Numărul de reflexii va fi egal cu raportul L/L_1, unde din Fig. 2.13 L_1 — D/tan θ'. Prin urmare,

bronzat θ'

n = l~^~ (2,103)

iar reflexia Ioss va Iead la o eficienta

T= R1 (2,104)

Ca exemplu al acestor concepte, luați în considerare o fibră optică în aer al cărei indice de refracție este 1,5. Să presupunem că diametrul său este de 50 µm și are 50 cm lungime. Materialul miezului este astfel încât coeficientul de absorbție să fie de 0,01 cm'1. Dacă unghiul incidentului este de 10o, atunci după SnelTs Iaw valoarea lui θ este 6,650. Pentru o fibră curată nu există pierderi de reflexie. Ioss de transmisie în aceste condiții duce la o eficiență prin Ec. (2.102) de 60%. Dacă fibra este murdară astfel încât R1 = 99,9%, Ioss crește dramatic. În condițiile noastre folosind Eq. (2.103) vor fi 1165 de reflexii. Combinând eficiența de reflexie a Eq. (2.104) cu randamentul transmisiei oferă o eficiență totală pentru fibra murdară de numai 18%. Acesta este motivul pentru care se folosește placarea, chiar dacă configurația rezultată are un unghi de acceptare mai mic.

3. Reflexia totală atenuată (ATR). O modificare interesantă a fenomenului de reflexie internă totală are loc atunci când al doilea mediu este oarecum „cu pierderi”, adică atunci când indicele său ñ' nu este în întregime o cantitate reală. Penetrația exponențială a Iight în al doilea mediu este acum însoțită de o pierdere ireversibilă de energie. Reflectanța rezultată va fi mai mică decât unitatea și spunem că fasciculul reflectat total intern a fost atenuat.

Considerați că al doilea mediu are un indice de refracție complex

ñ' — n' — W

astfel încât

n'2 = rí2 - Ă'2 - i2n't,

Parametrul y este acum complex și este dat de

(n2 sin2 θ — n'2 + /'2 + i2n'Z')v2 n cos θ

(2.105)

Discuția este simplificată presupunând că proprietățile de absorbție ale celui de-al doilea mediu sunt slabe, atunci n'2 > /'2 și n2 sin2 θ – n,2 > 2n'/'. Putem acum

scrie γ = yr + iγi unde

χ/n2 sin2 θ – n'2 n cos θ

și

yrn /f

yi ≈ H2 sin2 θ-nl2

(2.106a)

(2.106b)

astfel încât

y i < yт

Aceasta ne oferă coeficientul de reflexie în cazul σ

_ 1 + iγ _ (1 - γι) + iyr Pa 1 - iγ (1 ÷ γi) - iyr

și pentru reflectare

D_i | 2 _ α ~ y·)2 + y'~ 1 + г - 2yi~ 1 _ 4γι

IPσI (1+ γi)2 + y2r~ 1 + yг + 2γi~l+y2

Reducerea reflectanței din cazul reflexiei interne totale este

1 - R. = 13⁄4 αl07a>

Cazul π poate fi tratat prin înlocuirea y cu (n/n')2y cu rezultatul

Adesea, partea imaginară își datorează originea prezenței unui concentrat relativ diluat de atomi sau molecule absorbante în al doilea mediu. Pentru Z' -≤ 1, efectul acestor atomi sau molecule asupra ñ' ar fi foarte mic, astfel încât pentru un unghi fix de incidență θ și un interval limitat de lungimi de undă, am putea trata yr și coeficientul lui /' în Eq. . (2.106b) ca constante. Henee, Ecs. (2.106) și (2.107) pot fi utilizate pentru a da Z' din măsurătorile lui (1 – R).

Experimentele folosind tehnica ATR sunt adesea efectuate așa cum este indicat în Fig. 2.14. Mediul cu indice n este folosit ca instrument pentru studierea mediului cu indice n,. Primul mediu trebuie să fie

foarte transparent în intervalul de lungimi de undă dorit și cu indice de refracție mare. Interfața dintre cele două medii trebuie să fie de bună calitate optică, iar cele două suprafețe să fie în contact optic bun dacă se dorește ca expresiile derivate aici să se aplice cantitativ; În caz contrar, fiecare interfață este de fapt un sandwich Complicat ñ'-air-n. Reflecția multiplă

4ñNs

n

(A)

(b)

F⅛. 2.14 Reflexie internă atenuată: (a) reflexie unică; (b) reflexie multiplă.

tehnica din Fig. 2.14b este utilizată pentru a amplifica efectele unei mici reduceri a reflectanței. Dacă (1 – R) <≤ 1, atunci după N reflexii, avem

Rjv = [1 + (R - 1)]λ, ≈ 1 + N(R - 1)

iar reducerea din cazul reflexiei interne totale este

I-Rv ≥ N(R - 1)

dând o amplificare de N ori.

Ca exemplu, luați în considerare cazul în care n = 2,2 și n' = 1,5. Atunci θc = 43. Γ. Fie unghiul de incidență θ = 50o. Găsim apoi următoarele:

y, = 0,54, y,-=1,38/·"

1 - Ra = 4,3Z'

I-Rjt = 5,1/·"

dacă Z' este 10-2, atunci

I-Ra = 0,043

1 - Rπ = 0,052

Într-un experiment de transmisie, coeficientul de absorbție măsurat ar fi (pentru A0 = 1 µm)

χ = 4π£= 125 χ 1θ3 cm_i

/t0

Pentru a măsura acest lucru în transmisie, avem nevoie de o probă subțire. Să presupunem că putem măsura o atenuare cu un factor de 100. Apoi setăm e~κ^z = 10-2 și aflăm că valoarea rezultată a lui Az ar trebui să fie 3,7• 10-3 cm = 37 µm. Adesea, este imposibil să se pregătească mostre atât de subțiri. Tehnica ATR are avantajul de a furniza aceleași informații cu probe groase, cu condiția ca suprafața pregătită să fie de o calitate suficient de înaltă. Chiar dacă nu ar fi, tehnica ATR ar putea fi utilizată pentru a localiza în mod convenabil pozițiile maximelor din Z' în funcție de lungimea de undă.

Tehnica ATR a fost utilizată în practică în principal în regiunea spectrală infraroșu, cu mostre relativ puternic absorbante. În regiunile infraroșii cu lungime de undă mai mare, cerințele privind calitatea suprafeței nu sunt la fel de stricte precum sunt în regiunile vizibile.

B. Media netransparente

Această secțiune discută unele dintre proprietățile optice ale mediilor netransparente. Astfel de materiale au o valoare mare a lui Z, partea imaginară a indicelui complex de refracție. Lumina incidentă la toate unghiurile este apoi puternic atenuată. Este util să discutăm două cazuri Iimitatoare care au valori considerabile pentru Z, deși este adevărat că majoritatea sistemelor reale reprezintă un caz intermediar.

Într-una Iimit (Funcția electrică este reală, dar negativă. Fenomenul este foarte

asemănător reflecției interne totale. Indicele de refracție ñ' este pur imaginar, la fel ca și parametrii a și b. Reflectanța Rσ sau Rπ este unitate. Coeficienții de transmisie τσ și τπ au mărimi de sau mai mari. Astfel, câmpurile E și H din interiorul suprafeței sunt relativ mari. Ele nu se propagă totuși ca undă. Componentele lui E și H care contribuie la componenta normală sau z a vectorului Poynting S sunt defazate cu 180°, astfel încât media temporală a lui Sz se comportă atunci ca <cos ωt sin ωt) = O. Acest fenomen are omologul său în alte regiuni ale spectrului electromagnetic, de exemplu, reflexia undelor radio în ionosferă.

În celălalt caz, constanta dielectrică este complexă cu o parte reală pozitivă, dar cu o parte imaginară considerabilă. Indicele de refracție й' este mare în valoare absolută în comparație cu n; | α | este mare în comparație cu unitatea, iar | h | este mică. Atunci Rσ și Rπ sunt aproape de unitate. Coeficienții de transmisie τσ și τπ sunt ambii mici în valoare absolută din cauza nepotrivirii mari |й'| > n, iar câmpurile E, H din interiorul interfețelor sunt destul de mici. Puterea de care dispune procesele de absorbție disipativă este mică, nu pentru că procesele sunt slabe, ci pentru că câmpurile sunt slabe.

Putem calcula reflectanța unui material absorbant prin Ec. (2.73) folosind Eq. (2.62b) pentru cazul σ și Ec. (2.70b) pentru cazul π. Rezultatele sunt prezentate în Fig. 2.15 pentru o interfață aer-metal. Observați asemănarea cu Fig. 2.7. În acest caz, există un „unghi

pseudo-Brewster” în care reflectanța polarizată π trece printr-un minim.

Forma Eq. (2.54) rămâne valabilă ca expresie a conservării componentei x a vectorului de undă complex. Cu toate acestea, nu poate fi folosit pentru a defini direcția unei raze, deoarece semnificația unei unde plane trebuie să fie interpretată în interiorul unui material absorbant.

Pentru a explora aceste concepte în formă matematică, considerați mediul incident ca fiind neabsorbant, astfel încât Componentele vectorului de undă complex transmis în direcțiile (x, y, z) sunt

k' = ț (n sin θ, O, й' cos θ')   (2.108)

Vezi fig. 2.16.

Componenta z poate fi reexprimată în termeni de unghi de incident

й' cos θ' = y/n'2 - n2 sin2 θ ≡ η e~iβ (2.109)

unde η și β sunt determinate prin rezolvarea perechii de ecuații

η2 cos 2β = n'2 - z '2 - ∏2 sin2 θ   (2.110a)

și

η2 sin 2β = 2rí¿'   (2.110b)

Astfel vectorul de undă transmis este

k' = ț [n sin θ, 0, (η cos β - iη sin βf \   (2.111)

2.3 Aplicații în Plonor Surface Optics 97

Fig. 2.15 (a) Părți reale și imaginare ale indicelui complex de refracție a aurului. (ð) Reflectivitatea aurului față de unghiul de incidență la o lungime de undă de 400 nm. (După Weaver, Krafka și Lynch.)

Dacă substituim aceasta în forma pentru dependența spațială a undei plane, găsim

ε — ik' · r ____ g — i(ω/c)(n sin θ x + η cos β z) ε - (ω/c)η sin β z

(2.112)

Aceasta arată că suprafețele de amplitudine constantă sunt date de z = constant.

9β Optica interfețelor Plonor

F⅛. 2.14 Reprezentarea vectorului de undă complex într-un material cu caracter neneglijabil

Acestea sunt plane paralele cu interfața. Suprafețele de fază reală constantă sunt definite de

$$n \sin \theta X + \eta \cos \beta z = const \quad (2.113)$$

Aceste două suprafețe nu sunt în mod evident coincidente în cazul în care 4' ≠ 0.

Putem identifica normala la suprafețele de fază reală constantă (cum am putea face în cazul în care dorim să identificăm o „rază") din Ec. (2.113). Aceasta va fi de-a lungul

$$n \sin \theta x + \eta \cos \beta r = Ax + B r \quad (2.114)$$

Dacă definim θ_τ prin

$$\sin\theta_\tau \equiv A(A2 + B2)"1/2 \quad (2,115)$$

iar apoi Iet

$$n_\tau \equiv yjn2 \sin2 \theta + \eta2 \cos2 \beta \quad (2,116)$$

recuperăm forma funcțională a SnelΓs Iaw din Eq. (2.115)

Totuși, în acest caz, unghiul θ_τ depinde de unghiul de incidență într-un mod complicat.

2.4 Introducere în proprietățile optice ale lui Motter

Fenomenologic, prezența materiei are ca rezultat o funcție dielectrică, κ ≠ 1 (și uneori o permeabilitate relativă diferită de zero, κm ≠ 1). Cum se determină κ din proprietățile microscopice ale materiei? Mai practic, putem vedea

în mod direct cum prezența atomilor și moleculelor modifică propagarea undelor de lumină? Acestea sunt câteva dintre întrebările care vor fi discutate în această secțiune. Pentru a simplifica, discuția va fi limitată la mediile nemagnetice unde κm — 1 și B = μ0H. Mediile magnetice pot fi descrise prin teorii oarecum analoge cu cele care vor fi dezvoltate în această secțiune.

Un rol cheie îl joacă polarizarea P, deoarece produce sarcina legată Pb = -VP și densitatea de curent legată J = dP/dt. Dacă presupunem că sunt cunoscuți curenții și sarcinile „libere" Jʃ și pʃ, atunci odată ce P este cunoscut, toate sursele lui E și B sunt cunoscute, iar E și B pot fi determinate (cel puțin în principiu) prin integrarea lui MaxwelT. ecuaţii sau a ecuaţiilor derivate din ele.

Urmând ecuațiile. (2.21) și (2.22) pentru medii liniare, locale, izotropice, exprimăm polarizarea în termeni de câmp în același punct și susceptibilitatea sau, alternativ, funcția dielectrică.

$$P(r) = e0\chi E(r) \quad (2.117)$$

κ-l+ χ (2,118)

A. Model pentru un gaz nepolar diluat

Considerăm un mediu compus din molecule. Polarizarea P este momentul dipolar mediu pe unitate de volum. Presupunem că într-un mediu fără câmp moleculele nu au moment dipol net; Prin urmare, orice dipoli trebuie induși ca în Fig. 2.1. Un astfel de mediu se numește nepolar.

Momentul dipol indus pe molecula i-a va fi dat într-o aproximare liniară prin

pi = αEm(ri) (2,119)

Aici Em(ri) este câmpul electric microscopic local în centrul de masă ri al moleculei. Neglijăm, prin prezenta, variațiile câmpului extern asupra întinderii spațiale a moleculei; aceasta este o presupunere bună pentru lumina vizibilă și pentru molecule de dimensiuni obișnuite. Pentru polimeri sau cristale, pentru care, din punct de vedere tehnic, moleculele au dimensiuni macroscopice, argumentul trebuie aplicat unei mici subunități, sau celi, care se repetă prin structură. Funcția a din Ec. (2.119) se numește polarizabilitate.

Câmpul local microscopic Em(ri) depinde nu numai de ri, ci și de pozițiile Tj ale tuturor celorlalte molecule din Sistem și de orientarea și mărimea dipolilor induși pe aceste molecule. Dacă facem media câmpului microscopic Em peste toate moleculele dintr-un element de volum macroscopic mic, dar microscopic de mare volum la r, obținem câmpul local mediu Ei(r) care acționează asupra unei molecule la r. Acest câmp local ar trebui să fie în contrast cu câmpul macroscopic obișnuit E(r), care este media câmpului de microscopie peste toate pozițiile dintr-un element de volum mic la r, nu doar peste pozițiile ocupate de molecule.

Acum trebuie efectuate două sarcini dacă teoria trebuie continuată: (1) trebuie construit și calculat un model pentru o moleculă și (2) câmpul local Ei trebuie să fie legat de câmpul macroscopic E.

1. Model molecular simplu. Un model simplu al unei molecule nepolare este furnizat de un oscilator de armonie (Fig. 2.17). Fie atașată o sarcină q cu masa m unei alte sarcini – q De masă esențial infinită (pentru simplitate) printr-o armonie „arcuri” cu constanta elastică C. Separarea de echilibru r a celor două sarcini este zero dacă nu sunt aplicate forțe externe.

Pentru frecvențele corespunzătoare regiunii vizibile a spectrului, contribuția majoră la a și henee în cele din urmă la κ vine de la electroni oscilatori. Atunci q ar fi minus sarcina electronică (– |e|) și m ar fi masa unui electron. În regiunea infraroșu a spectrului, sarcinile oscilante pot fi ioni sau părți de molecule având valori mult mai mari de m. Din fericire, derivația actuală se poate aplica la o varietate de sisteme oscilante.

Se va scrie ecuația de mișcare pentru vectorul de poziție al sarcinii mobile

d2r _ m dr ,, m;2 = - Cr - + F

dt2   τ dt

(2.120)

Aici forta externa F este data de

F = <?Em   (2,121)

unde Em este câmpul electric microscopic la moleculă. Am inclus o forță de amortizare – (m/τ) dr/dt în Ec. (2.120), care este proporțională cu viteza, astfel încât să putem descrie pierderi ireversibile cauzate de ciocniri cu alte molecule sau de amortizarea radiațiilor. Acest termen poate să nu dea întotdeauna comportamentul cantitativ corelat rezultat în urma coliziunilor, dar oferă principalele efecte calitative. Constanta τ poate fi interpretată ca un timp de amortizare sau de coliziune. Este o măsură a timpului mediu în care o oscilație se va descompune în sistem.

Frecvența de rezonanță naturală ω_0 a oscilatorului neamortizat este dată de

(2.122)

ω_0 = -\ m

Presupunem o singură frecvență unghiulară în câmpul de conducere și scriem

Em = εm,o eiω și r = r0 eiωt

unde Em 0 și r0 sunt amplitudini complexe, dependente de timp. Ecuații (2.120),

Rg. 2.17 Model simplu al unei molecule diatomice.

(2.121) și (2.122) sunt combinate și se folosește comanda rapidă a operatorului [Eq. (1.28] pentru a obține

dr   d2r

= iωr,

și

(2.123)

Momentul dipol indus este atunci p = qr.

Ecuația (2.119) devine atunci pur și simplu p = αEm cu

Q2

m

(2.124)

Polarizarea este atunci momentul dipol mediu pe unitate de volum sau

P(r) = Nq(r> =------------------- <Em> =------------------ - Eι(r)

",'1 I(J)

(2.125)

Aici N este numărul mediu de molecule pe unitate de volum, iar Ei(r) este, așa cum sa explicat mai devreme, câmpul mediu <Em> care acționează asupra unei molecule la r. Prin urmare,

P(r) = NαEi(r)

(2.126)

Deoarece i — χ/-1 apare în denumirile sau din ecuațiile. (2.124) și (2.125), a va fi o funcție complexă a lui ω. Scrie-o în forma

(ω2 _ ω2)2 + _   (ω2 _ ω2)2 + __

Câmpul electric real, fizic, este dat de

Ei(real) = Re{Ei0 eiωt} = Ei o cos ωt

În mod similar, polarizarea fizică reală va fi

P(real) = Re{NαEi 0 e'ωt} = NElooιr cos ωt + NEi 0ai sin ωt

Primul termen este oscilant în fază cu câmpul locai, al doilea termen este la 90°.

de faza.

2. Gaz foarte diluat. După ce am determinat polarizabilitatea, acum trebuie să decidem ce să folosim pentru câmpul local Ei. Pentru un sistem foarte diluat, moleculele au un efect atât de mic asupra câmpurilor încât E1(r) poate fi aproximat suficient de bine de câmpul macroscopic E(r). Vom face mai târziu o aproximare mai bună pentru E(și, prin urmare, vom fi în măsură să evaluăm aplicabilitatea ipotezei noastre actuale că E1 = E.

Cu E1 — E, susceptibilitatea devine

N / A

Z = — εo

iar funcţia dielectrică este dată de

Nq2

κ = 1 + z = 1 +---------------- (2,127)

9   , ιω

«o — ωz + — τ

Dacă separăm părțile reale și imaginare prin κ = κr — iκi, găsim

κr - 1 = -------------ɪ   (2,128)

(ωo - ω2)2 + ⅛

τ

/Nq2X/ωX

\ mε0J \ τ I

κi =-------------2 (2.129)

(ω2 _ ω2)2 +

τz

Ipoteza de densitate scăzută care ne permite să setăm E1 = E va fi arătată mai târziu să se mențină, cu condiția ca

⅜lzl<ι

Această inegalitate va fi utilizată pentru a simplifica calculul indicelui complex de refracție ñ = κ112. Utilizarea aproximării

(1 + (5)1/2 ≈ 1 + j <5 pentru δ mici înseamnă că

= 1 +

ñ = (l + z)υ2≈ 1 + ~χ= 1 + ⅛(κ- 1)

(ω2 - ω2)2 + ~

τz

Dacă împărțim ñ în părți reale și imaginare scriind ñ = n - i/, obținem expresiile

(2.130)

η — 1

Í n4 \ 2 2ч ɪ-----l(ω0 - ω2)

\ 2mε0 I

= ⅛*r -1) = ʌ------°-÷---

(la¿ - ω2)2

o?

_2

(2.131)

2

(ω2 - ω2)2 + ⅞

T

(2.132)

Constanta

P —

va apărea adesea în ecuațiile care urmează. Aici ωp are dimensiunile frecvenței unghiulare și se numește frecvența unghiulară a plasmei. De asemenea, are o semnificație fizică proprie. Frecvența plasmei este frecvența de oscilație care rezultă dacă o parte a unui gaz de particule libere de sarcină q, masă m și densitate numerică N este deplasată față de restul gazului și față de o distribuție fixă a sarcinii de fond încărcate opus. . În termeni de ωp, Ecs. (2.131) și (2.132) devin

2 (ω0 ~ (O)

°ip 2

n - 1 = ⅜(κr -D = -------------------2 (2,133)

(ω2 - ω2)2 + ~

2 ω

zl ЫP 2τ

z=Λ =----------

(ωj-ω2)2 + -

(2.134)

Conform Eq. (2.45), densitatea fluxului sau altă cantitate legată de energie din fascicul scade exponențial. De exemplu,

S = S0 exp(– 2ωZ -

\ c

Energia Iost din fasciculul luminos intră în procesele ireversibile responsabile pentru timpul de coliziune sau amortizare τ. De exemplu, dacă ciocnirile între molecule asigură mecanismul principal care limitează τ, atunci aceste ciocniri oferă un mijloc de a converti energia electromagnetică în energie asociată cu mișcarea de translație a moleculelor, adică în căldură.

3. Caracteristicile indicelui complex de refracție. Graficele de n și Z față de ω sunt prezentate în Fig. 2.18 pentru cazul ω0τ > 1, care este cel obișnuit pentru nu prea dens.

Fig. 9Λβ Comportamentul părților imaginare și reale ale indicelui de refracție pentru molecula simplă din Fig. 2.17.

un gaz. În această limită, pentru doza ω la frecvența de rezonanță ω0, putem înlocui ω cu ω0 peste tot în ecuațiile. (2.133) și (2.134) cu excepția expresiei (ω2 – ωθ), pe care o putem aproxima după cum urmează:

ω2 - Wq = (ω - ω0)(ω + ω0) ≈ 2ω0(ω – ω0) (2,135)

Astfel, aproape de rezonanță, părțile reale și imaginare ale indicelui de refracție sunt

n = 1 +

2 (ω0 - ω) ωp –л-----

4ω0

(ω0 - ω)2 + -ɪɪ

(2r)2

= 1 + ⅛(κr - 1)

c°2p

/ = 8τω0 (“° - ω)≈ + ɪ

= ¼i

La rezonanță (ω = ω0), Â își ia valoarea maximă

4aχ = ⅛κ,•(max) =

2ω0

Nq2τ

$2m\omega_0\varepsilon_0$

(2.136)

(2.137)

și ambele n și κr sunt egale cu 1. Deasupra rezonanței, n este mai mic decât 1, sub rezonanță este mai mare decât 1. În ecuația. (2.137), Z este exprimat ca o funcție lorentziană a lui ω. Când ω — ωo ÷ l/2τ, / se reduce la jumătate din valoarea sa maximă. Lățimea completă la jumătatea maximă este astfel

Δω = 2 ɪ = ɪ (2,138)

2τ τ

Deoarece am presupus $\omega_0\tau > 1$, lățimea este mult mai mică decât frecvența de rezonanță.

La jumatatea punctelor maxime ale / partea reală a indicelui de refracție n își ia valorile maxime și minime de

, ч<ωcτ</(max),Δω

n(max) = 1 ÷ -e- = 1 H-----— când ω — ω0 — (2,139)

4ω0 22

și

/ • X <ω2τ./(max),Δω

n(mm) = 1 — -ɪ- = 1 — —-—- când ω = ω0 + —- (2,140)

4ω0 22

4. Numerica! Exemple de Optica! Proprietăți. Ca o ilustrare, luați ω0 = 3 × 1015 rad/sec (asociat cu o lungime de undă a Iight la rezonanță de 628 nm), N — 1017/cm3 (corespunzător unui gaz la temperatura camerei la o presiune de 2,5 torr), cu q = — 1,602 X 10-19 C și m — 9,109 × 10-31 kg (pentru electron). Apoi

ω2 = 3,18 X 1026 (rad/sec)2

și

/(max) = 0,53

Aceasta este o valoare prea mare pentru a fi în concordanță cu ipoteza | χ | < 3. Dacă vrem să facem această ipoteză pentru exemplul precedent, trebuie să stăm departe de vârful /, adică trebuie să fim siguri că ω este suficient de departe de ω0 astfel încât Z •≤ 1 și |n — 1 ' < 1.

Ecuațiile (2.136) și (2.137) reprezintă o versiune ușor simplificată a ecuațiilor. (2.133) și (2.134) aproape de rezonanță. În afară de rezonanță, al doilea termen, ω^2/τ^2, în numitorii Ecuațiilor Iater este mic și poate fi neglijat, în comparație cu $(\omega_0^2 - \omega^2)$, care va fi comparabil cu ω⅛. Astfel, departe de rezonanță putem scrie

(2.141a)

(2\ / \

ωp \| ω \

2 Aτ/ z 1 yc°2 ∧1

(ωθ - ω2)2 ∧mɑ - ω2J ωτ

(2.141b)

Deoarece $\omega_0\tau > 1$ și $(\omega_0^2 - \omega^2)$ nu este prea aproape de zero, factorul $|\omega^2/(\omega_0^2 - \omega^2)|(1/\omega\tau)$ este < 1. Aceasta înseamnă că ¿ <ζ |n- 1|, deci că departe de rezonanța n poate fi considerat a fi pur real. Pentru exemplul numeric precedent, valoarea în afara rezonanței lui n va fi dată de

/ ω2 \ -1

n = 1 + 1,77 X 10-5 1-------ɪ) .

\ ωo/ v

Rețineți că deasupra rezonanței n este mai mică decât unitatea, iar sub rezonanță este mai mare decât unitatea. Pe măsură ce frecvența tinde spre zero, indicele tinde spre Iimit static

n(0) = 1 + —¿ [= 1 + 1,77 X 10-5 pentru exemplul nostru]

2ω0

Rețineți că atunci când amortizarea sau coliziunile sunt neglijate, astfel încât lui Z i se permite să meargă la infinit, mărimile complexe α, χ, κ și ñ merg toate la infinit la rezonanță. O valoare finită a lui τ menține aceste cantități finite la $\omega = \omega_0$, dar ele au în continuare o valoare absolută mare acolo. Mai exact, părțile reale ale lui a și χ sunt zero la rezonanță, iar părțile reale ale lui κ și ñ sunt unitate acolo, în timp ce părțile imaginare ale tuturor celor patru funcții devin foarte mari. Spunem că aceste funcții au o „singularitate apropiată” la ω2 = Wq.

În cazul densităților de numere mai mari, funcțiile κ, χ și ñ au aproape Singularități, dar nu la ω⅛, unde polarizabilitatea are și aproape singularitatea. Apoi κ și χ păstrează aceeași formă funcțională pe care o aveau la densități mici. În special, ecuațiile pentru κ_r și κ_i arată exact ca cele scrise mai sus, fiind prea înlocuite cu un nou parametru de frecvență ω2. Părțile reale și imaginare ale indicelui de

refracție devin mai complicate la densități mai mari - atât de complicate încât adesea alegem să oferim rezultatele noastre în termeni de funcție dielectrică. Desigur, când κi este foarte mic, la fel este și Z și putem scrie simplu

n = y/^κr

Discuția despre dielectricii de înaltă densitate va fi amânată până când vom acoperi următoarea discuție despre propagarea undelor în mediile conductoare.

B. Conducerea mass-media

Într-un mediu conducător, cum ar fi un metal sau un gaz ionizat, există un nor de electroni (aproape) liberi care se deplasează printr-un fundal de sarcină pozitivă relativ staționară. Modelul molecular al secțiunii precedente poate fi modificat pentru a descrie acest nou caz prin stabilirea constantei de forță C și, în consecință, a frecvenței de rezonanță ω0 egală cu zero. Putem argumenta (cu oarecare succes, se dovedește) că, pentru un gaz de electroni liberi, câmpul locai care acționează asupra unui anumit electron este mai probabil să fie pur și simplu câmpul macroscopic, chiar și la densități mari, decât pentru un gaz sau lichid compus din molecule. . Moleculele au un volum bine definit pe care îl ocupă cu excluderea altor molecule. Această excludere afectează distribuția altor molecule în jurul unei molecule date - nu este același lucru cu distribuția moleculelor într-un punct arbitrar din spațiu. Astfel câmpul electric mediu care acționează

pe o moleculă dată este probabil să fie diferit de câmpul mediu într-un punct arbitrar din spațiu, în special la densități moleculare mari. Electronii, pe de altă parte, nu ocupă un volum atât de bine definit, iar câmpul mediu văzut de unul dintre ei este mult mai probabil să fie bine aproximat de câmpul mediu într-un punct arbitrar din spațiu.

Calculul clasic al Funcției dielectrice și al indicelui de refracție al gazului electronic se realizează prin stabilirea ω0 = 0 și Ei — E. Apoi,

Nq2

(iω/τ) — ω2 ω2 — (iω/τ)

unde din nou frecvenţa plasmei

/Nq2Vi2 ωp = ------

ymε0 y

a fost introdus.

Pentru exemplul numeric discutat anterior, N a fost 1017/cm3 și ωp ≈ 1,8 × 1013rad/sec. Pentru straturile de gaz ionizat din ionosferă, N este de aproximativ 105/cm3, iar henee ωp≈ 2 × IO7 rad/sec, ceea ce

corespunde unei frecvențe de 3 MHz. Pentru un metal, N este de aproximativ 1022/cm3, iar henee ωp≈ 6 × 1015 rad/sec.

Ca o primă aproximare la frecvențe înalte, unde putem merge adesea la Iimit τ → 00, ipoteza este atunci echivalentă cu presupunerea că gazul de electroni este fără coliziune. Apoi

κ=l-°⅛ (2,143)

ω2

O consecință majoră a acestei rezultate este că indicele de refracție, n — y/κ, este pur imaginar pentru ω <ωp și pur real pentru ω > ωp. În primul caz, avem

ñ = — iZ, Z = ~ ω(2,144)

Un mediu cu un indice de refracție pur imaginar nu poate propaga unde electromagnetice. Am văzut deja că în aceste condiții undele sunt complet reflectate la limita mediului.

În ciuda faptului că nu există propagare a undelor, există penetrarea câmpurilor în mediul conductor. Ecuația (2.37) este aplicabilă în acest caz și dă pentru câmpul electric fizic

E = E0 e~rlδ cos(ωt)

Aici este adâncimea pielii

C

(2.145)

Când ω > ωp (și τ → ∞), funcția dielectrică este pozitivă și ñ este pur reală, ñ = η,

-ωP

n =

ω

(2.146)

Undele electromagnetice se propagă apoi fără pierderi cu viteza de fază

ω

V = ~k

c

n

Pentru un metal, ω_p corespunde frecvențelor din regiunea ultravioletă apropiată a spectrului optic. Ne așteptăm astfel ca lumina vizibilă și infraroșie să fie puternic reflectată, deoarece pentru o astfel de lumină $\omega < \omega_p$, dar lumina ultravioletă pentru care $\omega > \omega_p$ ar trebui transmisă. Acesta este într-adevăr cazul; De exemplu, sodiul metalic este relativ transparent pentru lungimi de undă sub 210 nm. Pentru ionosferă, unde frecvența plasmei de aproximativ 3 MHz este în regiunea frecvenței radio, ne așteptăm ca frecvențe mai mari să fie transmise și frecvențe mai joase să fie reflectate. Acesta este, aproximativ, ceea ce se întâmplă de fapt, dar situația reală este mult mai complicată, în parte din cauza prezenței câmpului magnetic al Pământului.

În cazul mai general al amortizării finite, funcția dielectrică κ Din Ec. (2.142) când este separat în părți reale și imaginare dă

co2 _ co2 + τ 2 — co2 co2 + τ^2~ co2 + τ~2

1

cor

(2.147)

Deoarece

κ = κr- iκi = ñ2 = (n — i/)2 = n2 — ¿2 — i2n¿

găsim

n2 — Z2 = κr

2n | f = κi

(2.148)

Părțile reale și imaginare ale funcției dielectrice și ale indicelui de refracție sunt reprezentate grafic în Fig. 2.19 Pentru $\omega_p = 6\times 1015$ rad/sec și $l/\tau = 3\times 1013$ rad/sec, tipic Pentru un metal simplu precum sodiul . Frecvența critică ω_c la începutul transparenței este acum definită ca fiind Frecvența la care κr = O. Astfel,

1\2

τ

2 2

co/ - ωp

(2.149)

Funcțiile modelului din Fig. 2.19 sunt calitativ similare cu cantitățile reale pentru metale „asemănătoare electronilor liberi”, cum ar fi aurul. Comparați Fig. 2.196 cu datele din Fig. 2.15a.

Hg. 2.19 (a) Părți reale și imaginare ale funcției Jielectrice pentru un metal, (b) Părți reale și imaginare ale indicelui de refracție pentru un metal. Aici ωp = 6 × 1015 rad/sec și l/τ = 3 X 1013 rad/sec.

C. Dielectrice mai dense

Reveniți acum la modelul unui mediu Jielectric ca o colecție de molecule și luați în considerare densități mai mari, astfel încât câmpul locai să nu fie de așteptat să fie același cu câmpul macroscopic. În multe cazuri, este o bună aproximare să scrii

1

E1 = E + -P

3ε0

(2.150)

Termenul

_P

3ε0

se numește corecția câmpului Lorentz locai.

1. Câmpul Lorentz Locai. Unele dintre argumentele pe care le conduc la câmpul Lorentz locai vor fi acum date cu ajutorul Fig. 2.20. Moleculele sunt reprezentate prin cercuri, centrele lor prin puncte, iar pozițiile aleatorii în mediu prin X. Fiecare

* x -V

×

P

P

(A)

(b)

(c)

(d)

(e)

F¡9> 2.20 Ajută la determinarea domeniului local Lorentz.

molecula are un moment dipol indus, care nu este prezentat. Sunt descrise două extreme ale aranjamentelor moleculare - o matrice cristalină complet ordonată în (a) și un fluid dezordonat sau solid amorf în (b). .

Câmpul microscopic Em(r) este câmpul extern de la surse din afara mediului plus câmpul de la dipoli. Câmpul macroscopic E este media lui Em pe măsură ce r se întinde pe poziții aleatorii într-un volum Iimit, adică peste X. Acesta va fi același cu câmpul din interiorul unui continuum dielectric având polarizarea macroscopică P, așa cum este indicat schematic în Fig. 2.20c. Valoarea reală a lui E va depinde de valoarea câmpului extern, de dependența de poziție (și de timp) a lui P și de forma mediului; din fericire, nu este necesar să se producă o formulă explicită pentru E.

Câmpul local Ei este media lui Em(r, deoarece r variază peste toate punctele negre din Fig. 2.20. În acest caz, „câmpul propriu” din moleculă de la punctul în cauză trebuie exclus. Deoarece fiecare moleculă ocupă un volum bine definit, distanța dintre puncte este de cel puțin două ori mai mare decât raza moleculară rm; cele mai apropiate molecule care contribuie la câmp trebuie să fie la cel puțin această distanță de 2 rm. În plus, distribuția moleculelor în jurul unei molecule date va avea simetrie inversă și fi izotropie pentru un fluid sau solid amorf compus din molecule sferice.Pentru anumite structuri cristaline simple, cum ar fi structurile cubice (dar nu pentru toate structurile cristaline), simetria este suficient de mare pentru a fi considerate și izotropie în acest context. Aceste două caracteristici ale distribuția moleculară despre o moleculă dată - o separare minimă 2rm și o distribuție izotropică - se va păstra în timpul procesului de mediere care definește Ei. Rezultatul este că dipolii devin în mod esențial întinși într-un continuum dielectric cu polarizare P. Separarea minimă este păstrată prin având o cavitate în acest continuum de dimensiuni moleculare centrată în jurul lui r, iar distribuția izotropiei poate fi asigurată făcând cavitatea sferică. Atunci Ej este câmpul din centrul acestei cavități, prezentat în Fig. 2.20d.

Două aproximări valide simplifică foarte mult calculul lui Ej. Cavitatea are dimensiuni moleculare și henee este mult mai mică decât lungimea de undă a luminii vizibile. Aceasta înseamnă că P poate fi tratat ca o constantă în regiunea cavității. Aceasta înseamnă, de asemenea, că timpul de propagare a Iuminii în regiunea cavității este mult mai mic decât perioada de oscilație a câmpului de polarizare, astfel încât

Efectele de întârziere rezultate din viteza finită a undelor electromagnetice pot fi de asemenea neglijate.

Dacă cavitatea ar fi umplută cu o sferă uniform polarizată cu polarizarea P, câmpul din centrul ei ar fi atunci câmpul macroscopic E. Fie Es câmpul din centrul unei sfere izolate uniform polarizate. Atunci trebuie să avem

$E_i + E_s = E$

sau

$E_z = E - E_s$

Câmpul E_s (Fig. 2.20β) este ușor de arătat a fi

e•=√-

$3\varepsilon_0$

Aceasta dă Ec. (2.150),

P

E | = E + –

2. Calculul lui χ și κ. Ecuația (2.150) Înseamnă să

P = NaE, = NaE + ~ P

$3\varepsilon_0$

Susceptibilitatea electrică este atunci

P

Na/ε_0

$1 - Na/(3\varepsilon_0)$

(2.151)

iar constanta dielectrică este dată de

$\kappa = 1 + \chi = 1 +$

Na/ε_0

Γ- $Na/(3\varepsilon_0)$

(2.152)

Rezultatele anterioare cu densitate scăzută au fost

N / A

X = – εo

N / A

K=Id----

«0

Ele sunt valabile atunci când al doilea termen din denominai sau din ecuațiile. (2.151) și (2.152) pot fi neglijate, sau când

N / A

$3\varepsilon_0$

Ecuația (2.152) poate fi rearanjată pentru a da

κ- 1 _ Na κ + 2 $3\varepsilon_0$

(2.153)

Aceasta este cunoscută sub numele de ecuația Clausius-Mosotti-Lorentz-Lorenz, care poartă numele celor patru oameni care au derivat diferite versiuni ale acesteia. Iată și alte moduri de a o scrie. De exemplu, putem pune

N =

unde N4 este numărul lui Avogadro și nm este numărul de moli pe unitate de volum. Apoi

κ-l

κ + 2

1

= τ-‰ $3\varepsilon_0$

Unde

<×m = Nл · «

este polarizabilitatea pe mol (polarizabilitatea molară).

Pentru Simplitate vom folosi în mod constant Eq. (2.153), iar pentru concizie o numim ecuația Clausius-Mosotti. Se spune că cantitatea

ɪ (κ - 1) N (κ + 2)

ar trebui să fie o constantă independentă de densitatea numărului N, constanta fiind

A

$3\varepsilon_0$

Dacă formula Clausius-Mossotti este luată în serios, ar trebui să putem calcula a din indicele de refracție în faza gazoasă și apoi predici κ în faza lichidă la o densitate mult mai mare. Acest lucru funcționează adesea foarte bine (în câteva procente) pentru moleculele nepolare din regiunile transparente ale spectrului optic. În regiunile de absorbție,

polarizabilitatea moleculară se poate modifica la densități mari din cauza modificărilor constantei de amortizare τ care rezultă din interacțiunile pe distanță scurtă între molecule - în esență τ devine mult mai scurt.

3. Interpretarea rezultatului dielectric dens. Considerați pentru simplitate cazul unui singur oscilator astfel încât

É

α(ω) =-------------

2   21(0

ωθ — ω + —

τ

Spunem că a are o „singularitate apropiată” la ω2 — ωθ deoarece valoarea sa absolută este maximă acolo. Mai exact, la rezonanță avem

z ∧ <1 τ

≈(ω0) - :-----

ımω0

iar în valoare absolută aceasta este de ω0τ ori I mai mare decât valoarea frecvenței zero a

α(0)

În limita de densitate scăzută, când este

A

1

κ -

q2

2

mωθ

buna aproximare de scris

N / A

+ 3ξ

aceasta aproape Singularitatea lui α la ω2 = ωθ este împărtășită de funcția dielectrică complexă și indicele complex de refracție.

Singularitatea apropiată apare ca o funcție cu vârf ascuțit /(ω) = ⅛κf•(ω) având un maxim la rezonanță și o mișcare dispersivă caracteristică pentru n(ω) – 1 = ⅛[κr(ω) – 1], care îl trimite prin zero la rezonanță. Măsurătorile optice pe un astfel de mediu dielectric diluat ar da o valoare pentru ω0.

În mediile dense în care se aplică corecția câmpului local Lorentz, acesta nu mai este cazul. Ecuațiile (2.152) și (2.124) dau

(2.154)

Unde

„Nq2V”2

poliţist

mε0/

reprezintă frecvența plasmei pe care ar avea-o sarcinile oscilante dacă ar fi eliberate din „arvoarele” lor restauratoare.

Acum κ are o Singularitate aproape la

2 -2 2 0iP

co2 ≡ CO20- ~γ

nu la

2 2

ω – ωθ

Comportamentul dispersiv rezultat în

ω2(ω2 – ω2)

- - a,2 (ω – ω2)2 + -y τ

(2.155)

114 Optica interfețelor Plonor

Flg. 2.21 Imaginea fizică a acțiunii câmpului local.

şi vârf de

2

COpCO

Ki =-----------------1 (2,156)

(ω2 – ω2)2 + ''i

τ

acum apar la $\omega 2 = \omega 2$. Orice măsurători optice ar sugera că ω, nu cυ0, este frecvența de rezonanță a Sistemului; într-adevăr acesta este exact cazul – rezonanța sa mutat în ω.

Frecvența de rezonanță a moleculelor izolate se deplasează astfel în jos atunci când moleculele sunt asamblate în materie densă. Schimbarea rezultă din efectul de netezire al interacțiunilor dipol-dipol cu rază lungă, introdus prin intermediul termenului de câmp Lorentz locai $P/3\varepsilon 0$. Că deplasarea ar trebui să fie în jos poate fi înțeles din Fig. 2.21. Dacă moleculele vibrează împreună, o moleculă dată vede un câmp electric, de la vecinii săi, care tinde să-și mărească momentul de dipol, adică își întinde „arvorul”. Acest lucru slăbește efectul de restabilire al „arvorului”, scade constanta efectivă a arcului și oferă o frecvență de rezonanță mai mică pentru sistemul cuplat.

În mecanica cuantică, o schimbare a frecvenței unui oscilator corespunde unei schimbări a energiei tranziției care îi corespunde. Astfel de schimbări de energie sunt comune în sistemele dense, cu multe particule și poartă numele de „renormalizare”.

4. Caracteristicile costumului de înaltă densitate. Expresiile de mare densitate Ecs. (2.154), (2.155) și (2.156) sunt formal aceleași cu expresiile de joasă densitate Ecs. (2.127), (2.128) și (2.129) pentru κr și κi, cu coo înlocuit cu ώ, dar nu mai este adevărat că

(n - 1) = ⅛(κr – 1) și / = | κi

În schimb, trebuie să folosim Ec. (2,148):

η2 – /2 = κr și In# - κi

Expresiile rezultate pentru n și / sunt complicate și nu vor fi date aici în formă analitică. Comportamentul tipic în apropierea rezonanței este prezentat în Fig. 2.22.

Fig. 2.22 Părți reale și imaginare ale indicelui de refracție lângă o rezonanță pentru medii de înaltă densitate.

Toate rezultatele anterioare de densitate scăzută pentru κr – 1 și κi pot fi acum scrise cu ω în loc de ω0. De exemplu, aproape de rezonanță

ωj(ω - ω)

.   2ώ

κr - 1 =------------– (2,157)

2

ωp

4τώ

κi =-----------—   (2.158)

Aici κi este descris de o funcție lorentziană având un maxim

2

/ ∧ ωpτ

«¡(max) = -½-

ω

si o latime

Δω = -

τ

Partea imaginară κi, așa cum este aproximată de Ec. (2.158), are suprafata integrata

4=Γφ)*> = ^=⅛   (2,159)

J0   ω mωε0

independent de τ. Această expresie este exactă atunci când Δω <≤ ώ, pentru atunci toată contribuția la corne κi când |ω — ώ| < ώ, adică atunci când Eq. (2.157) este o bună aproximare. Pe măsură ce τ crește, vârful pentru κi crește și se îngustează, dar menține aria constantă. Acest lucru se vede prin compararea fig. 2.23a și 2.23b. Maximul și minimul κr stili apar în punctele semi-maximum ale lui κi și se poate dovedi cu ușurință a fi

ω„τ .   _ Δω

κ.(max) = 1 + -ɪ = 1 + ⅛κi(max) când ω = ω------—

2ω   2

2   ∧α)

κr(min) = 1 — -ɪ = 1 - ⅛κi(max) când ω = ώ + —   (2,160)

2ω   2

Fig. 2.25 Părți reale și imaginare ale funcției dielectrice pentru două valori ale duratei τ. În partea (b), T desemnează regiunile transparente, A regiunea de absorbție, ale cărei limite sunt prost definite, iar M regiunea reflexiei „metalice”.

Cu excepția regiunii ω — (Δω/2) ≤ ω < ω + (Δω/2), κr crește cu frecvența crescândă. Partea reală a indicelui de refracție, n, are un comportament similar, deși intervalul de frecvență nu este chiar

același (vezi Fig. 2.22). Această regiune în care n nu crește cu ω, numită regiune de dispersie anormală, coincide cu regiunea de cea mai mare absorbție unde Z este mare. Pentru dispersia uzuală sau „normală”, n crește odată cu creșterea frecvenței (descreșterea lungimii de undă), astfel încât pentru lumina vizibilă, n este mai mare în regiunea albastră a spectrului decât în regiunea roșie.

Rețineți din Fig. 2.23b că atunci când κi are un vârf de rezonanță puternic și îngust, κr este în mod necesar negativ pe un interval de frecvență chiar deasupra rezonanței. Semnificația acestui comportament este cea mai evidentă atunci când τ este foarte lung. Atunci Δω este foarte mic și, cu excepția ω foarte aproape de ω (în câțiva multipli de Δω), putem neglija partea imaginară κi a lui κ și scriem

(D2 _ ω2 + COp – ω2

ω2 – ω2 ώ2 – ω2

Spre deosebire de Eq. (2.157), această expresie este valabilă pentru toate valorile lui ω nu prea apropiate de ώ.

(2.161)

Conform Eq. (2.161), κ este negativ pentru

ω2 < ω2 < ω2 + ω2

Pentru a fi consecvenți cu neglijarea κi, în inegalitatea din stânga ar trebui să menținem ω2 mai mare decât (ω + MΔω)2 = ω2 + 2MωΔω, unde M este de ordinul 5 sau 10. Astfel, avem nevoie de

ω2 + 2MωΔω < ω2 < ω2 + ω2 (2,162)

ca condiție atât pentru o valoare negativă a lui κr, cât și pentru o valoare foarte mică a lui κi. Dacă Ec. (2.162) este să se țină pentru un domeniu diferit de zero de ω, este necesar ca

2 2Mώ

ωτl > 2MωΔω =-------

τ

În acest caz găsim

CI) T

κi(max) = -εr- > 2M

ω

(2.163)

Cu cât valoarea maximă a lui κi depășește această inegalitate, cu atât este mai mare intervalul ω peste care Ec. (2.162) este satisfăcută.

Astfel, în condițiile adecvate tocmai enunțate, avem o funcție dielectrică dată de

κ —

fω2 + ω2 — ω2 ω2-ω2

(2.164)

Indicele de refracție ñ = y/κ este atunci pur imaginar:

/ω2 + ω2 — ω2

1 ----2   ------

\ ω2 —

ω2

1/2

(2.165)

După cum sa discutat în legătură cu Ec. (2.144), un mediu cu un indice de refracție pur imaginar va reflecta total Iight incident pe el din exterior. Penetrarea exponențială a câmpurilor în mediu este însoțită de nicio pierdere de energie.

5. OsciIlatori multipli. Considerăm un mediu care este un amestec omogen de mai mult de un tip de moleculă, iar tipul j are densitatea numerică Nj și polarizabilitatea moleculară α7•. Se scrie apoi polarizarea

p = ∑λ½e,

J

Utilizarea câmpului Lorentz locai cu această formulă conduce la o ecuație Clausius--Mossotti modificată care spune că câtul (κ — l)/(κ + 2) este aditiv:

κ - 1 _ 1 v

k + 2^3⅛∑nλ

(2.166)

Această formulă se ține foarte bine pentru amestecurile de gaze nepolare la densități nu prea mari.

Stili o altă modificare poate fi făcută. Să presupunem că o moleculă dată conține mai multe tipuri de oscilatori. Fiecare astfel de oscilator contribuie cu un termen la polarizabilitatea moleculară

Polarizabilitatea totală este

(2.167)

Constanta,/} se numește puterea oscilatorului J-lea oscilator. Este introdus ad-hoc în teoria clasică a dispersiei. Un calcul cuantic-mecanic al polarizabilității duce la exact aceeași rezultat cu expresii explicite pentru fj în termeni de „elementele matricei” pentru tranzițiile dipolului intramolecular. Fiecare tranziție este identificată cu un oscilator clasic, iar energia de tranziție este dată de constanta lui Planck h ori frecvența circulară a oscilatorului vj = (ωj/2π).

Dacă Ec. (2.167) se folosește cu câmpul local Lorentz, obținem

κ-l I v

TT2 = 4'v∑=ι'

(2.168)

care în mod formal este același cu Eq. (2.166) pentru un amestec de molecule diferite dacă Nfj este înlocuit cu Nj.

Să presupunem că moleculele atunci când sunt izolate au mai multe frecvențe de rezonanță ω2 <≤ < ω2 și așa mai departe. Apoi contribuția Jth

oscilator la polarizabilitatea moleculară

Q2

α,<ω) -

, ï iω ω2 — ω2 H------

τi

este aproape constantă în apropierea frecvenței de rezonanță ω, a oscilatorului Z. Pentru oscilatoarele J la frecvențe I mai mici decât ωl(ω2 < ωl2) avem pentru ω aproape de ωl

αj(ω) ≈

-fjq2

2 mjω

și pentru oscilatoare la frecvențe mai mari (ω2 > ω2)

fj<ι2

2

mjω]

Contribuția unuia dintre oscilatorii, să zicem /th, la κ poate fi descrisă după cum urmează folosind Eq. (2.168). Definiți κ_0, prin

1 N v = 4- Σ αj 3ε0 i≠i

K0l ~

κ0l + 2

Aici κοι este funcția dielectrică în absența celui de-al /-lea oscilator. Funcția dielectrică în prezența celui de-al-lea oscilator este dată de

N

κ + 2 3ε, ɪ a^j + α'

(2.169)

cu

Defini

κ—1

3ε0

OC1 =

Atunci este ușor să arăți asta

Ak =-----

ωι -

cu

Aici Δκ arată o rezonanță la

Ko/-1, N

Koi + 2 3ε0

fl-

mι

, 7 iω

ω2 – ω2 4--

Ak – κ – κ0i

2(κ0ι + 2\2

3)

'ωjλ/' κ0l + 2'

3

3

2

G)pl= ----

mlε0

2

iω

(2.170)

(2.171)

(2.172)

3 \ 3 / Aceasta este deplasată în jos de la ω2 din cauza interacțiunilor vorbind, dipolii care rezonează la ωl interacționează într-un mediu având o funcție dielectrică, din cauza prezenței lui κ0i în Ec. (2.172).

Mult sub rezonanță, Ak tinde spre o constantă

∧ -/iωp√κ0l + 2V – _ 2 I I

ω, \ 3 J

iar mult deasupra lui Ak tinde spre zero. În ambele cazuri, aceste limite sunt atinse în esență înainte ca următoarea frecvență de rezonanță izolată ω1~1 sau ω |+ ι să fie atinsă, din cauza inegalităților presupuse ω2_ 1 < ω? < ω12+1. Deoarece rezonanța este transversală din

printre dipoli. Aproximativ

(2.173)

Rg. 2.34 Reprezentarea funcției dielectrice (numai partea reală) pentru un sistem ale cărui molecule prezintă trei rezonanțe în diferite regiuni ale spectrului. Acest comportament este tipic pentru nemetale.

mai sus, funcția dielectrică crește cu $\Delta\kappa$ | . În măsura în care ml,s sunt aproximativ aceleași, la fel sunt și frecvențele plasmei ω_{jl}. Deplasarea funcției dielectrice $\Delta\kappa_i$ este atunci aproximativ proporțională cu $(\omega_1)^{\wedge\wedge 2}$, conform ecuației. (2.173). Acesta va fi destul de mic pentru frecvențele de rezonanță mari.

Comportamentul rezultat al lui κ este prezentat semicantitativ în Fig. 2.24. O scară iogaritmică este folosită ca abscisă, astfel încât condiția $\omega_2 < \omega_2 <\xi\ \omega_2$ să poată fi satisfăcută și toate comportamentele interesante să fie afișate pe un singur grafic. Numai partea reală κ_r este reprezentată grafic; partea imaginară κ_i va fi diferită de zero în esență numai în regiunile de schimbare rapidă în κ_r - regiunile de dispersie anormală.

Tipul de comportament prezentat în Fig. 2.24 este prezentat de multe sisteme neconductoare reale. Cea mai mică frecvență de rezonanță ω_1 ar putea fi de obicei de aproximativ 2 • 1014 rad/sec (2 = 10 μm) și ar corespunde vibrațiilor interne active în infraroșu ale unei părți a moleculei în raport cu alta. Este adesea numită frecvența fundamentală de absorbție în infraroșu. Adesea apar mai multe astfel de vibrații, dar arătăm doar una. Pentru moleculele diatomice, precum O_2 și N_2, și pentru moleculele monoatomice, precum He, nu există un mod activ în infraroșu; astfel lipsește rezonanța ω_1.

În această secțiune am făcut o imagine generală a proprietăților de dispersie ale majorității materialelor transparente. Dependența de frecvență a lui κ_r sau n este strâns legată de existența regiunilor de absorbție mare. Aceste regiuni sunt

asociat<! cu diferite procese de excitaţie caracteristice. Măsurarea proprietăților optice ale unui mediu oferă o metodă importantă de studiere a acestor procese.

REFERINȚE

Abeles, F., ed. Proprietăți optice ale solidelor. Olanda de Nord, Amsterdam, 1972.

Balkanski, Minko, ed. Proprietăți optice ale solidelor. North Holland, Amsterdam, 1980. Bloembergen, N. Nonlinear Optics. Benjamin, New York, 1965.

Born, Max și Emil Wolf. Principii de optică. Pergamon Press, Oxford, 1980.

Cook, David M. Teoria câmpului electromagnetic. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1975.

Driscoll, Walter G. și William Vaughan. Manual de optică. McGraw-Hill, New York, 1978.

Fowles, Grant R. Introducere în optica modernă. Holt, Rinehart și Winston, New York, 1968.

Garbuny, Max. Fizica optică. Academic Press, New York, 1965.

Harrick, NJ Spectroscopie de reflexie interna. Interscience, New York, 1967.

Hodgson, John Noel. Absorbția și dispersia optică în solide. Chapman and Hall, Londra, 1970.

Jackson, John D. Electrodinamică clasică. Wiley, New York, 1975.

Kline, Morris și Irwin W. Kay. Teoria Electromagnetică și Optica Geometrică. Interscience, New York, 1965.

Lavin, EP Specular Reflection. Elsevier, New York, 1971.

Levenson, Marc D. Introducerea Spectroscopiei Neliniare. Academic Press, New York, 1982.

Marcuse, D. Teoria ghidurilor de undă optice dielectrice. Academic Press, New York, 1974. O'Neill, EL Introduction to Statistical Optics. Addison-Wesley, Reading, Mass, 1963. Okoshi, Takanori. Fibre optice. Academic Press, Londra, 1982.

Seraphin, BO, ed. Proprietăți optice ale solidelor: noi dezvoltări. Olanda de Nord, Amsterdam, 1976.

Shen, YR, Principiile opticii neliniare. Wiley, New York, 1984.

Weaver, JH, C. Krafka și DW Lynch. Proprietăți optice ale metalelor. Fach-Informa-tions-Zentrum, Karlsruhe, Germania de Vest, 1981.

Wooten, Fredrick. Proprietăți optice ale solidelor. Academic Press, New York, 1972.

Yariv, A. Quantum Electronics. Wiley, New York, 1975.

Zernike, F. și JE Midwinter. Optica neliniară aplicată. Wiley, New York, 1973.

Prodlems

Secțiunea 2.1 Unde luminoase în materie

I. Identificați exemple de încărcare liberă, curent liber, încărcare legată și curent legat.

poziție perpendiculară pe plăcile unui condensator piat paralel care este umplut cu un material dielectric a cărui permitivitate este ε. Afișați rezultatele pentru pozițiile atât în interiorul, cât și în exteriorul plăcilor condensatorului.

2. Desenați diagrame calitative pentru câmpul electric E, 3. A locație, izotropie, liniară, deplasarea dielectrică uniformă a cilindrului D, iar polarizarea în funcție de se găsește cu vectorul său de polarizare paralel cu axa.

a cilindrului. Dacă capetele cilindrului au raze a Secțiunea 2.2 Reflexia și transmiterea luminii la an și cilindrul este b lung, găsiți potențialul electrostatic de interfață în funcție de poziția de-a lungul axei - · ,

... ,. dacă ʌ t ,1• . IL Arătați că ecuațiile folosite pentru a determina

cilindru la o distanță r de centrul cilindrului”. 7 .„ . t

/, , . ŋ. . ..coeficienții de reflexie și transmisie satisfacă

(unde r > b, a). Repetați calculul, cu excepția de data aceasta f . r . .i -ɪ,.dacă

.. . . ï j · ï . · - ■ ɪɪ. ｒ. •r•,. / cerinţe de Continuitate a componentelor normale oi

presupunem că dielectnc este sub forma unei uniforme' „ , ,ʌr-

u ｒ j• B și D.ɪ) ~ P Γ.

sphereofradıusα. ʌ × •. 5v

' 12. Deduceți ecuațiile relațiilor Fresnel. (2.61b), 2.62b),

4. Deduceți ecuația de dispersie pentru Iight în materie, <- și a doua formă θf E (2 70a) și (2.7ob). Ec- (2,32).

13. Demonstrați conservarea energiei, Ec. (2.75), pentru σ și π

5. Imaginează-ți o undă plană care se propagă într-o liniară, i pθıarjzație. ~ izotropie, mediu local și omogen care este ' Conductor (Z ≠ O). La un moment dat de timp, cât de mult se modifică amplitudinea lui E de la un maxim la altul pe măsură ce r se modifică?

14, Deduceți ecuațiile. (2.71) și (2.72), care relaționează coeficienții de reflexie și transmisie de amplitudine cu situația în care rolurile undelor incidente și transmise sunt schimbate pentru cazul explicit în care radiația este π gplarizată. ·

15. Creați un grafic cantitativ precis al coeficientului de reflexie de amplitudine în funcție de unghiul de incidență atât pentru polarizarea σ, cât și pentru π în cazul reflexiei interne dintr-un mediu cu un indice de refracție de 1,7 cu indicele de refracție al mediului extern 1,3. .

6. O piscină interioară este iluminată cu lumini roșii în timpul unei prezentări de efecte speciale la un spectacol de apă. Luminile aeriene

sunt prevăzute cu filtre care selectează o bandă îngustă de lungimi de undă centrată pe 600 nm. Dacă indicele de refracție al apei este 1,33, care este lungimea de undă a luminii sub apă? Pentru înotătorii sub apă, ce lungime de undă ar observa?

t jxy 7. Într-un mediu omogen, liniar, izotropic a-1-cm2 Fascicul luminos traversează 1 cm. Dacă coeficientul de absorbție este de 3 × 10^4cm^1 și valoarea inițială a iradierii fasciculului de lumină este de 0,5 W/cm2, găsiți viteza cu care se depune energia în volumul de 1 cm3.

- 4

<sfyı 8.,Care este magnitudinea coeficientului de absorbție (în cm ~ ɪ) care ar determina ca puterea dintr-un fascicul de lumină să fie atenuată la 1/e din valoarea sa de pornire după ce a parcurs 20 nm în mediu? Dacă lungimea de undă în vid a Iight este de 514,5 nm, găsiți partea imaginară a indicelui de refracție în acest exemplu, t^ ∈⅛ -- yf C 7 /

■ c' ' Γ " -

, 9. Indicele complex de refracție al unui material este

4,^ i2' ,pi,nd t,he v√!pl7 dlfuncția electrică și ,heK l⅛ Aflați reflectanța și transmitanța pentru adâncimea clasică a pielii (Iatter exprimată ca o fracțiune din zi^~' lungimea de undă în vid). Care este relația de fază între câmpul electric și cel magnetic? Să presupunem că mediul este nemagnetic. >-_ ɑ = ¿ < -

ʌ 16.. Prezentați o derivație pas cu pas a ecuației unghiului lui Brewster

nn tan θb = — n

17. În reflectarea unui fascicul laser din sticlă de silex (n = 1,7) în configurația externă găsiți valoarea reflectanței polarizate σ la un unghi de incidență egal cu unghiul Brewster.

18. În ce condiții, la incidență normală, reflectanța și transmitanța ar fi egale între ele? Care este valoarea lui R și T în aceste condiții?

V reflexie externă la interfața dintre aer și apă (n = 1,33) când unghiul de incidență este de 50°. Efectuați calculul pentru ambele stări de polarizare liniară din fasciculul incident.

10. Deduceți expresii pentru părțile reale și imaginare ale indicelui de refracție în termenii părților reale și imaginare ale funcției dielectrice, presupunând că mediul este nemagnetic.

20. Folosiți o expansiune în serie Taylor pentru a aproxima reflectanța unei interfețe între doi dielectrici transparenți care sunt foarte asemănători astfel încât n'/n = 1 + ŋ ≈ 1- Efectuați calculul la incidență normală.

21. Luați în considerare Iight la incidență normală pe o suprafață metalică, câmpul electric incident fiind E. Care este câmpul electric chiar în interiorul suprafeței pentru siliciu la 700 nm? Repetați calculul pentru 500 nm. Utilizați proprietățile optice din Tabelul 2.1.

22. Vi se dă o probă pură cu o suprafață lustruită bună dintr-un material opac necunoscut, cu o reflexie mare la o anumită lungime de undă și la incidență normală. Cum ai putea să știi dacă valoarea mare a lui R se datorează unei valori mari a lui / sau unei valori mari a lui n?

23. Dacă există un amestec egal de σ și π Iight în fasciculul incident, care va fi reflectanța în ceea ce privește reflectanța componentei pure?

24. Lumina nepolarizată se reflectă de la suprafața apei (n = 1,33) la un unghi de 60° față de normala suprafeței. Desenați o diagramă polară exactă cantitativ a reflectanței în funcție de unghi, măsurată în raport cu planul de incidență al filtrului polarizant care este utilizat pentru a analiza caracteristicile reflectate. Iight.

[ʃ z25. Luați în considerare cazul transmisiei printr-o placă dielectrică paralelă cu reflexii multiple luate în considerare. Să presupunem că grosimea este suficient de mare încât fenomenele de interferență să nu fie importante. Să se arate că transmitanța plăcii este dată de

IR

1 + R

unde R este reflexia unei singure interfețe dintre aer și mediul dielectric.

; z• 26. Arătaţi prin calculul direct al vectorului Poynting că pentru reflexia internă totală componenta normală are media de timp zero în mediul de transmisie.

Reflexia interna, ca în Fig. 2.9, găsiți dimensiunea întrefierului care produce un coeficient de transmisie de 50% dacă prismele sunt construite din sticlă cu un indice de refracție de 1,6 și lungimea de undă a vidului incident este de 632,8 nm cu polarizare π.

Secțiunea 2.3 Aplicații în optica de suprafață plană

30. Arătaţi că razele din P din Fig. 2.25 care sunt reflectate de oglinda plană MM' par să provină din punctul imagine P'. Localizați P'.

31. (a) Folosind fig. 2.26, demonstrați că o rază reflectată de ambele fețe ale unei oglinzi de colț este trimisă înapoi paralel cu direcția sa inițială.

(b) Localizați punctul de imagine P' din care par să provină razele dublu reflectate dacă P este o sursă punctuală.

32. Două oglinzi piane sunt poziționate astfel încât să se contacteze pe o linie, formând astfel o pană al cărei unghi de vârf este de 40°. O persoană este așezată între oglinzi pe un pian imaginar care conține linia de contact a oglinzilor și care este la o distanță unghiulară de 10o față de una dintre oglinzi. Găsiți numărul de imagini de sine pe care persoana le va vedea și identificați locațiile lor.

27. Se consideră reflexia internă totală la o interfață dielectrică, concentrându-se pe unda piană neomogenă din mediul de transmisie. Aflați suprafețele de amplitudine constantă, suprafețele de fază constantă și viteza de fază.

de la P'

28. Aflați diferența de fază dintre unda reflectată și unda incidentă pentru cazul reflexiei interne la un unghi incident de 70° dintr-un mediu dielectric cu un indice de refracție de 1,6. Efectuați calculul atât pentru polarizările σ, cât și pentru π.

·> 29. În configurația care demonstrează total frustrat

Fig. 2.2«

33. Cât de exact trebuie să fie cunoscute vârful și unghiul deviației minime dacă indicele de refracție urmează să fie determinat la patru cifre semnificative?

'34,, O prismă cu un unghi de vârf de 40o este construită dintr-un material transparent necunoscut. Unghiul de incidență la deviația minimă se măsoară a fi

37.320. Care este indicele de refracție al materialului prismatic?

35. Să se arate că pentru o prismă subțire (unghi de vârf mic) unghiul de deviație minimă 0d este legat de indicele de refracție al prismei n și unghiul prismei a prin

$$0d \geq (n - l)a$$

36. Calculați deviația d produsă de placa paralelă plană din Fig. 2.27 în funcție de n, n', D și θ. ⅛¾) Raza Ä cu incidență de privire pe o prismă Abbe dintr-un mediu cu indice de refracție nx va apărea la unghiul θlTvezi Fig. 2.28).

, (a> Dacă ng este indicele de refracție al sticlei și a unghiul prisinei, arătați că

$$nx - \sin \alpha(n2 - \sin2 \theta')\upsilon 2 + \cos a \sin \theta'$$

(Acest efect este utilizat pentru măsurarea indicilor de refracție.)

l,(V)., Aflați nx pentru ng = 1.600 și a = 45° dacă θ' = + 15° și dacă θ' = -15°.

38. Lumina de la o stea îndepărtată va fi îndoită prin refracție în atmosferă, astfel încât să distorsioneze unghiul aparent de observație (măsurat în raport cu zénitul direct deasupra capului). Luați în considerare că atmosfera este un strat uniform de grosime constantă cu un indice de

refracția de 1,000292. Deduceți o expresie din care poate fi calculat unghiul adevărat.

(a) Să presupunem că èpământul și atmosfera sunt ambele fiat.

(b) Utilizați un model mai realist care să permită curbura pământului.

39. Sunteți capabil să determinați distanța prin unghiul pe care ochii tăi îl măsoară între două raze care provin de la același obiect. Folosind acest concept, găsiți înălțimea aparentă a unui obiect deasupra suprafeței apei dacă vă aflați sub apă privind în sus la obiect. Fie înălțimea reală deasupra apei de 1 m și indicele de refracție al apei de 1,33.

40. O sursă P încorporată într-un mediu cu indice de refracție n emite un mănunchi îngust de raze cu o extindere unghiulară infinitezimală Δ0 în jurul unei raze centrale

având un unghi de incidență pe o interfață plană cu un mediu al cărui indice de refracție este n' (Fig, 2.29). Găsiți poziția punctului imagine P' de la care razele par a fi divergente și calculați răspândirea unghiulară Δ0'.

(a) Luați în considerare numai razele din planul ilustrației.

(b) Luați în considerare doar un evantai de raze în jurul razei centrale într-un plan perpendicular pe planul ilustrației.

41. O particulă mică este încorporată în centrul unui cub de sticlă cu indicele 3/2. Un observator este situat pe prelungirea diagonalei cubului. Schițați o diagramă cantitativ precisă care ilustrează vederea cubului din perspectiva observatorului, inclusiv toate imaginile partidei.

(42√ Un element de fibră optică este în curs de proiectare. Dacă capătul va fi în aer, iar materialul de placare trebuie să aibă un indice de 1,3, atunci care va fi indicele miezului de fibră, astfel încât să fie ușor, indiferent de unghiul de incident, este capturat de fibră?

. t 43. O fibră optică are un diametru al miezului de 15 µm. Dacă indicii de refracție ι" * ai miezului și ai placajului sunt 1,7 și, respectiv, 1,5, găsiți raza minimă a unei îndoituri a fibrei care nu va distruge condiția de reflexie internă. Efectuați analiza numai cu raze meridionale (razele care rămâne în planul îndoirii).

44. O plută circulară cu o rază de 5 ft plutește pe apă (n = 1,33). Presupunând un cer acoperit, dar brighi, găsiți forma și volumul apei de sub plută care nu va fi iluminată. Neglijați împrăștierea și reflectarea luminii în apă.

" 45.1 Într-un experiment ATR dintr-un element cu indice u de refracție 1,71, reflectanța polarizată π este de 0,924 când unghiul intern de incidență este de 60o. Dacă mediul extern are un indice de refracție 1,33, găsiți coeficientul de absorbție al acestuia. mediu.

46. O undă plană Iight cu o lungime de undă de 500 nm este incidentă pe un mediu absorbant la un unghi de 450. Dacă indicele complex de refracție este 3 — /0,2, determinați orientarea și viteza suprafețelor de fază reală constantă chiar în interior. suprafata. Repetați calculul pentru un unghi de incidență de 60o. Cum se compară aceste rezultate cu situația în care indicele de refracție este 3, pur real?

Secțiunea 2.4 Introducere în Proprietățile OpticaI ale materiei

47. Calculați câmpul electrostatic indus în centrul unei cavități sferice într-un mediu dielectric local, izotropic, liniar și uniform polarizat, care este, de altfel, infinită ca întindere. Exprimați-vă răspunsul în termeni de polarizare uniformă P. Câmpul local total în acest caz ar fi câmpul aplicat E plus câmpul indus rezultat din polarizarea mediului.

48. Într-un material în care dipolii moleculari sunt liberi să se rotească, energia Ud a unui singur dipol este legată de câmpul electric local.

Cd=-p•E

Momentul dipol net pe unitate de volum poate fi calculat ca medie statistică cu factorul de ponderare dat de relația Boltzmann

Prin simetrie, într-un material care conține N dipoli pe unitate de volum, polarizarea netă trebuie să fie de-a lungul direcției câmpului electric local (unde 0 este unghiul dintre un dipol dat și câmpul local). Rezultatul mediat statistic pentru p este

Cπ /,~ud \

expl -- - Ip cos 0 d£l

JO \ * /

₽ _ f” /-Ud \

exPl -,— I

I \ k TI

Jo \ 1^b 1 J

Efectuați integrarea pentru a determina rezultatul pentru polarizarea netă a acestui material. (dΩ = unghi solid diferențial = 2π sin 0 ¿0.)

49. Se poate scrie o funcție lorentziană normalizată

7

Valoarea sa maximă a lui l/(πγ) apare la $x = 0$. Lățimea la jumătatea maximă este y. Zona de sub vârf este unitate:

(a) Demonstrați afirmațiile precedente.

(b) Luați în considerare un sistem diluat de N oscilatori pe unitate de volum încorporat într-un mediu dielectric. Oscilatoarele au sarcina q, masa m, frecvența naturală ω_0, puterea oscilatorului f și timpul de amortizare τ, unde $\omega_0\tau > 1$. Mediul în sine nu are absorbție în apropierea ω_0, astfel încât indicele său de refracție n poate fi tratat ca o constantă reală. număr pentru ω lângă ω_0. Arătați că pentru ω lângă ω_0, coeficientul de absorbție este bine aproximat cu

K(ω) =

πNq2 (n2 + 2)2

2mcfi0 9n

1~

(ω - ω0); —

(c) Schimbați variabilele în l/λ = ω/2πc (numerele de undă). Arata asta

(n2 + 2)2 π ∫ 9n λ2p

unde $\lambda_p = 2\pi c/\omega_p$ reprezintă lungimea de undă a luminii în vid la frecvența plasmei

Integrai trebuie să fie preluată în intervalul Număr de undă în jurul vârfului de rezonanță unde K este diferit de zero.

50. Se consideră un oscilator O cu Forța/, masa m, frecvența de rezonanță izolată ω_0, un timp lung de amortizare τ și concentrația N înglobat într-un mediu cu indice de refracție nα0(ω); adică, funcția dielectrică ar fi [nα0(ω)]2 dacă oscilatorii în cauză nu ar fi prezenți. Să presupunem că na0 poate fi tratată ca o constantă pentru toate frecvențele din vecinătatea ω_0 până la zero. Aceasta înseamnă că oscilatorii care contribuie la n00 au rezonanțe la frecvențe mult mai mari decât ω_0.

(a) Scrieți analogii ecuațiilor. (2.157) și (2.158) pentru κ_r și κ_i și Eq. (2.159)

l (mai sus (OQ)

$\kappa_i(\omega)\, d\omega$

0

(b) Fie ω_t frecvența oscilatorului 0 în mediul la care κ_i își atinge valoarea maximă (frecvența de rezonanță în mediu). Să presupunem că N și τ sunt suficient de mari astfel încât κ_r să treacă prin zero aproape de rezonanță. Fie ω_l frecvența la care κ_r devine din nou pozitiv. Să presupunem că $\omega_\iota - \omega_1 > l/\tau$. Arata asta

$\omega_i 2 - \omega 2 = /$

$Nq2(n2a0 + 2)2\ m\varepsilon 0\ 9n2x$

și asta

$\omega 2\ \kappa(0)$

2 = 2^~

ω_t

Această ultimă ecuație este cunoscută ca relația Lyddane-Sachs-Teller.

51. Există o clasă de centre electronice de impurități în cristale numite „centri de culoare”. Coeficientul de absorbție produs de un astfel de centru, „centrul F” într-un cristal de clorură de sodiu, este prezentat în Fig. 2.30. Tratați acest centru ca pe un oscilator de armonie cu masa unui electron încorporată în cristal (cu indice de refracție n = 1,55). Presupuneți că forma experimentală a Iinesă este lorentziană și, din ea, estimați durata de viață a oscilatorului și Forța oscilatorului. Calculați o valoare pentru modificarea maximă a părții reale a indicelui de refracție cauzată de prezența centrelor F în acest eșantion.

52. Pentru modelul unui metal presupus pentru Fig. 2.19, frecvența plasmei $\omega_p = 6 \times 1015$ rad/sec corespunde unei lungimi de undă $\lambda_p = 314$ nm. Calculați valorile numerice pentru adâncimea de penetrare 1/K pentru Iight la incidența normală la aceste lungimi de undă: 349 nm, 314 nm și 286 nm.

53. Luați în considerare o substanță din regiunea de reflexie „metalic” unde κ_r este negativ și κ_i destul de mic.

(a) Arătați că la primul ordin în κ_i, reflectanța R la incidența normală se supune

(b) Calculați (1 – R) pentru un metal cu $\omega_p\tau = 100$ când $\omega/\omega_p = 0{,}8$ și 0,95.

54. O ecuație aproximativă utilă pentru a descrie indicele de refracție a mediilor transparente în vizibil este ecuația lui Cauchy

B

" = л + г

Arătați că această aproximare poate fi derivată din ecuații precum ecuațiile. (2.155) și (2.156) în ipoteza că frecvența Iight este mult mai mică decât frecvențele ωj• ale tuturor oscilatorilor importanți.

55. Când lumina se propagă printr-un mediu transparent care are o absorbție rezonantă la o frecvență mai mică decât cea a luminii, funcția dielectrică este mai mică decât unitatea. Viteza de fază v = c/n va fi mai mare decât viteza lui Iight în vid. Acest lucru nu este inconștient

în concordanță cu principiul relativității speciale, deoarece, pentru a transporta informații, trebuie impusă unei undă de lumină ideală, pur monocromatică, sinusoidală, o formă de modulație sau modificare a amplitudinii. Ca urmare, semnalul Iight trebuie considerat a fi o suprapunere a mai multor componente monocromatice, fiecare călătorind cu viteza v. Cu toate acestea, modulația trebuie să se deplaseze la „viteza de grup”, care este definită ca fiind

J__dfc vg dω

Arata asta

1 1 ω dn

vg vc dω

Demonstrați că viteza grupului este I mai mică decât viteza lui Iight dacă indicele de refracție este de următoarea formă

în regiunea ω > ω0

3 Geometrica! Optica

Optica geometrică este acea parte a opticii care implică formarea imaginii și fenomene asociate care poate fi discutată în cadrul celor trei „legi” ale reflexiei, refracției și propagării rectilinie. Ne vom ocupa în primul rând de reflexia dintr-o oglindă sferică (care ar fi de obicei acoperită cu un strat metalic) și de refracția la o interfață sferică între două materiale optic transparente (ñ pentru ambele medii pur reale). Vom discuta, de asemenea, combinația de elemente optice în instrumente optice și vom descrie detaliile mai multor exemple.

3.1 Roy Tracing

Razele Iight asociate cu o undă electromagnetică plană sunt linii paralele cu vectorul de undă de propagare k. Acestea sunt, de asemenea, perpendiculare pe suprafețele de fază constantă. Pentru frontul de undă mai general, putem identifica încă o suprafață pe care faza este constantă. Pentru o undă care emană de la o sursă punctuală, de exemplu, acestea ar fi sfere concentrice. În acest exemplu, razele ar fi linii radiale îndreptate spre exterior de la sursa punctuală. În cazul general al izotropiei locale, medii liniare, razele vor fi peste

tot perpendiculare pe suprafețele constante de fază și paralele cu vectorul de undă.

Majoritatea sistemelor optice constau dintr-o serie de suprafețe refractoare sau reflectorizante pentru a asigura deviația necesară a razelor de lumină împreună cu opriri și deschideri adecvate pentru a limita extinderea unghiulară și spațială a razelor. Designerul optic trebuie să urmărească adesea calea razelor prin Sistem. Acest lucru se face prin aplicații repetate ale legilor opticii geometrice.

Acest lucru este simplu în principiu, dar în practică poate deveni o sarcină formidabilă dacă este necesară o precizie ridicată. În această secțiune indicăm tipul de calcul

necesar pentru a efectua trasarea precisă a razei printr-o serie de suprafețe refractoare sferice coaxiale. În lucrările ulterioare (secțiunile 3.2-3.5) vom avea nevoie doar de versiuni aproximative ale acestor formule, care vor fi derivate pe măsură ce mergem mai departe.

A. Refractie si reflexie

Să prezentăm mai întâi expresiile generale pentru direcțiile razelor refractate și reflectate în formă vectorială. Știm deja că vectorii de undă pentru undele incidente, refractate și reflectate vor avea aceste forme

(3.1a)

(3.1b)

și

κ" = η - g' c

(3.1c)

â, â' și ă" sunt vectori unitari, iar indicii de refracție n și rí sunt ambii reali (vezi Fig. 3.1). Aceștia trebuie să se afle într-un plan de incidență. Acest plan conține normala suprafeței ή, care aici este definit ca un vector unitar spre exterior în mediul de transmisie (A nu se confunda n și rí cu ή.) Planul de incidență conține și t, (vezi Fig. 3.2a), vectorul unitar tangent la interfață și perpendicular pe ή . Unghiurile θ, θ' şi θ" sunt date de

ή · s = cos θ (3.2a)

ή • = cos θ'(3.2b)

F⅛. 1.2 Descompunerea unei raze la interfață în componente normale și tangențiale.

Rețineți că unghiul reflectat așa cum este utilizat aici este definit ca supliment al unghiului utilizat de obicei în descrierea reflexiei. Definiția noastră aici este mai consecventă cu un formalism generalizat în care toate unghiurile sunt măsurate în raport cu normala suprafeței în același sens de rotație.

Condițiile de potrivire de fază din Capitolul 2 se referă la relațiile dintre k din Ec. (3.1). Acestea implică direcțiile razelor și indicele de refracție corespunzător. Deoarece ω/c este același pentru toate cele trei ecuații. Etichetat (3.1), trebuie apoi să ne concentrăm asupra relațiilor dintre diferitele n-uri. Având în vedere acest lucru, exprimăm ns în termeni de ή și t (vezi Fig. 3.2h):

$$ns = n \cos \theta \, ή + n \sin \theta \, t \quad (3.3)$$

1. Refracția. Pornind de la forma Eq. (3.3) în mediul de transmisie și aplicarea SnelFs Legea celui de-al doilea termen din dreptul randamentelor

$$n's' = n' \cos \theta' \, ή + n \sin \theta \, t$$

Am dori ca acest lucru să fie scris în termeni de ms în mediul incident.

$$ms = м \cos \theta \, ή + n \sin \theta \, t$$

Combinarea celor două ecuații anterioare conduce la rezultatul dorit.

$$< n's' = nè + (n' \cos \theta' - n \cos 0)\eta \, ⅛ \quad (3\text{-}4)$$

Putem determina cos θ' în termeni de cos θ prin legea SnelΓ.v

$$n' \cos \theta'\hat{}= x/n'2 - n2 \; sm2 \; \theta \approx y/ri2 \; \text{-}n2\text{-} \; | \; \text{-}n2 \cos2 \theta \quad (3.5)$$

Astfel, dacă inițial ni se dau doar vectorii s și ή și indicii n și n', determinăm mai întâi cos θ prin Ec. (3.2a) și apoi cos θ, prin Ec. (3,5). Acest lucru ne permite să calculăm s' cu Eq. (3.4).

2. Reflecție. Folosind Eq. (3.3) în mediul incident pentru razele incidente și refractate

$$s = \cos \theta \, ή + \sin \theta \, t \quad (3.6a)$$

$$s'' = \cos \theta'' \, ή + \sin \theta'' \, t \quad (3.6b)$$

Dar legea reflectării în convenția noastră de urmărire a razelor devine

$$O'' = 1800 - \theta \quad (3,7)$$

ceea ce înseamnă că

$$\cos \theta'' = - \cos \theta$$

și Ecs. (3.6a și b) pot fi combinate pentru a produce

s" = s – 2 cos 0 ή)   (3.8)

B. Formarea imaginii

1. Criterii de imagine. Ecuațiile (3.4) și (3.8) formează baza unei abordări vectoriale a geometricului! optica. Ei descriu schimbările de direcție ale unei raze de lumină atunci când întâlnește o interfață.

În multe cazuri, scopul nostru va fi exploatarea condițiilor care duc la formarea imaginii. Un obiect care acționează ca sursă pentru un sistem optic poate fi considerat a fi o colecție de surse punctuale, fiecare având propria sa locație și luminozitate. Pentru a înțelege producția unei imagini a unui obiect extins, trebuie mai întâi să studiem modul în care este imaginea o sursă punctuală.

Figura 3.3 ilustrează procesul de formare a imaginii pentru o sursă în punctul P. Toate razele care contribuie la imaginea de la P1 (din care razele A și D sunt exemple) trebuie să ajungă la P' în fază unele cu altele. (Dacă nu o fac, atunci interferența aleatorie ar duce la o amplitudine totală foarte mică pentru câmpul optic.) Una dintre modalitățile de a realiza acest lucru este de a oferi un mecanism prin care lungimea căii optice este mărită cu o cantitate față de lungimea căii obișnuite. este mai mult pentru razele B și C

o imagine punct real la P'.

decât pentru razele A și D. Acest lucru se putea face prin solicitarea tuturor razelor să treacă printr-o placă de sticlă a cărei grosime varia, fiind mai subțire la margini decât în centru. Aceasta, desigur, este doar o lentilă obișnuită. Putem înțelege funcționarea sa în termenii principiului lui Fermât, care arată că toate razele trebuie să parcurgă lungimi de cale optică echivalente dacă vor fi permise simultan.

O imagine poate fi, de asemenea, formată printr-o combinație de mai multe reflexii și refracții și/sau prin îndoirea continuă a razelor de lumină într-un mediu în care indicele de refracție este o funcție de poziție variabilă. Spunem că P' este o imagine reală a lui P dacă toate razele dintr-un mănunchi Ieaind P și Subtind un unghi solid finit (mai degrabă decât infinitezimal) se reunesc la P' (Fig. 3.3). Dacă mediul de lângă P este uniform și izotropic, suprafața undei σ1 lângă P va fi sferică. În mod similar, suprafața undei σ5 lângă P' va fi sferică, dacă mediul de acolo este uniform și izotropic. (Totuși, suprafețele de unde intermediare σ2 și σ3 pot fi distorsionate.) La P și P' înșiși, suprafețele de undă σ și σ' degenerează până la un punct.

Este posibil ca razele de la P să nu se traverseze efectiv la P'; pot diverge de parcă s-ar întâlni acolo. Aceasta formează ceea ce este cunoscut ca o imagine virtuală la P' (Fig. 3.4). Regiunea de divergență trebuie să apară în medii uniforme, astfel încât suprafața undei σ5 să fie sferică. Altfel, nu există nicio modalitate de a fi sigur că razele de lângă σ5 par să provină din P'.

Fig. 5.4 Imagine virtuală la P'. Razele par a fi divergente de la P'.

Calea optică de la P la σ5 este aceeași pentru razele de aer. Calea aparentă (punctată) de la P' la σ5 este aceeași pentru toate razele, la fel și calea optică aparentă de la P la P'. Acest lucru trebuie clar definit prin relație

OPL (PP') ≡ OPL (PP5) - OPL (PzP5)

- OPL (PP5) - rí P'P5 (3,9)

Semnul minus apare deoarece razele de la P5 sunt îndreptate departe de P'. Această ecuație este valabilă și pentru imaginea reală ilustrată în Fig. 3.3. În ambele cazuri, rí este indicele de refracție lângă σ5.

2. Suprafețe carteziene. Dacă solicităm ca sarcina de focalizare să fie efectuată printr-o singură întâlnire cu o suprafață reflectorizantă sau refractivă în medii altfel omogene, atunci este o chestiune de geometrie simplă să se determine conturul pe care trebuie să-l aibă acea suprafață. Condiția poate fi stabilită pentru lumina incidentă monocromatică dintr-un punct obiect la o distanță fixă de suprafață. O astfel de suprafață se numește suprafață carteziană.

Suprafețele carteziene pentru reflexie sunt secțiuni conice. Le ilustrăm în Fig. 3.5, dar lăsăm cititorului dovezile că ele sunt într-adevăr ceea ce pretindem noi.

V

(A)

Fig. 3.5 Suprafeţe carteziene pentru reflexie: (α) Elipsoid; P și P' la focare, (b) Paraboloid; P la focalizare, (c) Hiperboloid; P și P' la focare, (d) Plan.

Fig. 3.6 Suprafețe carteziene pentru refracție: (a) Imagine reală, (b) Imagine virtuală, (c) Imagine reală, obiect la infinit. (Excentricitatea elipsoidală e = n/ri < 1.) (d) Imagine virtuală, obiect la infinit. (HiperboIoid.)

Suprafețele carteziene pentru refracție nu sunt în general curbe simple. În Fig. 3.6a este prezentat cazul unei imagini reale. În acest caz, nPPs + n'PsP, = constantă, iar curba este un ovoid cartezian de revoluție. Figura 3.6b ilustrează formarea imaginii virtuale pentru care ecuația, bazată pe Ec. (3,9)

OPL (PP') = nPPs - n'~PζP' (3.10)

tine. Suprafața de refracție poate fi uneori sferică în acest caz.

Dacă obiectul sau imaginea se află la infinit, atunci suprafețele carteziene pot fi secțiuni conice, așa cum este indicat în Fig. 3.6c și 3.6d.

C. Refracția și reflexia la suprafețele sferice

Suprafețele carteziene bune sunt greu de produs. Majoritatea covârșitoare a operațiunilor de focalizare din sistemele optice sunt efectuate de suprafețe care sunt secțiuni de sfere. Imaginile rezultate sunt, prin necesitate, doar aproximative.

1. Refracția la suprafețe sferice. Să aplicăm forma vectorială a legii de refracție, Ec. (3.4), în cazul în care interfața este descrisă de o secțiune a unei sfere. Mediul de pe partea incidentă a interfeței este Caracterizat prin indice de

Fig. 3.7 Geometrie pentru refracția la o interfață sferică.

refracția n și pe partea de transmisie a interfeței prin ri. Materialele optice sunt în caz contrar locale, izotropice, liniare și neabsorbante. Situația este prezentată în Fig. 3.7.

Vârful este în punctul V unde suprafața intersectează axa z la origine. Alte puncte importante sunt identificate prin vectori care pleacă de la origine. Acestea sunt specificate în termenii componentelor lor de-a lungul x, y și z. Suprafața de refracție sferică are raza de curbură R și centrul de curbură în punctul C. Un vector care identifică C are componente

C:(0,0, R)

Raza incidentă întâlnește suprafața în punctul P, identificat prin vector

P:[x, y, (R - v R2 - x2 - y2)]

Acest lucru este stabilit prin cerința ca PC = R (sau ca mărimea CP să fie egală cu R).

Normala suprafeței de la P este un vector unitar îndreptat de la P spre C. Este dată de

. C-PC-P

1 IC – Pl R

Cu componente

Ox + θɪ + Oz = 1

Fig. 5.β Geometrie standard care arată un vector unitar al direcției razelor cu cosinusurile sale de direcție.

Introducem acum Componentele (numite cosinus de direcție) ale vectorilor unitari s și s' (vezi Fig. 3.8):

s are Componente (α, β, y) cu lungimea a2 + β2 + γ2 = 1

s' are componente (a', β', γ') cu lungimea a'2 + β'2 + y'2 = 1

Putem scrie componentele x și y ale ecuației. (3.4) prin utilizarea ecuațiilor. (3.11) și (3.12)

(3.12a)

(3.12b)

n'<x' = na —

n'β' = nβ —

(ri cos θ, — n cos θ)

-----------"----------- X

(3.13a)

(ri cos θ, — n cos θ)

y

(3.13b)

R

R

n'y' = ny +

(n' COS θ' — ∏ COS 0)Ί Z—5-----5-----ɪ

-------------------Jr2 -X2-V2

(3.13c)

R

[Rețineți că y și y' pot fi întotdeauna determinate din condiția de normalizare, Eq- (3.12)]

Deoarece cos θ = (s·ή), putem folosi ecuațiile. (3.11) și (3.12) pentru a determina cos θ în ceea ce privește cosinusurile de direcție oc, β oís și Coordonatele transversale x, y ale lui P: .

(Γ /χ \ 2   / v \ 2I   ) 1/2/γQj \   /υβ \

eos O = I 1 - αŋ - θθ 1(1 - «2 - - (ɪ) - (J) (3.14a)

Determinăm apoi cos θ' prin Ec. (3,5)

rí cos θ' = λ/n'2 — n2 + n2 cos2 θ   (3.14b)

şi a' şi β' prin utilizarea ecuaţiilor. (3.13a, b). Avem și relația evidentă

$x' = x$ (3,13d)

$y' = y$ (3.13e)

între coordonatele transversale ale razei imediat după refracție și coordonatele sale chiar înainte de refracție.

În ceea ce privește convențiile semnelor, observăm că s-a făcut presupunerea implicită că suprafața de refracție este convexă spre partea incidentă, adică că Fis pe latura incidentă a lui C. Ecuațiile (3.5), (3.13) și (3.14) sunt valabile. de asemenea, pentru o suprafață concavă, adică una cu C pe partea incidentă a lui V, cu condiția ca R să fie definit ca fiind negativ în acest caz și cu condiția ca cos θ și cos θ' să fie definite a rămâne pozitive. Aceste convenții necesită o rescriere a pașilor intermediari ai derivării; rezultatele rămân valabile.

Ecuațiile (3.13) pot fi considerate ca ecuațiile unei transformări, notate simbolic cu ¿%, pe care le suferă cosinusurile direcției α, β și coordonatele x, y ale unei raze în timpul unei singure refracții.

2. Reflexia la suprafete sferice. Acum luați în considerare reflexia pe o suprafață sferică verticală cu vârful Fand centru de curbură C, ambele pe axa z, așa cum se arată în Fig. 3.9. Raza de curbură, R, va fi considerată pozitivă dacă Fis pe partea incidentă a lui C (cum a fost pentru refracție). Raza incidentă, s, întâlnește suprafața în punctul P specificat de vector

P:(x, y, z) = [x, y, (R — y/r2 — x2 — y2)]

moment în care normala suprafeţei ή are componente

Ca înainte.

Fi<>. 5.9 Geometrie pentru reflexia la suprafata sferica.

Direcția razei reflectate, s" este dată de ecuația (3.8). Ajungem la transformarea reflexiei la o suprafață sferică:

a" = a + 2 cos θX(3.15a)
R
β" = β + 2 cos θ~ RУ(3.15b)
y" = y- ~2 cos θ~ R^R2 — x2 — y2(3.15c)
x" — X y" — y (3.15d) (3.15e)

Avem, de asemenea, relația auxiliară pentru a determina cos θ din ecuația. (3.14a).

3. Translație între suprafețele sferice. Înainte și după refracție sau reflexie la o interfață, razele vor călători nedeviate în linii drepte până când vor întâlni alte suprafețe. Va fi convenabil să descriem această propagare liniară ca o transformare matematică într-un mod compatibil cu prescripția noastră pentru refracție și reflexie.

După cum se arată în Fig. 3.10, luăm în considerare două suprafețe sferice refractoare ale căror

Fig. 5.10 Translația între două interfețe sferice.

vârfurile sunt pe axa z situată la origine și la D12, respectiv. Fie ca intersecția unei raze cu prima suprafață să fie la P1 specificată de vector

P1:!>;, y1', (R1 - J R21 -i21- E)]   (3.16a)

Direcția razei pe partea de transmisie a lui P1 este

s>(α'ι, β \ ,y'l)   `(3.16b)

Cantitățile corespunzătoare pentru a doua suprafață sunt

P2 : |>2 , У2, (D12 + r2 - √P2 - x2 - y2)l   (3.17a)

și

MM2>T2)   (3.17b)

Primele din ecuațiile. (3.16a și b) sunt o indicație că intersecția și direcția razelor sunt evaluate după interacțiunea optică cu interfața. Coordonatele din Ecs. (3.17a și b) sunt fără numere prime, deoarece acestea sunt evaluate înainte de întâlnirea cu a doua interfață.

La P2, direcția razei este aceeași ca după refracție la P1

α2 = a1   (3,18a)

și

β2 = β'1   (3.18b)

Distanța dintre P1 și P2 este dată de P12, unde

Rh = (x2 - x'i)2 + (У2 - y'i)2

+ [D12 + R2- R1- Jr^ - X2 - y2

+ √Pi-x'12-yι2]2   (3,19)

În convenția noastră, semnul lui P12 trebuie să fie același cu semnul (z2 – z1).

Transformarea translației poate fi exprimată în formă vectorială ca

$P2 = P1 + Λ12s1$ (3,20)

sau sub formă de componentă ca

$x2 = x'ι + Λι2≈,ι$ (3.18c)

și

$y2 = y \ +Ri2β'ι$ (3.18d)

Ecuațiile (3.18) împreună cu distanța Eq. (3.19) formează transformarea de translație de la suprafața sferică 1 la suprafața sferică 2. Aceasta o putem simboliza ca ʃ.

4. Sisteme cu interfețe multiple. Formalismul matematic precedent poate fi aplicat în mod repetat pe măsură ce raza își face drum prin sistemul optic. Aplicarea acestei proceduri la o selecție de raze incidente (de exemplu, cele care emană de la un obiect în direcții diferite) va oferi informații exacte despre locațiile razelor rezultate. Acest tip de calcul este cel mai convenabil realizat de algoritmi de computer interactivi care permit ajustarea parametrilor care descriu suprafețele optice. Majoritatea designului modemului Iens este realizat în acest fel.

Tabelul 3.1 rezumă transformările pentru refracție, reflexie și translație care se aplică interfețelor sferice.

3.2 Optica paraxiala

Deși ecuațiile de urmărire a razelor sunt exacte, ele oferă o perspectivă fizică mică asupra procesului de formare a imaginii. Pentru a ajunge la un rezultat analitic simplificat, sunt necesare unele aproximări. Cazul de ordinul întâi este util ca punct de plecare pentru calcule mai exacte, dar este adesea suficient de bun pentru a fi folosit pentru multe aplicații așa cum este. Acest lucru este valabil atunci când o axă optică poate fi definită pentru sistemul studiat și când toate razele de lumină și toate suprafețele normale sunt suprafețe de refracție sau de reflexie formează unghiuri mici cu axele. Astfel de raze se numesc raze paraxiale. În esență, a fost aproximarea paraxială pe care a folosit-o Kepler când a formulat pentru prima dată teoria telescopului și a lupei.

A. Refracția

1. Aproximări. Teoria de ordinul întâi care aproximează formulele exacte de trasare a razelor din secțiunea 3.1 rezultă din condiția ca cosinusurile direcției a și β să rămână mici și să rămână aproape de unitate. Aceasta este echivalentă cu cerința ca θz din Fig. 3.8 să rămână mic. În mod similar, toate dimensiunile transversale x și y sunt tratate ca fiind mici în comparație cu razele de curbură R. În cadrul acestor limitări putem înlocui Coordonatele exacte ale interceptării razei cu suprafața optică la P cu (x, y, 0). Normala suprafeței în acel

punct devine (— x/R, —y/R, 1). Unghiurile θ și θ' sunt de asemenea considerate mici, astfel încât SnelTs Iaw devine

'■>   ηθ — rí θ'(3-21)

/

\ și

cos θ = 1, cos θ' = 1 (3.22)

Ecuațiile transformării de refracție (3.13) devin apoi următoarele ecuații liniare:

Tabelul 3.1. Transformări Ray-Tracing: Interfețe sferice

Refractie la?

y' = y

Γ(n' cos θ' — n cos θ

ría! = și — :.

R

n'β' = nβ —

(ri cos θ' — n cos θ)

y

R

Γ(n' cos θ' — n eos θ) n'y' — ηγ +

.2   „2

R

Reflecție la?

y =y

2 cos θ

R

β" = β +

2 cos θ

U

R

2 cos Th

R

și rí eos θ' = χ/n'* 2 — n2 + n2 cos2 0

Traducere Jr12

×2 = ɪɪ ^f^ Ri2&l

yr = yi ÷ ^12β1

a2 = otɪ

β2 = βi

U2 = Vi

unde R22= (x2 - x'1)2+ (y2-y'tf+ (z2_ z'1)2

Cu ■ (z2 - Zj) = (D12 4- R2— R1—x/Rj —x2—+ 4/R2 — χ'2l —y'2)

signof R12= semnul (z2— zɪ)

, , h — h

na = na H-------X *

R

,o, o η —rí η β =nβ + _ y

x' = X *

y' = y

(3,23)

Rețineți că aceste ecuații rămân valabile în Iimit R → oo.

Ecuațiile de translație se simplifică și ele sub aceste aproximări. Ecuația (3.19) dă pur și simplu R12 = D12. Transformarea de translație a Eq. (3.18) devine

α2 = a'1 *

Pr — β'ι

X2 = ×'1 T D12^1 *

(3-24)

$y_2 = y_{,\iota} + D_{12}\beta'_1$

Rețineți că în Ecs. (3.23) și (3.24) x și a într-un punct dat depind numai de x și a în alte puncte, nu deloc de y și β. Cu alte cuvinte, perechile de variabile (x, a) și (y, β) sunt decuplate una de cealaltă și pot fi tratate independent. Un alt mod de a spune acest lucru este că proiecțiile razelor pe planurile xz sau yz se comportă independent. (Acest lucru nu este adevărat în teoria exactă.) Din cauza acestei independențe, nu mai este necesar să se efectueze calcule ale ambelor proiecții simultan. Alegem aici să ne concentrăm asupra proiecției în planul xz. Proiecțiile se comportă ca și cum razele s-ar afla de fapt în planul xz, adică ca și cum y și β ar fi zero. Astfel de raze care se află într-un singur plan care conține axa z se numesc raze meridionale.

Când facem ipoteza razelor meridionale care se află în planul xz, suntem aduși la situația bidimensională prezentată în Fig. 3.11 și 3.12 pentru refracție și, respectiv, translație.

Cosinusul direcției a este în general definit ca fiind cosinusul unghiului pe care îl formează raza cu axa x. Dacă razele se află în planul xz, acesta devine și sinusul unghiului pe care îl formează raza cu axa z. În aproximarea razelor paraxiale, sinusul acestui unghi este egal cu unghiul însuși, așa cum se arată în Figurile 3.11 și 3.12. Adică $a = \cos \theta x = \sin \theta z = \theta z$. Părțile relevante ale transformărilor din ecuațiile. (3.23) și (3.24) sunt marcate cu asteriscuri (*).

Aplicarea succesivă a acestor aproximări ne permite să exprimăm transformarea dintr-un punct general P0 pe partea incidentă a unei suprafețe refractoare la un punct final P2 în mediul de transmisie. Figura 3.13a prezintă situația actuală și Fig. 3.13h aproximarea Iinearizată a aceleiași situații. Trebuie să transpunem de la P0 la P1 unde raza este transformată prin refracție în

Fig. 5.11 Refracția în limita paraxială pentru raze meridionale. Separarea dintre axa x și punctul P este neglijabilă.

asumă un nou unghi. La distanța D12 transformarea de translație ne va spune la ce înălțime se găsește raza finală. Avem,

— $x_0 + D_{0}icc_0$

= «o

(Înălțime nouă)

> (Unghi nou)

$Cx_2 - x_1 + D_{12}\alpha_1$

12Λ ,

[$\alpha_2 = a_1$

(Înălțime nouă)

sau, punându-le împreună într-o singură transformare,

n — rí

«o

Fig. 5.12 Translația în limita paraxială.

(3.25a)

3.2 Opfici paraxiale ή 45

(A)

a2

(b)

Smochin. 5.13 Refracția plus translația lângă o interfață sferică: (a) situație fizică; (b) aproximare paraxială.

Observați dependența liniară a x_2 și α_2 pe X_0 și α_0. Acest lucru decurge din dependența liniară a fiecărei transformări individuale și va fi exploatat când vom introduce formalismul matriceal puțin mai târziu.

2. ImageFormation. (a) Locația imaginii. Dacă P_2 este o imagine a lui P_0, atunci orice rază care iese din P_0, indiferent de valoarea lui α_0 (atâta timp cât este mică), ar trebui să ajungă la P_2. Aceasta înseamnă că X_2 trebuie să fie independent de tx_0; adică coeficientul de ¾0 din Ec. (3.25a) trebuie să dispară dacă P7 trebuie să fie o imagine a lui Pn. Starea imagistică devine astfel

D

oi

nP12 (n - nfP0lP12

ri n'R

Aceasta poate fi rearanjată pentru a obține ecuația binecunoscută

n' n √⅜⅛√ /θε/ɔ

P12 D0Dacă^'• ,.·

(3,26)

Convenția semnelor pe care am folosit-o este următoarea.

1. Razele de lumină se deplasează de la stânga la dreapta (în direcția + z).

2. R_1 este pozitiv dacă V_1 este la stânga lui C_1, adică dacă suprafața refractoare este convexă spre stânga; În caz contrar, R_1 este negativ.

3. D_{01} este pozitiv dacă P_0 este la stânga lui V_1; în caz contrar, D_{01} este negativ.

4. D_{12} este pozitiv dacă P_2 este la dreapta lui V_1; în caz contrar, D_{12} este negativ.

5. Unghiurile α_0, a1 și așa mai departe sunt pozitive dacă direcția razei se obține prin rotirea axei +z în sens invers acelor de ceasornic printr-un unghi ascuțit; în caz contrar, unghiurile sunt negative.

6. Distanțele x_0, x_1 și așa mai departe sunt pozitive dacă în sus, ,negative dacă în jos.

Este util să rețineți că atunci când $D_{01} = \infty$, imaginea va fi localizată în punctul respectiv

^12 —fl

n'R1

rí — n

(3.27a)

iar dacă $D_{12} = +\infty$, obiectul trebuie să fi fost localizat în punct

Dqi

≡/ι =

nR1

rí — n

(3.27b)

Aceste distanțe se numesc imagine și ele, putem scrie Ec. (3.26) sub forma

distanţele focale ale obiectului, respectiv. Folosind

rí n rí — n rí n ^12 Λ)l Rl fl fl

(3,28)

(b) Mărire laterală. Acum că am făcut x_2 în ecuația. (3.25a) independent de α_0, rămânem cu o ecuație de forma $x_2 = m_x x_0$, unde Tnagnificarea laterală m_x este dată de

n — n, D17 _D17 (n — rí rí \

m'=-rΓ'V +1 = V (ɪ +)

Aceasta este mărirea obișnuită care oferă dimensiunea imaginii în ceea ce privește dimensiunea obiectului. Folosim Eq. (3.26) pentru a exprima D12 în termenii D01 și a obține

n — rí   rí — η η

Ri R1 D01

Henee, dacă D01 și D12 sunt ambele pozitive, mx trebuie să fie negativ; aceasta înseamnă că cu x0 pozitiv, x2 va fi negativ sau P2 va fi sub axa z dacă P0 este deasupra acesteia. Acest lucru este prezentat în Fig. 3.14.

(c) Mărirea unghiului de rază. Se consideră două raze care ies din P0 cu separarea unghiulară Δαo și ajung la P2 cu separarea unghiulară Δα2, așa cum se arată în Fig. 3.15a. Una dintre raze ar putea traversa în mod echivalent axa z, iar cealaltă ar putea fi axa însăși, așa cum se arată în Fig. 3.15i>. Mărirea unghiului razei ma este dată de

după cum se vede din ilustrații. Acest rezultat poate fi obținut și din Ec. (3.25b) luând diferențe pentru x0 fix. Mărirea unghiului de rază este un concept util atunci când trebuie luată în considerare răspândirea unghiulară a razelor care formează imaginea.

Fig. 5.14 Inversarea imaginii când distanța atât la obiect, cât și la imagine sunt pozitive.

Din Ecs. (3.29) și (3.30), obținem o relație utilă numită ecuația Lagrange sau Smith-Helmholtz:

; X2 Δα2 n , i —— = — | sau n x2Δa2 = nxoΔao sau nx2a2- nx0a0 x0 Aa0
n ,

O altă versiune a acestui lucru este

(3,31)

(3,31')

Fig. 5.15 Mărirea unghiului razelor: (a) separarea unghiulară generală a razei; (fi) separarea unghiulară de axa optică.

care spune că o mărire liniară mare poate fi obținută numai în detrimentul unei mari demăriri a unghiurilor razelor, adică doar având o divergență unghiulară mult mai mică la imagine decât la obiect.

Când condiția de formare a imaginii (3.26) este îndeplinită, putem folosi ecuațiile. (3.27), (3.29) și (3.30) în ecuațiile. (3.25a și b) pentru a obține pentru transformarea de urmărire a razelor de la punctul obiect P0 la punctul imagine paraxial P2 următoarea simplă rezultat:

(3.32a)

(3.32b)

(J) Obiect virtual și imagine. Formulele precedente (3.25-3.32) sunt valabile când

D01 și/sau D12 este negativ. O valoare negativă pentru D12 înseamnă că imaginea este la stânga lui V1; razele de lumină din cel de-al doilea mediu sunt divergente ca și cum ar veni dintr-o imagine P2 în stânga vârfului V1, așa cum se arată în Fig. 3.16α. Aceasta se numește imagine virtuală.

Dacă D01 este negativ, razele par a fi convergente la P0 la dreapta vârfului. Acesta este numit un obiect virtual și este prezentat în Fig. 3.16⅛. Un Iens auxiliar (prezentat liniuțatj este necesar pentru a pregăti razele convergente pentru un astfel de obiect.

B. Reflecții

1. Aproximări. Acum facem aceleași ipoteze ale razei paraxiale pe care le-am folosit în secțiunea anterioară și le aplicăm ecuațiilor de reflexie din secțiunea 3.1C2. Rezultatul este că Ecs. (3.15) deveni

< = «1 + Б~x1 β1 = βt+fyt   (3.33a) (3.33b)
/i=y.-2^⅛^≈-l   (3.33c)
x'i = X1   (3,33d)
Уi = Уi   (3.33e)

Ecuațiile de translație rămân aceleași ca în cazul refracției paraxiale. Perechile de variabile (x, a) și (y, β) sunt decuplate una de cealaltă și, ca și înainte, alegem să lucrăm cu perechea (x, α). Acest lucru este echivalent cu lucrul cu raze meridionale aflate în planul xy. Transformarea de translație Jr01 și Jr12 și transformarea de reflexie J?] care descriu situația prezentată în Fig. 3.17 sunt date de

(x2 = x'[+ D12<

12 | α2 = a1

Rețineți că, în Fig. 3.17, raza de curbură R este negativă, la fel ca și unghiul reflectat <.

Transformările tocmai prezentate pot fi combinate pentru a da transformarea globală de la variabilele pereche (x0, α0) la perechea (x2, α2):

/ 2D12 \ /2D0lDl2 \

x2 = I ɪ Í—d lxo + I D01 + D12 H-- Ia0

\ K1 / \ K1 / 2 /2D01\

a2 = ^-χo + lηζ~+ 1 Ia0

(3.34a)

(3.34b)

2. Formarea imaginii, (a) Locația imaginii. Continuăm să folosim linia de raționament folosită în cazul refracției. Condiția pentru formarea imaginii este ca X2 să fie independent de α0 sauʌ

1 12

D12 ^01 &1

(3,35)

Lungimea focală f este definită de

Fig. 5.17 Reñecția paraxială a razelor meridionale: (a) raza incidentă; (b) raza reflectată.

(3,36)

Dacă D12 — + ∞, atunci D01 = f și invers.

Convenția semnelor pentru reflecție este următoarea.

1. Direcția pozitivă a razelor este de la stânga la dreapta înainte de reflectare și de la dreapta la stânga după reflexie.

2. R1 este pozitiv dacă V1 este la stânga lui C1.

3. D01 este pozitiv dacă P0 este la stânga lui V1.

4. D12 este pozitiv dacă P2 este la stânga lui V1.

5. Unghiurile α0, a1 sunt pozitive dacă direcția razei se obține prin rotirea axei + z în sens invers acelor de ceasornic printr-un unghi ascuțit.

Fig- 3ЛО Mărirea laterală și mărirea unghiului de rază în reflexie.

6. Unghiurile α,1', a2 sunt pozitive dacă direcția razei se obține prin rotirea axei — z în sensul acelor de ceasornic printr-un unghi ascuțit.

(Convențiile semnelor din (5) și (6) sunt concepute pentru a păstra interpretarea α0, a1, a], a2, ca componente x ale vectorilor unitari de-a lungul razelor.)

(h) Mărire laterală. Odată ce condiția de imagistică (3.35) este îndeplinită, putem calcula mărirea laterală cu

(3,37)

Din nou, atât pentru o imagine reală, cât și pentru un obiect real (D12 și D01 ambele pozitive), imaginea și obiectul nu pot fi ambele erecte sau ambele întors (Fig. 3.18).

(c) Mărirea unghiului de rază. Putem obține o expresie pentru unghiul de rază

mărire de la a doua dintre ecuațiile. £3,34) dacă punem x0 = α (Fig· 3.18).

α2 ^a =

a0

Dqi

Di2

(3,38)

Ecuațiile Lagrange sau Smith HelmhoItz devin atunci

I4

/ X2 «2 = ɪ

x0⅝

(d) Obiect virtual și imagine. Convenția noastră de semne este astfel încât obiectul este real când D01 este pozitiv, iar imaginea este reală când D12 este pozitiv. Obiectul este virtual când D01 este negativ, iar imaginea este virtuală când D12 este negativ.

3.3

Metode Motrix

Ecuațiile de trasare a razelor ale opticii paraxiale sunt liniare în variabilele x și α. Ecuațiile individuale de refracție și translație sunt liniare, iar transformarea globală rezultată este, de asemenea, liniară. Ecuațiile unei transformări liniare sunt scrise foarte convenabil folosind matrici, iar rezultatele mai multor transformări liniare consecutive pot fi scrise compact în termeni de produs al matricelor individuale. Metoda matricială face posibilă discutarea teoriei optice paraxiale a Ienselor simple și compuse și a Sistemelor Iens cu un minim de matematică! manipulare Este, de asemenea, o metodă

adecvată pentru demonstrarea unor teoreme importante despre sistemele optice paraxiale.

A. Matrici de transformare

1. Refracția. La o suprafață sferică (identificată ca suprafață 1) între mediile n (pe stânga) și n1 (pe dreapta) cu raza de curbură R1, Ecs. (3.23) furnizează transformarea refracției paraxiale

, , în - n' \   ™

n α1 = nα1 + —-— Jx1 = na1 — w \ ×ι \ ∧i /

(3.39a)

(3.39b)

Unde,

0>1≡

(3,40)

se numește puterea interfeței. Definiți matrice rază-coloană

(3.41a)

și

(3.41b)

asociate cu părțile din stânga și, respectiv, din dreapta ale interfeței. Definiți, de asemenea, o matrice de refracție

Ri ≡

(3-42)

Transformarea de refracție poate fi apoi scrisă sub formă de matrice ca

r'i = R1 rI

2. Traducere. Ne preocupă operația de translație care transformă o rază din partea dreaptă a unui element optic printr-un spațiu omogen Caracterizat prin indicele de refracție n, în partea stângă a unui al doilea element optic. Din Ecs. (3.24) avem

α2 = a'1

definind astfel matricea de traducere

3. Operații combinate. Aceste transformări pot fi combinate pentru a da transformarea globală prin mai multe elemente de refracție și transmisie. De exemplu, în Fig. 3.19 raza r1 este schimbată în r'2 prin pași succesivi:

r1 → r,1 → r2 → r'2

Folosind formalismul matriceal, acesta poate fi scris ca

Γ2 — — Dl1

Unde

IVI ≡ R2T12R1 (3,44)

este matricea sistemului care transformă raza din partea stângă a interfeței 1 în partea dreaptă a interfeței 2.

În cazul general al unui număr arbitrar de elemente optice, în cadrul aproximării paraxiale, transformarea ar arăta ca o generalizare a ecuației. (3.44), și anume

r, = IVIr (3,45)

Aici M este produsul matriceal al tuturor matricelor R pentru elementele de refracție și al matricelor T pentru translația între elementele scrise în ordine inversă. Adică, pentru că lumina trece de la stânga la dreapta prin sistem, succesiunea matricelor trebuie aranjată de la dreapta la stânga. Acest lucru este necesar din cauza caracterului regulilor de multiplicare a matricei.

Rețineți că determinantul refracției, translației sau matricei sistemului va fi întotdeauna unitatea:

det R = 1

det T = 1

det M = 1

(3.46a)

(3.46b)

(3.46c)

4. Planuri conjugate. Matricele Sistemului pe care le-am discutat au fost derivate cu ideea că razele în cauză trebuie identificate la interfețele de refracție din cadrul Sistemului. Formalismul este mai general decât atât. Putem folosi matricea de translație pentru a muta planurile noastre de referință departe de interfețele optice. Acest lucru este deosebit de important atunci când luăm în considerare planurile conjugate. Acestea sunt imagini unul cu celălalt. În Fig. 3.20, P și P' sunt puncte conjugate. Geometria și caracteristicile de

refracție ale setării optice generale sunt conținute în matricea de transformare. Detaliile acestei matrice vor fi dezvăluite mai târziu. Pentru moment, trebuie doar să identificăm influența optică a regiunii umbrite, așa cum este conținută în matricea M. Folosim aici notația tilde peste matrice pentru a indica faptul că matricea conectează planurile conjugate.

Transformarea generală ia forma

din care putem identifica rolul fiecăruia dintre termenii matricei Sistem.

nu - M11na + M12X

sau

(3-47)

și

x' = [M21n]a + [M22Jx (3,48)

Dacă P și P' sunt puncte conjugate, atunci toate razele care încep la P trebuie să ajungă la

Fig. 5.20 Planuri conjugate conectate prin matricea Sistemului IVI.

P. Aceasta înseamnă că, în Ec. (3.48), χ' trebuie să fie independent de unghiul razei originare, α. Această condiție este îndeplinită dacă

M21=O

Atunci x' = M22X și putem defini mărirea laterală

mx≡~ = M22

ca factor de scară liniară între punctele din planurile conjugate. Să definim, de asemenea, o mărire a raze-unghiulare ca

Δα'

= Δα

Apoi din Ec. (3.47) putem vedea că

(3,49)

(3,50)

(3,51)

ma = M

n

rí

Matricea globală de transformare între planurile conjugate devine acum

(3,52)

(3,53)

Aceasta trebuie să satisfacă în continuare Ec. (3.46c), astfel

(3,54')

Când este scris în termeni de Componente ale razelor, aceasta devine

nx Δα = ríx, Δα!

(3,54)

Aceste ecuații ar trebui recunoscute ca ecuații Lagrange care au fost prezentate pentru prima dată în Eq. (3.31) pentru o singură suprafață refractară.

B. O singură lentilă

1. Formulare generală. Un Iens este format din două suprafețe refractoare în serie. Fig. 3.19 este un exemplu prototip. În clasa de Iense pe care o vom lua în considerare, interfețele sunt secțiuni sferice. Cu toate acestea, Ienses asferice pot fi construite pentru scopuri specializate (cum ar fi focalizarea unui fascicul laser monocromatic). În limita paraxială, putem folosi formalismul matricei pentru a descrie comportamentul unei raze generale care trece prin ambele suprafețe ale lentilei. Fig. 3.21 prezintă modelul adnotat System. Interceptările suprafețelor din față și din spate ale Iensului cu axa optică sunt la vârfurile V și, respectiv, V. Indicii de refracție nu trebuie să fie aceiași pe ambele părți ale lentilei, iar grosimea D¿, în cazul general, nu trebuie să fie mică.

Fig. 3.21 Ieni unici cu indicele de refracție n(Interfața între medii având indici n și ri.

Din Eq. (3.40) identificam puterile suprafetelor stanga si dreapta ca

= ■.(3.55a)

= (3,55b)

unde trebuie respectate convențiile de semne corespunzătoare. (A se vedea secțiunea 3.2A2a pentru o revizuire) Un caz comun este Iens dublu convex în aer, pentru care avem

| κ'l

Matricea Sistemului decurge din forma Eq. (3.44), unde, din Ec. (3.42) și (3.43), matricele componente sunt

Când înmulțim acest lucru, obținem

2. Lentila subțire. Un Iens este clasificat ca subțire dacă grosimea este neglijabilă în raport cu obiectul și distanțele imaginii și lungimea focală. În dezvoltarea noastră, acest lucru înseamnă că Di are voie să devină zero. În această aproximare, matricea Sistem a Ec. (3.56) devine

Mthin =

/1

\°

(3,57)

unde ^lthin = & + S?' sau

^thın —

-^subțire \

1)

ni-n

(3,58)

Rețineți că Mthin are aceeași formă ca matricea de refracție pentru o singură interfață sferică, Eq. (3,42).

Pentru un Iens subțire în aer, Eq. (3.58) se simplifică la

^subțire = (⅜ -

(3,59)

Aceasta este denumită în mod obișnuit ecuația producătorului de lentile.

C. Avioane principale

1. Transformare generală. În mediul subțire, se consideră că refracția are loc într-un singur plan situat în centrul lentilei. Razele călătoresc nedeviate în sus și departe de acest plan. Matricea Sistemului ia o formă simplă, așa cum este prezentată în Eq. (3,57). În general, un sistem optic va avea o matrice de sistem mai complicată dacă, ca și în cazul ienilor groși din Ec. (3.56), planurile de referință sunt asociate cu locația vârfurilor (intersecția fizică a suprafețelor refractoare din față și din spate cu axa optică).

Luați în considerare sistemul optic din figura 3.22. Detaliile regiunii umbrite nu sunt specificate. Cu toate acestea, aceasta poate fi o lentilă groasă sau o lentilă compusă. O lentilă compusă este formată din mai multe lentile groase sau subțiri. Suprafețele de refracție nu sunt neapărat apropiate. Iensele groase sunt necesare pentru a obține distanțe focale scurte. Ienses compuse sunt necesare dacă aberațiile, sau abaterile de la

Fig. 3.22 Sistem optic cu matricea Mvv, referitor la vârfuri.

Fig. 3.23 Convenția pentru localizarea planurilor principale cu distanțe pozitive D și D'.

comportamentul paraxial, al ienselor subțiri unice urmează a fi corectat. Elementele optice inițiale și finale intersectează axa optică la vârfurile Vand V, respectiv. Indicele de refracție incident este n, iar indicele de refracție al mediului final este rí. Matricea Sistemului care transformă razele dintr-un plan la V în planul la V are forma generală

/M11

W21

Ml2 \

M22/

(3,60)

sub rezerva cerinţei ca

det M = 1

Întrebăm acum dacă este posibil să găsim noi planuri de referință în locul celor de la V și K' pentru care matricea Sistemului convertită va lua forma aceleia pentru o lentilă subțire. Acestea se vor dovedi a fi principalele plane care intersectează axa optică la Hand//' din Fig. 3.23. Sunt identificate prin translaţii prin distanţele D şi D', după cum se arată.

Avem nevoie de Mhh,. Avem Mff,. Conversia de la a doua formă la prima se realizează prin

I^ян' = ɪ 'Mff,T

Traducerile T și T ' sunt

Noua matrice de sistem devine

Мни·

M12DD1

-     ,+M21

nn

M22D

(3,61)

n

Acum este, de asemenea, posibil să se stabilească independent cum trebuie să arate matricea Sistemului atunci când se face referire la planurile principale. Dacă matricea trebuie să aibă aceeași formă ca cea asociată cu lentila subțire, atunci trebuie să semene cu Eq. (3,57). Pentru ca acest lucru să fie adevărat, trebuie să avem

Йин- = ɑ mi'2)   (3,62)

Termenul (2, 1) din Ec. (3.62) este zero. Aceasta este aceeași cu cerința planului conjugat din Ec. (3,49). Prin urmare, planurile principale de la H și H' sunt imagini unul ale celuilalt. Deoarece elementul (2, 2) este unitate, atunci prin Ec. (3.50) vedem că avem o mărire laterală a unității între planurile principale. Figura 3.24 ilustrează conceptul. Razele 1, 2 și 3 suferă refracții aparente numai la planurile principale. Între planurile principale, razele sunt translate matematic fără a modifica distanța față de axa optică. Aceste avioane sunt matematice! numai entități. Refracțiile reale au loc, desigur, la suprafețele fizice din cadrul Sistemului optic. Locațiile planurilor principale ar putea fi în interiorul sau în afara sistemului de formare a imaginii. Ordinea lui H și H' ar putea fi interschimbată. Ideea de subliniat aici este că acestea sunt planuri matematice, iar razele se comportă ca și cum ar fi deviate, așa cum se arată în Fig. 3.24.

Formele ecuațiilor. (3.61) și (3.62) trebuie să fie echivalente. Astfel din elementul (1, 1) și elementul (2, 2) găsim

M11 + M12 — — 1

și

M22 4^ M12 ~ — 1

n

Fig. 5.24 Comportarea razelor care intersectează o pereche de puncte pe planurile principale.

care poate fi rescris ca

β = (\ τAl -ʌʃɪi)

\ Ml2J

O' = (^- \ 1-M22)

\ M12J

(3,63)

(3,64)

unde M11, M12 și M22 sunt termenii adecvați din matricea Myy care este asamblată din aranjamentul fizic al componentelor optice sub forma Eq. (3,60).

Ecuațiile (3.63) și (3.64) ne arată cum să localizăm planurile principale având în vedere matricea Sistemului referită la vârfurile V și V'.

D > 0 dacă H este pe partea stângă a lui V

D, > 0 dacă H' este în partea dreaptă a lui V

Acestea sunt convenții stabilite de geometria din Fig. 3.23.

Ecuațiile (3.63) și (3.64) sunt semnificative numai dacă condiția

$M12 \neq 0$ (3,65)

este satisfacut. Aceasta devine apoi cerința ca Sistemul nostru paraxial general să formeze imagini ca un „Iens subțiri” și să poată fi găsită o locație finită pentru H și H'.

Este convenabil să identifici puterea sistemului general ca

^syst ^^ M12

(3,66)

Apoi matricea de sistem ia forma simplificată:

∧ /1 - ^9svsΛ

M„„. = L ɪ ■'“) (3,67)

De asemenea, din Comparația ecuațiilor. (3.61) și (3.62) în elementul (2, 1), cerem ca

M11D' ι

n'

M12DD' nn'

+ M21

care, împreună cu Eq. (3.66) înseamnă că puterea sistemului este

^sistem — M12-

nM11

D

n M22 ι nn'M21

D +DD

(3,68)

Acesta trebuie să fie diferit de zero pentru un sistem optic de formare a imaginii.

2. Aplicare pe lentile groase. Ca exemplu de utilizare a acestor tehnici ne întoarcem la Iens unici din secțiunea B. Dorim să găsim puterea Iens și locațiile planurilor principale în raport cu vârfurile Kand V. Din aceste informații vom putea calcula imaginea Caracteristicile unui obiect dat

cu un efort relativ mic, deoarece atunci când se referă la planurile principale, un sistem optic complicat acționează ca o lentilă subțire.

Matricea Sistemului pentru Ienii groși este aceeași cu cea găsită în Eq. (3,56). Prin urmare,

i0>0>'D, \

M12 = -------e- -

ne

M2ι

M22

= 1 _ PdΛ

\ n( )

Din Eq. (3.68) (unde sistemul în acest caz este doar o singură lentilă groasă) putem evalua puterea.

(0>0>'T) \

-------t- (3,69) nt /

Din Ecs. (3.63) și (3.64) pot fi identificate locațiile planurilor principale.

n&'D(

-

n'0>Di

(3,70)

(3-71)

Caracteristicile optice paraxiale ale lentilei, raportate la planurile principale, sunt acum cuprinse în cele trei ecuații anterioare și

/1 - P,\ Mhh' = L 1 ́I (3,72)

- Separarea planurilor principale este dată de

&Pfn \

(wa)

În cazul obișnuit în care lentila este în aer, acest lucru devine

Există momente când dorim să tratăm chiar și o lentilă subțire ca având o grosime diferită de zero pentru a localiza planurile sale principale. Când Di este mic în comparație cu R și R', dar nu este în întregime neglijabil, avem

0> = ^subțire = +(3.74a)

(a) (b)(c)(d)(c)

Fig. 3.25 Exemple de locații plane principale pentru diferite forme Iens. Aici n = lv5 și t = D/3 = separarea planului principal.

și

t = DAl - ɪ

\ n*.

/ -0>' \ D1

D = ----- -

(3.74b)

(3.74c)

(3,74d)

, (-&

D = --7

Când n¿ – 1,5 (o valoare tipică), avem t = D/3. Câteva exemple sunt prezentate în Fig. 3.25.

3. Combinația a două sisteme de formare a imaginii. Un sistem de două Iense simple separate prin distanța d este un prototip pentru mai multe instrumente optice importante. În cazul general, fiecare „lentilă” ar putea fi un sistem Iens complicat. Modelăm caracteristicile optice ale fiecărui sistem component prin puterea sa și locația planurilor sale principale. (Dacă sistemele sunt simple lentile subțiri, atunci ambele planuri principale pentru o anumită lentilă sunt situate în centrul acelei lentile.) Vom dezvolta cazul mai general.

Situaţia este definită în Fig. 3.26. Puterea primului sistem este 0*l ; cea de

Fig. 3.26 Convenții pentru două sisteme de formare a imaginii. Planurile principale generale sunt la H și H'.

al doilea, .i*,2. Matricea de transformare dintre planurile principale ale primului Sistem este

/1 _ ap \

fil"'"" = (0 1 ') <3-75)

Între planurile principale ale celui de-al doilea Sistem matricea de transformare este

(1 – \

O 1 J (376)

Matricea de transformare globală dintre primul plan principal al primului sistem și al doilea plan principal al celui de-al doilea sistem este identică ca formă cu M din ecuația. (3.56) și este dat

Această matrice joacă acum rolul matricei generale de sistem

(3,77)

(3,78)

pentru care știm deja cum să determinăm puterea generală a Sistemului ^ssyst și locațiile planurilor principale H și H' ale întregului Sistem.

Din Eq. (3.66) puterea este

•‰. = + -

d`

„ь

(3,79)

Din Eq. (3,70)

n^2 ¿

Syslfy>

iar din Ec. (3,71)

d> = J*'^ι

- ¾st⅝

(3,80)

(3,81)

În Ec. (3.80), D este distanța dintre primul plan principal al întregului sistem până la stânga primului plan principal al primei componente, iar în Ec. (3.81) D' este distanța celui de-al doilea plan principal al întregului sistem până la dreptul celui de-al doilea plan principal al celei de-a doua componente. Planurile principale ale componentelor

sunt definite în funcție de distanța lor față de vârfurile părților optice componente. Pentru cazul a două Iens subțiri separate prin distanța d, D și D' devin distanța până la stânga primului Ien și, respectiv, până la dreapta celei de-a doua lentile. Ca unitate, combinația va avea o matrice de sistem de forma descrisă de ecuația (3.67), cu .⅛>, sistem dat de ecuația. (3,79).

Astfel, vedem că și în acest caz, echivalentul optic redus în aproximarea paraxială se comportă ca un Ien subțire atunci când este raportat la planurile principale ale Sistemului general.

Э.4 Imoge Formotion

A. Concepte generale de formare a imaginii

Din informațiile din cele două secțiuni anterioare (B și C), o configurație de elemente optice poate fi asociată cu o singură matrice de sistem globală. Această matrice va purta forma de

= 1(^

1

și se referă la planurile principale ale Sistemului. În construirea acestei matrice, relațiile necesare care servesc la localizarea planurilor principale în raport cu suprafețele fizice din Sistem sunt derivate pe parcurs.

Acum dorim să explorăm relația dintre un obiect general și imaginea acestuia. Situația este ilustrată în Fig. 3.27. Pentru fiecare punct de pe planul obiectului există un punct conjugat pe planul imaginii. Fig. 3.27 este o extindere mai detaliată a Fig. 3.20, unde au fost descrise pentru prima dată Caracteristicile planurilor conjugate. Aici

putem include distanța obiect S și distanța imagine S'. Acestea sunt măsurate din planurile principale ale întregului sistem optic, așa cum se arată în Fig. 3.27.

Folosim matricele de translație pentru a crea o matrice care transformă punctele din planul din C în puncte din planul din C'.

∧ / 10 \ /l -W 1 0\

Ivl rr' — I IjиI

cc \ S'/ri 1 ∧θ 1 J \ S/n 1/

Când aceasta este înmulțită, aflăm că

(3,82)

Deoarece aceasta este o transformare între planuri conjugate, Ec. (3.82) trebuie să aibă forma Eq. (3,53). Echivalarea acestor matrici element cu element rezultă din elementele (2, 1).

S, S0>SS'

— 4---------—

n n nn

= O

(3,83)

din elementele (1, 1).

0>S

1------= ml

n

ri

71

(3,84)

și din (2, 2)

t   0,S,

1-------– = m

ri

(3,85)

Prima dintre acestea

poate fi rescris sub formă

n ri

Aceasta este forma funcțională familiară a „ecuației lentilelor subțiri”. Vedem acum că, cu condiția ca S și S’ să fie măsurați din planurile principale, comportamentul imagistic al unui sistem optic complicat este același, în hmit paraxial, cu cel al unei lentile subțiri.

Dacă distanța obiectului este luată la infinit, astfel încât razele incidente să fie paralele cu axa optică, ca în Fig. 3.28a, atunci distanța imaginii identifică lungimea focală a imaginii, f, și punctul focal al imaginii, F'.

n'

S' = -≡f   (3,87)

LimS → ∞   'ʃ

Fig. 3.2β (a) Punctul focal al imaginii, (b) Punctul focal al obiectului.

Când imaginea este la infinit, ca în Fig. 3.28b, distanța obiectului identifică Lungimea focală a obiectului, f, și punctul focal al obiectului, F.

'j   n

S = &

LimS'→cc   t''

(3,88)

Rețineți că acestea sunt legate prin puterea sistemului astfel încât

n n'

(3,89)

Când indicele de refracție este același pe ambele părți ale sistemului optic, focalele obiectului și imaginii sunt egale, iar Eq. (3.86) devine

1 j__l

S + S'~f

(3,90)

Aceasta este forma elementară a ecuației lentilelor subțiri.

Măririle care sunt asociate cu planul imaginii raportate la planul obiect pot fi extrase din ecuațiile. (3.84) și (3.85) folosind rezultatul ecuației. (3,86). Pentru mărirea unghiulară pe care o avem

Ș

S1

(3,91)

iar pentru mărirea laterală

m

n S'

n'S

(3,92)

3.4 Formarea imaginii ή 67

Un alt parametru important de performanță este mărirea longitudinală, mz. Aceasta este definită ca

diï dS

(3,93)

Ecuația de diferențiere. (3.83) produce

IdS' 10>ΓdS,Ί

, ,ς ÷ ----~, S + S

n dS nnn dS

= O

care poate fi rearanjat la

dS'   Γ 0>S^]n'Γ0>S,1
■   1   —   1
dS   nnn'

Folosind ecuațiile. (3.84) și (3.85), aceasta poate fi scrisă în termeni de mx și ma.

dS rí

ma-

n

În cele din urmă, utilizând relația Lagrange, Ec. (3.54'), aceasta devine

dS'   η'

-~m2x   (3,94)

dS   n

Acest lucru ne spune modul în care imaginea va fi deplasată de-a lungul axei optice ca răspuns la mici modificări ale distanței obiectului.

B. Construcția grafică a formării imaginii

Putem adopta o tehnică grafică de identificare a locației imaginii cu condiția să cunoaștem locațiile planurilor principale și punctele focale. Punctul focal al obiectului este F, iar punctul focal al imaginii este F,. Situația este prezentată în Fig. 3.29, unde P1 este imaginea lui P. În general, indicii de refracție de ambele părți ale Sistemului nu sunt egali.

Razele 1 și 2 sunt construite folosind conceptul descris în Fig. 3.28. Razele care sunt paralele cu axa optică înainte (sau după) interacțiunea optică trec prin (sau par să treacă prin) punctul focal al imaginii (sau al obiectului). În Fig. 3.29, raza 1 este paralelă cu axa optică înainte de întâlnirea ei cu lentila. După trecerea prin lentilă, acesta este deviat astfel încât să treacă prin punctul focal al imaginii, F'. Deoarece raza 2 trece prin punctul focal al obiectului, aceasta trebuie să devină paralelă cu axa optică după refracție. Aceste două raze se intersectează în doar două puncte, P și P'. Astfel, având în vedere locația lui P, punctul conjugat P' poate fi găsit prin construcție.

Pentru a adăuga o altă rază care este ușor de construit, astfel încât să supradeterminați

locația imaginii, putem desena o rază de la P la axa optică la H. Această rază formează unghiul γ cu axa optică la H (unde are înălțimea

zero). Matricea de transformare de la H la H' are forma Eq. (3,67). Dacă comparăm acea matrice cu forma generală a Eq. (3.53) pentru punctele conjugate, constatăm că termenii (1, 1) din Ec. (3.53) trebuie să fie unitate. Aceasta înseamnă că mărirea unghiulară de la H la H1 este dată de

n

= -n

(3,95)

La X = 0, această relație este echivalentă cu

/ n

γ n'

în fig. 3.29. Astfel, putem construi raza 3 pe partea de transmisie cu informația

(3,96)

Cele trei raze 1, 2 și 3 se încrucișează toate la P și la P'.

Dacă sistemul optic este o singură lentilă subțire, atunci H și H' devin același punct din Fig. 3.29, care este situat în centrul lentilei subțiri. Dacă indicii de refracție sunt aceiași pe ambele părți ale sistemului optic, atunci unghiurile γ și / sunt egale. Fig. 3.30 ilustrează cazul în care ambele simplificări anterioare sunt în vigoare.

Când lentila este concavă, ca în Fig. 3.3la, lungimea focală, după Eq. (3,87) sau (3,88), este negativ. Acest lucru plasează punctul focal al imaginii la stânga obiectivului și punctul focal al obiectului la dreapta obiectivului. Rezultatul este că,/sau un obiect real, nu va exista nicio poziție în care razele se încrucișează. Imaginea este virtuală. După cum este privită din partea dreaptă a lentilei, imaginea ar părea a fi amplasată pe partea obiectului, așa cum se arată și ar fi redusă în dimensiune. Razele 1, 2 și 3 au fost desenate urmând aceeași procedură ca în Fig. 3.29. Prelungirile aparente ale razei 1 înapoi în el

n

n

Rg. 5.50 Construcție grafică pentru un Iens subțire cu indicele de refracție pe partea incidentă egal cu cel pe partea emițătoare.

regiunea la stânga Ienilor și raza 2 înainte de punctul focal al obiectului sunt necesare pentru a determina de unde diverg razele.

Pentru o locație a unui obiect virtual (obiect din partea dreaptă a lentilei) situația ar fi similară cu Fig. 3.31 h. Aici ar fi necesare alte elemente optice (nereprezentate) pentru a crea convergența razelor care, dacă Ienii nu ar fi prezenți, ar produce o imagine la P. Efectul Ienilor cu lungime focală pozitivă este de a provoca o convergență mai bruscă. Imaginea reală se formează la P'. În acest caz, sunt necesare extensii aparente ale razelor incidente către obiectul virtual pentru a identifica corect interceptarea și unghiurile pentru razele 1 și 2.

O expresie suplimentară utilă poate fi derivată din luarea în considerare a Fig. 3.32, care este o formă simplificată a Fig. 3.29. Aici am definit locația obiectului prin utilizarea distanței X, diferența algebrică dintre distanța convențională a obiectului și lungimea focală.

(3,97)

De asemenea, X' este distanța redefinită a imaginii.

(3,98)

Acestea își schimbă semnul pe măsură ce obiectul se deplasează către Sistemul optic dincolo de F, sau pe măsură ce imaginea se deplasează către Sistem dincolo de F'.

Triunghiurile I și II sunt similare; prin urmare

De asemenea, triunghiurile T și IT sunt similare, adică

Fig. 5.32 Geometria obiectului și a imaginii Îndreptarea către forma newtoniană a ecuației lentilei subțiri.

Înmulțirea celor două ecuații anterioare conduce la forma newtoniană a relației obiect-imagine.

$XX' = ff'$ (3,99)

Aceasta este echivalentă cu relația de imagine din Eq. (3,86).

În Fig. 3.33 este prezentat un rezumat al relației obiect-imagine distanță, care este un grafic al ecuației. (3,99). Pentru o lentilă convergentă, în care ambele f și/’ sunt pozitive, ordonata arată valoarea normalizată a lui X’ față de valoarea normalizată a lui X. Aceasta arată cum distanța imaginii crește pe măsură ce obiectul se deplasează spre lentilă, apropiindu-se de F (sus ramura hiperbolei din fig. 3.33). Ori de câte ori obiectul se află pe partea dreaptă a lui F, imaginea se găsește în partea din stânga a lui F', așa cum este arătat de ramura inferioară a hiperbolei din Fig. 3.33.

Pentru Iense divergente, cu valori negative ale/ și/’, F este în partea dreaptă a Sistemului și F’ este în partea stângă. Orice obiect real va fi pe partea X pozitivă (deci X/f negativă) a abscisei. Accesul la

valorile lui X/f în apropierea originii va fi restricționat pentru obiectele reale, deoarece F se află pe partea „greșită” a lentilei. Acest lucru arată că imaginea va fi pe partea X’ pozitivă a lui F’ și destul de aproape de F’. Deoarece F' este, de asemenea, pe partea „greastă” a lentilei, aceasta înseamnă că imaginea va fi virtuală.

Fig. 5.55 Reprezentarea grafică a Ec. (3,99). Punctele reprezentând situațiile din Fig. 3.30 și 3.31 sunt identificate.

Figurile. 3.30 și 3.31 sunt reprezentate pe diagrama din fig. 3.33 prin punctele identificate. Obiectul virtual cu un Ien convergent și imaginea virtuală cu Ien divergenți sunt asociate cu același punct așa cum este prezentat.

3.5 Exemple de optică paroxială

A. Sisteme de formare a imaginii

1. Ochiul uman. Ochiul ca instrument optic este ilustrat în Fig. 3.34. Aici sunt identificate doar planurile principale în raport cu suprafața frontală a corneei. De fapt, umoarea apoasă, cristalinul și umoarea vitroasă trebuie luate în considerare atunci când sunt luate în considerare proprietățile optice ale ochiului. Deoarece indicii de refracție sunt diferiți pe părțile incidente și de transmisie ale elementelor de focalizare, lungimile focale f și/' nu sunt egale. Aceste date reprezintă ochiul relaxat. Imaginea se formează pe retina care se află la F'. Ochiul relaxat este concentrat pe un obiect infinit de îndepărtat. Grosimea și curbura cristalinelor se pot modifica pentru a permite obiecte care sunt mai aproape de infinit. Pentru persoanele mai tinere, ochiul se poate „acomoda” pentru obiecte destul de doze pentru ochi. Această capacitate scade odată cu vârsta. Un parametru de design convenabil este 250 mm pentru punctul apropiat pentru un obiect la care poate avea loc încă o vizualizare confortabilă.

Multe instrumente optice sunt concepute pentru a fi utilizate prin vizualizare directă. Aceasta înseamnă că imaginea finală trebuie să apară pe retină în circumstanțe confortabile. Prin urmare, ochiul ar trebui să fie relaxat; În caz contrar, cazarea necesară va provoca străini în timpul vizionarii continue.

Rg. 5.34 Echivalentul optic al ochiului uman. Pe retină trebuie să se formeze o imagine.

Fig. 5.55 Lupă simplă, (a) Vizualizare directă. (fi) Vizionarea cu ajutorul unui obiectiv simplu.

(fi)

2. Lupa. Lupa simplă (Fig. 3.35) este folosită pentru a crea o imagine virtuală erectă, mărită, care este localizată în punctul apropiat al ochiului. Razele care provin de la lupă par să provină de pe acest obiect virtual. Definiția convențională a puterii de mărire a

unui instrument simplu ca aceasta, în care razele sunt aproape paralele când intră în ochi, este

M≡⁷⁄₈

(3.100)

unde a£ și a£ sunt unghiurile pe care o rază de la marginea obiectului le face cu axa optică la ochi cu și fără lupă, respectiv. Pentru ca această Comparație să fie validă obiectul, în cazul fără lupă, și imaginea virtuală, în cazul lupă, trebuie să fie la aceeași distanță L de ochi, așa cum se arată în Fig. 3.35.

Dacă obiectul are o dimensiune laterală de x, atunci

(3.101)

Ochiul observatorului va fi situat în jurul punctului focal al imaginii F' Aceasta înseamnă că distanța imaginii (măsurată de la F) este | L\ și distanța obiectului (măsurată din F) ar trebui să fie

2

(3,102)

\L\

Semnul minus arată că obiectul trebuie să fie mai dozat la lentilă decât F, așa cum se arată în Fig. 3.35b.

O rază care se întâlnește cu axa optică la F' ar fi trebuit să fie paralelă cu axa optică dinaintea lentilei. Din geometria din Fig. 3.35b, găsim

⁵⁄₈ = 7

(3,103)

Astfel, puterea de mărire este (din ecuațiile 3.100, 3.101 și 3.103)

w |L|

M = —

(3.104)

sau

250 mm M =-----—

dacă comparația se face în punctul apropiat.

Cu această definiție putem rescrie expresia pentru locația necesară a obiectului, astfel încât imaginea să fie localizată în punctul apropiat. Din Eq. (3,102)

M

(3,105)

Pentru a crește puterea de mărire față de cea obținută cu o lentilă subțire, am putea scădea lungimea focală așa cum este sugerat de Eq. (3.104). Aceasta înseamnă că razele de curbură ale suprafețelor Iens trebuie să fie mici, astfel încât puterea să fie mare. Acest lucru nu se poate face fără a face Iiens gros. Fig. 3.36 prezintă geometria lupă simplă cu o singură lentilă groasă. Comparând această diagramă cu cea din Fig. 3.35b putem observa cu uşurinţă că Ecs. (3.102) până la (3.104) vor rămâne valabile, cu condiția ca distanțele să fie măsurate în raport cu planurile principale.

Pentru a obține o putere mare într-o singură lentilă, suprafețele sale trebuie să aibă raze mici de curbură, iar „îndoirea” razelor are loc printr-un unghi atât de mare (a£ în Fig. 3.35b) încât Constrângerile unghiului mic ale teoriei paraxiale nu sunt mulțumit Atunci când acesta este cazul, se constată abateri de la teoria noastră simplă de formare a imaginii și nu se produce o imagine de bună calitate.

3. Dublet. O modalitate eficientă de a obține distanțe focale scurte și, prin urmare, mărire mare cu o imagine de mai bună calitate este prin utilizarea a două lensuri care formează un dublet.

A. Considerente Generale. Un dublet este format din două iense cu principal

Fig. 5.3« O lupă simplă cu lentilă groasă. Sunt prezentate doar planurile principale ale Ienilor.

separarea plană d, ca în Fig. 3.37. Aici dorim să identificăm separarea punctelor focale 1 astfel încât

d=f \ +f2 + l (3-106)

În această definiție, 1 are un semn care este pozitiv cu condiția ca F'i să fie la stânga lui F2. Puterea dubletului poate fi scrisă [din Ec. (3,79)]

=-^1 ^2/ (3,107)

Am stabilit nb — n' = 1 în Fig. 3.37, dar anticipăm utilizarea unui dublet ca microscop cu imersiune unde n ≠ 1. Din Ec. (3,87), lungimea focală a imaginii a dubletului va fi

f = -≡ (3,108)

Fig. 3.57 Punctele principale ale dubletului.

iar lungimea focală a obiectului va decurge din Eq. (3,89)

f=nf' (3,109)

Planurile principale ale dubletei, astfel definite, vor fi găsite la o distanță până la capătul lui H1 dată de

f'1 d D =j-±-

și la o distanță la dreapta lui H12 dată de f2 d

D = l

(3,1 IOa)

(3.11 Ob)

Aceasta înseamnă că planurile principale sunt separate de o distanță

t = D ÷ D' + d ÷ t1 ÷ t2 = (/ + f'1 +./a)ɑ ÷iι ÷i2 (3-111)

b. Microscop. La microscop (Fig. 3.38) distanța focală a primului element, obiectivul, și cea a celui de-al doilea element, ocularul, sunt mici în comparație cu distanța care separă punctele focale l. Adesea 1 este un standard de 160 mm. Dacă considerăm dubletul ca o singură unitate cu lungimea focală dată de Eq. (3.108), atunci lungimea focală f este mică. Înlocuind ʃ' din Ec. (3.108) în Ec. (3.104) pentru puterea de mărire, găsim

(3.112)

care poate fi rescris ca

M = MEmx0 (3,113)

unde, ca și înainte, ME este puterea de mărire a ocularului și mx0 este o bună aproximare a măririi transversale a obiectivului.

Pentru a vedea acest lucru mai clar, luați în considerare Fig. 3.38. Din Eq. (3.105) am dori să aranjăm ca imaginea intermediară să fie localizată la X2 = — f2JMε. Aici va fi obiectul pentru ocular. Apoi ocularul va crea o imagine virtuală finală la X2 = — |L|. Aceasta va oferi o comparație validă cu puterea de mărire a lupei simple. Deoarece punctele focale ale celor două Iense sunt separate prin l, imaginea intermediară va fi situată la o distanță la dreapta lui F'1 dată de

(3.114)

Folosind aceasta în Ec. (3.99), putem găsi poziția obiectului

_/i/'i _ h(/'i)2

1 Xr1 /(1 + X2/Γ)

(3.115)

Rg. 3.3β Microscop compus.

Mărirea laterală a obiectivului este dată de Ec. (3,92):

mx0 - -

nS"1 sT

nz1±4

ɪ! + <1

Folosind ecuațiile. (3.114) și (3.115), aceasta devine

i [i + (Л/O + (*2/01 л π + σ,1/o/(i + xм

(3.116)

Dacă X/l < 1, ca în majoritatea cazurilor, termenii care implică acest raport pot fi neglijați în Ec. (3.116). Atunci mărirea laterală a obiectivului este foarte aproape

(3.117)

Așa cum am spus mai devreme.

Într-un exemplu tipic> /l =f,1 = f2, n — 1 și M = 250/16 = 15,625. În configurația microscopului, noua putere de mărire este M = (15,625)(—160/16) = — 156,25, considerabil mai mare decât cea a singurelor Iens.

4. Teleobiectiv. Scopul unui aparat de fotografiat este de a produce o imagine reală, inversată, pe planul focal în care este amplasat filmul. Ajustarea poziției Iens sau a puterii unui Ien compus este necesară pentru a se adapta la o varietate de distanțe ale obiectelor. Un Ien simplu utilizat într-o astfel de capacitate este prezentat în Fig. 3.39α. Relația dintre distanța obiectului și distanța imaginii este conținută în Ec.

(6)

Fig. 5.59 (a) Aparat foto cu obiectiv simplu. (b) Teleobiectiv. Efectul este de a crește distanța imaginii fără a extinde locația fizică a Ienselor la o cantitate nerezonabilă de film.

(3,38). Dacă distanța obiectului este foarte mare, să spunem S = L, atunci

S' = a≈f

unde a este distanța de la obiectiv la film.

Mărirea imaginii, din Eq. (3.92), va fi

(3.118)

(3.119)

Dacă se dorește o imagine mai mare fără a modifica distanța de la cameră la obiect (aici aproximativ egală cu L), atunci trebuie utilizat un obiectiv diferit care are o lungime focală mai mare. Cu toate acestea, din Ec. (3.118) putem vedea că acest lucru necesită ca obiectivul să fie situat la o distanță mai mare de film. Acest lucru poate fi nepractic.

Același efect optic poate fi obținut cu o lentilă compusă. Aceasta este motivația pentru teleobiectiv. În lentilele compuse, distanța imaginii este

măsurată de la H'. Dacă putem aranja să deplasăm H' la o distanţă considerabilă de film prin alegeri adecvate ale elementelor optice, atunci mărirea va creşte.

Majoritatea teleobiecțiilor sunt dispozitive cu mai multe elemente care sunt optimizate pentru mici aberații. Putem studia conceptul printr-un ansamblu alcătuit din două iense (Fig. 3.39h). Cerem ca D să fie considerabil negativ. Aceasta înseamnă că, prin Ec. (3.81), lungimea focală a primului Ien ar trebui să fie pozitivă. De asemenea, solicităm ca H să fie la stânga lui H', astfel

$D > D1 - d$

iar lungimea focală a celui de-al doilea Ien ar trebui să fie negativă, așa cum se arată în Fig. 3.39b.

Acum distanța imaginii este S' = |D'| + a• Aceasta înseamnă că mărirea este acum

mx ~

|D'| -Ha

l

(3.120)

care este mai mare ca magnitudine absolută decât mx cu lentila simplă. Pentru a obține caracter practic cu acest design, avem nevoie de | D' \ > d. Atunci locația fizică a Componentelor va fi mai dozată pentru corpul camerei decât ar fi un simplu Iens pentru a obține aceeași mărire. Valorile tipice pentru a sunt de ordinul a 50 mm în timp ce | D'| poate fi de câteva sute de milimetri.

B. Sisteme telescopice

1. Considerații generale. În secțiunea 3.3A4 am explorat condițiile generale îndeplinite de o matrice optică care conectează planuri conjugate. Am descoperit că razele care încep într-un punct de pe un plan trebuie să ajungă într-un anumit punct de pe celălalt plan, independent de unghiul lor inițial. Mai târziu, în secțiunea 3.3C1 am arătat că M_{12} în matricea Sistemului trebuie să fie diferit de zero pentru ca formarea imaginii să fie preluată în formalismul „lentile subțiri”.

Aici examinăm situația în care unghiurile razelor finale sunt direct proporționale cu unghiurile razelor incidente corespunzătoare, independent de înălțimea razei. Aceasta înseamnă că elementul M_{12} trebuie să fie zero. Unghiurile razelor se supun

n,<x' = M11n<x

Un sistem optic de acest tip are putere zero.

Acum, în general, este adevărat că elementul de matrice (1, 2) este invariant sub translații; adică elementul (1, 2) al matricei

este M_{12}. Astfel, dacă M_{12} este zero, acesta va rămâne zero dacă nu se adaugă suprafețe refractante la sistem.

2. Astronomica! Telescop. Unul dintre cele mai simple exemple de sistem telescopic este astronomica! telescop (Fig. 3.40). Acesta constă din două lensuri pozitive, obiectivele cu o lungime focală f_1 și lentila oculară, sau ocularul, cu o lungime focală f_2, separate de o distanță $d = f_1 + f_2$ în aer. Atunci puterea totală a combinației este dată de ecuația (3.79) ca

Un fascicul incident paralel iese din telescop ca un alt fascicul paralel care face un unghi diferit. Matricea de transformare de la primul Ien la al doilea Ien este

Ecuațiile de transformare devin

x' = -⅛x + (/ι +/2)α (3.122b)

J1

Mărirea unghiulară va fi

- ~ (3,123)

7 2

Acesta este factorul prin care telescopul mărește separarea unghiulară a două obiecte îndepărtate. Rețineți, de asemenea, că aceste concepte rămân valabile atunci când f_2 este negativ. În acest caz avem un telescop galileian (Fig. 3.41). Oferă o mărire unghiulară pozitivă /1/(~ /2)•

3. Sistem telescopic general. Sistemul telescopic general este destul de asemănător cu sistemul cu două lentile despre care tocmai am discutat. Forma generală pentru transformare

Fig. 5.41 Telescop galileian (modat după primul telescop).

matricea va fi atunci

Aceasta trebuie să respecte Eq. (3.46c)

det M = I = M11M22

Dacă continuăm să definim mărirea unghiulară prin

(3.124)

obținem apoi

0 ʌ

M 22/

0

eu

mct(nz/n)

(3.125)

Chiar dacă telescopul este folosit cel mai frecvent pentru a forma o imagine virtuală (care este ulterior procesată într-o imagine reală în ochi sau într-o cameră), putem încă găsi planuri conjugate. Locațiile acestor planuri nu vor fi date de ecuațiile simple cu lentile subțiri, dar putem examina situația prin următoarea dezvoltare.

Se obține o relație obiect-imagine între planele care intersectează axa optică la C și C ́ (Fig. 3.42) când

IVI ce

И1а(п'/и)

Z-ma Z

---- + — + M21

n nma

0

1___

mα(n'/n)

(3.126)

Cerem ca P și P' să fie puncte conjugate; astfel Ec. (3.126) trebuie să aibă forni din Eq. (3,53).

M -

mα(n'/n)

0

Mi2

(3,53)

m

Aceasta arată că iagnirea laterală trebuie să fie

așa cum este cerut de ecuația Lagrange. De asemenea, demonstrează că există o relație obiect-imagine atunci când

zχ

n

21

= O

+ —+ M

sau

Z,mx + Zmx = — M2ln

(3.127)

Distanțele Z și Z' sunt măsurate de la vârfurile telescopului.

Dacă telescopul este astronomica simplă! Sistem în aer, atunci telescopul este descris de matricea ecuației. (3.121).

M2ι —fi +f2

Relaţia obiect-imagine devine

Z' =

Í f \ 2 (

~ Z+/2 1

V1/ \

(3.128)

REFERINȚE

Arfken, G. Metode matematice pentru fizicieni. Académie Press, New York, 1970 Born, Max și Emil Wolf. Principii de optică. Pergamon Press, Oxford, 1980.

Brouwer, W. Matrix Methods in Optical Instrument Design. Benjamin, New York, 1964.

Conrady, AE Optică aplicată și design optic. Dover, New York, 1957.

Cosslett, VE Modem Microscopy. Cornell University Press, Ithaca, NY, 1966.

Cox, Arthur. Fotografie Optica. Focal Press, Londra, 1966.

Driscoll, Walter G. și William Vaughan. Manual de optică. McGraw-Hill, New York, 1978.

Graham, C H., ed. Viziunea și percepția vizuală. Wiley, New York, 1965.

Herzberger, Max. Optica geometrică modem. Interscience Publishers, New York, 1958.

Hopkins, George W. „Algoritmi de bază pentru inginerie optică”, în Robert R. Shannon și James C. Wyant, eds. Optios aplicat și inginerie optică. Académie Press, New York, 1983, voi. 9, p. 1.

Kingslake, Rudolf. Fundamentele pentru proiectarea lentilelor. Académie Press, New York, 1978.

Kuiper, GP și BM Middlehurst, ed. Telescoape. University of Chicago Press, Chicago, 1960.

Levi, Leu. Optica aplicata. Wiley, New York, 1968.

Martin, LC Teoria microscopului. Elsevier, New York, 1965.

Smith, Warren J. Inginerie optică modem. McGraw-Hill, New York, 1966.

Verdeyen, Joseph T. Laser Electronics. Prentice-Hall. Englewood Cliffs, NJ, 1981. Welford, WT Geometrical Optics. Olanda de Nord, Amsterdam, 1962.

Probleme

Secțiunea 3.1 Ray Tracing

I4 Luați în considerare o interfață între două medii transparente diferite pe care o vom cali în planul xy. Indicii de refracție sunt 1 și 1,5 pe laturile z negative și, respectiv, pozitive ale interfeței. Se găsește o rază care trece prin punctul (x, y, z) = (– 10 cm, 0,

- 10 cm) care se deplasează în direcția s = 0,34x + 0,94z. Găsiți coordonata z în punctul în care raza interceptează planul yz.

2 O suprafață de refracție este definită de normala ή =

- jl/x/3(fc + ÿ + Ï). Dacă raza incidentă este de-a lungul § = – £ și indicii de refracție asupra incidentului și a

laturile de transmisie sunt 1,0 și, respectiv, 1,33, găsiți direcțiile razelor reflectate și transmise.

3. O oglindă cub de colț este formată din suprafețe ale căror norme sunt fj1 = – x, ή2 = – ÿ, ή3 - – i (Fig. 3.43). Demonstrați că raza reflectată va avea direcția opusă razei incidente (§" = – s) independent de direcția lui § prin aplicarea formei vectoriale a legii de reflexie.

4. Există un reflector elipsoidal pentru partea z pozitivă a ecuației pentru suprafața sa

X2 y1 Z2

X

y

Fig. 5.45

unde α = 10 cm și b = 20 cm. O rază incidentă paral-Iel față de axa z pozitivă trece prin punctul x = 2 cm, y = 2 cm, z = – 2 cm. Utilizați forma vectorială a legii de reflexie pentru a găsi direcția reflectată

raza.

' 5. ■ Luați în considerare problema trasării exacte a razei printr-o suprafață definită de f = 0 = z + a(x2 + y2), unde a =

Icm-1. Lăsați raza incidentă să înceapă la (0, 0, – 10 cm) înclinată cu 20° față de axa z și în planul xz. Mediul incident este aerul, iar mediul de transmisie are un indice de refracție de 1,5. Aflați intersecția razei transmise cu planul xy.

8. Demonstrați că suprafețele conice de revoluție din fig. 3.5 sunt suprafețe carteziene pentru reflexie.

eu

6. Deduceți o expresie pentru deviația dintre aÿ iɪ> Demonstrați că suprafața sferică prezentată în Fig. 3.45 este o suprafață sferică și

un paraboloid de revoluție care j j j cartezian pentru refracția cu o imagine virtuală formată la

intră în contact cu sfera într-un punct și a cărei rază de curbură este I mai mică decât raza sferei. Exprimați răspunsul ca o distanță, măsurată paralel cu axa de simetrie a paraboloidului la o anumită distanță perpendiculară pe axa de simetrie (Fig. 3.44).

7. O oglindă de 6 inchi cu o rază de curbură de 96 inchi este o aproximare rezonabilă a unui paraboloid cu o lungime focală de 48 inchi. Dacă lumina incidentă are o lungime de undă de

550 nm, găsiți eroarea dintre oglinda sferică și paraboloidul de la marginea oglinzii în ceea ce privește fracția din lungimea de undă a luminii incidente. Aceasta este o măsură a erorii implicate în focalizarea unei stele îndepărtate (a cărei lumină întâlnește o oglindă sferică a telescopului ca o undă plană).

Fig. 5.45

P' cu condiția ca S și 5' să satisfacă n2S = n'2S' = nn'R. (Folosiți ecuația 3.9 și stabiliți egalitatea căilor optice corespunzătoare.)

10. (a) Care este natura suprafeței reflectorizante carteziane care trebuie introdusă la 0 astfel încât să se formeze o imagine virtuală a lui P la P' (Fig. 3.46)?

(b) Care dintre următoarele suprafețe va oferi o imagine virtuală aproximativă a lui P la P' din Fig. 3.46?

(i) z = a(x2 + y2)

(ii) z — ax2 + by2, a ≠ b

(iii) z = axi + by3

(iv) z = a(x3 + y3) + cy4

(v) z = a(x4 + y4)

Explica.

11. Arătați că suprafața elipsoidală de revoluție din fig. 3.47 va oferi o formare perfectă a imaginii cu refracție pentru fasciculul paralel la focarul F' al elipsei cu condiția ca excentricitatea e = c/a să satisfacă e = n/ri.

12. Luați în considerare Fig. 3.48 în care se dorește o imagine aproximativă a lui P la P1 după reflectarea dintr-o oglindă toroidală la 0. Care ar trebui să fie valorile celor două raze principale de curbură? (O curbă principală se află în planul figurii, cealaltă se află într-un plan perpendicular.)

13. Proiectați un reflector paraboloid în afara axei care va lua un fascicul colimat cu un diametru de 0,5 cm și îl va focaliza într-un loc la 10 cm de punctul în care centrul fasciculului se întâlnește cu reflectorul (Fig. 3.49).

14. O undă plană este incidentă din aer pe o perlă de sticlă sferică de raza R care are un indice de refracție de n. Deduceți o expresie pentru suprafața undei după refracție. Exprimați răspunsul în termeni de distanță radială față de axa optică, care este definită ca

Fig. 3.47

Fig. 3.49

Fig. 3.50

direcția inițială de propagare a undei plane prin punctul de prim contact al frontului de undă cu talonul.

15. Repetați derivația ecuațiilor. (3.13a) și (3.13b) pentru cazul specific în care suprafața de refracție este concavă.

16. Folosiți formulele de trasare a razelor prezentate în tabelul 3.1 pentru a urmări o rază care începe pe axa optică în fața Iensului prezentat în Fig. 3.50 și care este înclinată față de axa z cu (a) 5° (b) 10o. Urmați raza până când reîncrucișează axa z.

17. Folosiți formulele exacte de urmărire a razei pentru a determina dimensiunea aparentă a orificiului într-un tub capilar de sticlă care are un diametru de 10 mm și un orificiu de 2 mm dacă indicele de refracție al sticlei este 1,562.

Secțiunea 3.2 Optica ParaxiaI

18. Deduceți următoarea corecție de ordin superior la ecuațiile. (3.23) prin extinderea formulelor exacte de trasare a razelor în termeni de x/R și y/R.

19. Deduceți relația de mărire laterală Ec. (3.29) prin intermediul razei P0Fi ca în Fig. 3.14.

20. Deduceți relația de mărire rază-unghi, Ec. (3.30), din Ec. (3.25b).

21. (a) Găsiți lungimile focale stânga și dreapta ale sistemului '■ din Fig. 3.51.

(b) Găsiți poziția și dimensiunea imaginii pentru un obiect erect de 1 cm înălțime situat: (i) 50 cm la stânga lui V; (ii) 30 cm la stânga lui F; (iii) 20 cm la stânga lui F; (iv) 20 cm la dreapta lui F(obiect virtual). (Dacă imaginea este

Situat la + oo, dați, în loc de dimensiunea imaginii, o valoare pentru \ unghiul pe care razele paralele de ieșire îl fac cu axa z.)

<22√ Localizați imaginile lui P1, P2, P3 în Fig. 3.52. Găsiți mărirea laterală P'2P'l/P2P1 și mărirea longitudinală P3Pj/P3P1. Să presupunem că P2P1 < ' 10 cm, P3P1 < 10 cm.

23. Găsiți locația și dimensiunea imaginilor finale ale ■ Abjectelor la O1 și O2, așa cum se arată în Fig. 3.53.

^4^^(a^ Calculaţi unde ar fi focalizat un fascicul paralel de lumină incidentă din stânga din Fig. 3.54.

(b) Întoarceți „lentila” și repetați calculul.” ∧

25. Relucrați problema 17 folosind aproximațiile paraxiale.

26. În ceea ce privește adâncimea reală, care este adâncimea aparentă a unei piscine văzută direct de sus? (Indicele de refracție al apei este 1,33.) Repetați calculul la un unghi de vizualizare de 45°.

427. O imperfecțiune care se află la 1,5 cm sub suprafața blocului de sticlă Va apare în orientarea sa corectă, dar mărită cu un factor de 1,2. Dacă indicele de refracție este 1,65, determinați curbura suprafeței blocului.

28. Un pește auriu de 3 cm lungime se află în centrul unui vas sferic umplut cu apă (n = 1,33). Găsiți locația și dimensiunea imaginii peștelui dacă bolul are 12 inchi în diametru.

Dacă peștele este orientat astfel încât să fie îndreptat direct către observator și centrul peștelui se află în centrul bolului, cât timp apare peștele?

¿

29. Localizați poziția și dimensiunea imaginii unui obiect de 1 cm-/înălțime format dintr-o oglindă sferică sub

următoarele condiții: (i) R = — 20 cm, D01 = 30 cm; (ii) R = — 20 cm, D01 = 15 cm; (iii) R = — 20 cm, D01 = 8 cm; (iv) R = — 20 cm, D01 = — 15 cm; (v) R = + 20 cm, D01 = — 8 cm. Ilustrați fiecare caz cu o schiță grosieră.

30. O rază incidentă trece printr-un punct la 20 cm în stânga unei suprafețe sferice reflectorizante (de rază — 30 cm) la o înălțime de — 2 cm sub axa z (care trece

prin centrul de curbură) și cu un unghi de înclinare cu axa z de 0,05 rad. Aflați înălțimea și unghiul de înclinare al razei reflectate la 10 cm la stânga suprafeței.

31. Găsiți locația și dimensiunea imaginii de sine pe care șoferul unei mașini o vede prin reflexia de pe parbrizul din față dacă capul șoferului este la 20 inchi de geam și sticla are o rază de curbură de 12 ft.

32. Descrieți caracteristicile imaginii soarelui care se reflectă pe o picătură sferică de miere de 3 mm în diametru.

33. Trasați relația dintre D12/R1 și D01/R1 pentru intervalul D01/R1 de la – 3 la + 3 în reflectarea de pe o suprafață sferică. Identificați regiunea asociată cu obiecte și imagini reale și virtuale. Acest grafic poate fi folosit atât pentru oglinzi convexe, cât și pentru oglinzi concave?

34. Proiectați un reflector sferic care să fie folosit ca colimator pentru un sistem de proiecție în care distanța dintre lampă și oglindă trebuie să fie de 2 inchi. Va fi aceasta o modalitate eficientă de a produce lumină „paralelă"?

35. O sferă mică este plasată de-a lungul axei unei oglinzi sferice concave. Găsiți locația (locațiile) de-a lungul axei unde imaginea sferei va apărea sferică fără distorsiuni în direcția axei optice.

36. Lumina de la o sursă punctiformă pe axa unei oglinzi sferice concave la o distanță de 10 inchi în fața oglinzii luminează un punct de 0,5 in. în diametru pe suprafața oglinzii. Restul oglinzii este blocat de o mască. Lumina reflectată converge către un focus cu un coron de 70 mrad. Identificați caracteristicile oglinzii.

Secțiunea 3.3 Metode matrice

37. Demonstrați legea asociativă a înmulțirii matriceale:

(AB)C = A(BC)

38. Aflați 2x2 matrice A și B pentru care AB ≠ BA.

39. Demonstrați pentru două matrice 2x2 A și B că det(AB) = det(A)det(B).

-~ ` . Í 40. Compuneți matricea de sistem pentru configurația optică prezentată în Fig. 3.55.

, eu,. (41, Găsiți matricea de sistem adecvată pentru transformarea razelor de la fața frontală a blocului la fața din spate

a blocului din fig. 3.56.

i 42, Matricea sistemului care leagă un obiect care se află la 6 ft. coada unei imagini este dată de

-20m^1 \

-0,05)

-20

0

Obiectul este în aer, imaginea este în apă (n = 1,33). Ce dimensiune are imaginea? Un coron de Iight 2 mrad la

obiectul va fi convertit într-un coron care converge la imagine cu ce unghi?

''^43. Sticla cu un indice de refracție de 1,58 urmează să fie utilizată pentru a construi un strat subțire care va fi plană pe partea din spate. Pentru o putere de 2 m^1, care va trebui să fie curbura suprafeței frontale? Cum se va schimba puterea dacă Iens este făcut simetric cu aceeași curbură (dar negativ în semn) pe spate ca pe față?

44. Verificați locațiile planurilor principale din Fig.

3,25 pentru un indice de refracție Iens de 1,5.

45. Repetați soluția de trasare a razelor la problema 3.16 numai că de data aceasta utilizați metoda matricei în aproximarea paraxială.

46. Proiectați un formalism de matrice care ar fi util pentru tratamentul paraxial al reflexiilor multiple de pe suprafețele sferice.

47. Găsiți puterea și locația planurilor principale ale „lentilelor” discutate în Fig. 3,53 și 3,54.

Fig. 3.56

/ U

4Ș. Având în vedere matricea Sistemului

/0,5 -0,125 cm“ 1 \

y3 cm 1,25 y

care Caracterizează o lentilă multicomponentă. Găsiți planurile principale și puterea sistemului. Desenați o schiță a locației planurilor principale în raport cu suprafețele din față și din spate ale sistemului. Să presupunem că aceste suprafețe sunt la o distanță de 9 cm.

49. Luați în considerare combinația de Ienses prezentată în Fig. 3.57. na = 1,5, nb = 1,3, nc = 1,6. Găsiți matricea de sistem pentru combinație. |K| = 15 cm pentru toate suprafețele. D = 0,5 cm pentru toate grosimile Iens. Din matricea Sistemului găsiți locația planurilor principale ale Sistemului în raport cu suprafețele refractoare din față și din spate și identificați puterea sistemului.

50. Folosiți tehnica matricei pentru a găsi puterea și locațiile planurilor principale pentru o combinație de două Iense subțiri fiecare cu aceeași putere și mai mare decât zero, separate de o distanță d:

(a) Unde d = \/0>.

(b)   Unde d = (3/4)(1/^).

Secțiunea 3.4 Formarea imaginii

51y Localizați imaginea grafic pentru o poziție focală pozitivă Iens subțiri când

l0 O<S<f.

(b) — /< S < 0 (obiect virtual).

Je) S < -f.

52. Folosiți tehnica grafică pentru a găsi locația l⅜nVi dimensiunea imaginii produse de Iens cu lungime focală negativă,/ = — 2 cm, când un obiect de 1,5 cm tali se află în fața Ienilor la o distanță de 3 cm.

'53.; Pentru un Ien negativ avem/< 0.

(a)   Aflați lungimea focală a unui astfel de Ien presupus subțire când R1 = - 40 cm, R2 = 50 cm și n = 1,75.

(b)   Localizați grafic și analitic poziția și dimensiunea unei imagini atunci când S = 2f S = f, S = f/2, 5 = —f/2.

54.   Două iense subțiri, una cu lungime focală + /cealaltă cu lungime focală — f sunt montate la distanță f. Găsiți planurile principale și planurile focale ale combinației. Acum repetați calculul, dar dimensiunile focale sunt + f și — //6 și separarea Iens este (2/3)/ Pentru ambele cazuri, determinați analitic locația imaginii unui obiect la o distanță +/în fața prima suprafata Iens. Exprimați-vă răspunsul în termeni de distanță de la suprafața Iast Iens. Găsiți mărirea în fiecare caz.

55.   Găsiți punctul focal al obiectului pentru o combinație de două Ienses subțiri ale căror puncte focale individuale coincid.

56.   Un Iens pozitiv subțire de lungime focală / este plasat între o sursă punctuală și un ecran. Lăsați distanța dintre sursă și ecran să fie fixată la L. Deduceți o expresie pentru toate locațiile posibile ale Iens (măsurate de la sursă) care vor ajunge la o imagine reală pe ecran.

57.   Un Iens cu lungimea focală IOOcm este aproape de un obiect de 2 cm înălțime care este situat la 30 cm la stânga punctului focal al obiectului. Folosind exclusiv forma newtoniană a ecuațiilor subțiri Iens, găsiți locația și dimensiunea imaginii. Care este mărirea longitudinală în acest exemplu. Dacă Iens este construit din sticlă al cărei indice de refracție este 1,5 și apa este mediul de transmitere (n = 1,33), cum se modifică aceste rezultate?

58.   Demonstrați că mărirea laterală pentru două iense în serie este dată de

/1^2 ш ——————————————————

xd(S1-f1)-S1f1

unde /, este lungimea focală a primei lentile, d este separarea dintre lentile, S1 este distanța obiectului de la prima lentilă și S12 este distanța imaginii de la a doua lentilă.

59. Două lentile cu lungimea focală /ɪ = +9 cm și J2= –18 cm sunt așezate la o distanță de 3 cm. Dacă un obiect de 2,5 cm înălțime este amplasat la 20 cm în fața primei lentile, calculați

(a) Poziția imaginii finale.

(b) Dimensiunea imaginii finale.

(c) Verificați-vă soluția grafic.

60. Un fascicul paralel de Iight intră într-o perlă de plastic transparentă cu diametrul de 2,5 cm și având un indice de refracție de 1,440. În ce punct dincolo de mărgele sunt focalizate aceste raze?

61. Un Iens gros cu raze K1 = –4,5 cm si R2 =

– 3,6 cm are o grosime de 3,0 cm și un indice de 1,56.

(a) Găsiți puterea lentilei.

(b) Aflați distanțele de la vârfuri la planurile principale.

(c) Aflați distanțele de la vârfuri la punctele focale.

(d) Dacă un obiect este plasat la 24 cm în fața primului vârf al lentilei, găsiți locația imaginii în raport cu al doilea vârf.

(e) Reprezentați grafic soluția dvs.

62. Folosiți metoda matricei pentru a găsi locațiile planurilor principale și ale planurilor focale pentru sistemul optic din Fig. 3.58. Exprimați-vă măsurătorile cu privire la vârfuri. În ceea ce privește al doilea vârf, localizați imaginea unui obiect care se află la 20 cm în fața primului vârf.

63. Lentila groasă prezentată în Fig. 3.59 este expusă la lumină paralelă.

(a) Tratați lentila ca fiind subțire, cu locația lentilei subțiri în centrul lentilei reale și în acest fel calculați punctul focal pentru raze.

(b) Repetați acest exercițiu tratând lentila ca fiind groasă, dar încă în limita paraxială.

(c) Folosiți formalismul exact de urmărire a razelor pentru a găsi

interceptarea axei optice a razelor care sunt la 0,25 in. și 0,5 in. de axa optică pe partea incidentă.

Secțiunea 3.5 Exemple de optică paraxială

În cazul unui ochi miop, punctul focal al imaginii pentru un obiect la infinit îndepărtat se află în fața retinei. Să presupunem că ochiul are caracteristicile din Fig. 3.34, cu excepția faptului că F' este la 22 mm de partea din față a corneei, mai degrabă decât la 24,38 mm după cum este necesar. Găsiți puterea unei lentile corective care ar putea fi plasată la 14 mm în fața corneei care va plasa F' pe retină. Repetați calculul pentru o lentilă de contact.

65. Pentru o lupă simplă care are o putere de mărire de M = 20 când imaginea este în punctul apropiat atunci când este utilizată ca în Fig. 3.35, găsiți lungimea focală a lentilei și distanța la care obiectul ar trebui plasat așa cum este măsurat. din lentilă.

γ 66. Proiectați o lentilă obiectiv de microscop pentru un microscop standard care va produce o amplificare de 200 atunci când este utilizat în combinație cu o lentilă de ochi cu o lungime focală de $ícm.

2,

Probleme 191

6?. Să considerăm o sferă mică de sticlă cu indice n, rază; R. Găsiți o valoare a lui n pentru care se formează o imagine virtuală la infinit. Care este atunci mărirea rezultată a microscopului? Vezi fig. 3.60.

f 68 Arătaţi că combinaţia a două Iense având ! puteri egale și opuse o distanță finită, pozitivă d, are o putere netă pozitivă 0t și găsiți & în funcție de d.

' 69. Un microscop este asamblat cu elemente având planuri focale, așa cum se arată în Fig. 3.61.

(a) Aflați lungimea focală și locația planurilor principale ale combinației. Acest microscop este folosit pentru a proiecta o imagine reală la o distanță de 500 mm până la righiul lui F2.

.(b) Cât de departe de stânga lui F1 trebuie plasat obiectul?

l(c) Care este mărirea laterală totală?

(d) Găsiți răspunsurile la (b) și (c) când imaginea este virtuală și la 250 mm la stânga lui F2.

Telescopul 7θ.×sA este format din două iense pozitive, f1 =

' 30 cm pentru obiectiv și f2 = 2 cm pentru lentila ochiului. Dacă obiectul se află la 250 m distanță de obiectiv, cât de departe ar trebui să fie plasate Iensele dacă imaginea urmează să fie localizată în punctul apropiat al ochiului standard? Găsi

, locația imaginii intermediare.

Í 7Д, A∏ astronomica! telescopul (Fig. 3.40) este alcătuit din două Iens pozitive subțiri astfel încât mx = —10 și f1 + /2 = 1 ɪɪɪ- Se folosește cu o separare Iens d = 1 m. Un observator se uită prin telescop la lentila ochiului.

jχΓfCare este cea mai apropiată distanță pe care o poate afla un obiect față de obiectiv și încă poate fi văzut în mod convenabil? (Imaginea mai departe de observator de 250 mm).

^jb^Găsiți răspunsul la (a) când se folosește un telescop galileian cu mx = +10, /1 + /2 = θ-ε m> d — 0,8 m.

72. Telescopul din problema 71 este folosit ca dublet pentru a observa un obiect la 2 m la stânga obiectivului. Separarea Iens d este ajustată pentru a oferi o imagine virtuală situată la 0,3 m în partea stângă a lentilei ochiului. Găsiți d și mărirea generală.

73. Să considerăm un teleobiectiv alcătuit dintr-un telescop galileian de mărire unghiulară mx împreună cu un telescop cu lungime focală f. Arătați că lungimea focală a combinației este mxf și localizați planurile principale (vezi Fig. 3.41).

74. O cameră cu unghi larg Iens are o lungime focală efectivă mai mică decât o Iens normală în timp ce este plasată în aceeași poziție față de film (separarea elementului din spate la film constantă în comparație). Următoarele argumente similare cu cele care înconjoară Ec. (3.120) pentru teleobiectiv, deduceți o expresie pentru mărirea laterală a unui obiectiv cu unghi larg.

Obiectiv

II f1l = f1 = 15 mm

/ = 250 mm

Fig. 5.61

4 Practicai Geometrica! Optica

4.1 Opriri și deschideri

Nu este suficient să poți prezice poziția și dimensiunea imaginii pentru un sistem optic. Alte proprietăți importante ale unei imagini includ luminozitatea acesteia și dimensiunea câmpului vizual. Aceste subiecte necesită un studiu al limitărilor întinderii spațiale și unghiulare a fasciculelor de lumină prin opriri și deschideri. Pentru a face un astfel de studiu, va trebui să introducem câteva definiții și concepte noi. Chiar dacă sistemul optic analizat este proiectat să accepte razele de lumină care nu sunt paraxiale, de obicei este suficient să se trateze opririle și deschiderile folosind metodele opticei paraxiale.

A. Aperture Stop și pupile

Considerăm un obiect situat pe axa unui sistem optic. Imaginați-vă că obiectul emite un cor de lumină cu unghi variabil de vârf. Pentru un unghi mic, toate razele de lumină vor trece prin Sistem, dar pe măsură ce unghiul crește, unele dintre raze vor fi oprite de marginea unui Ien sau de o deschidere mecanică undeva în Sistem. Opritorul de deschidere (AS) este definit ca fiind acel opritor sau marginea Iens care limitează fizic unghiul solid al razelor care trec prin sistem dintr-un punct de obiect pe axă.____

1. O singură lentilă subțire. A. Aperture Stop pe partea incidentului. Un exemplu simplu de oprire a deschiderii este prezentat în Fig. 4.1α. Aici gaura din ecran Iimit unghiul solid al razelor de la obiectul de la P0 care poate trece prin Sistem. Este oprirea diafragmei.

Razele sunt tăiate la A și B. Imaginile lui A și B sunt A' și B'. La un

(A)

Fig. 4.1 Diagrame cu raze pentru cazul opritorului de deschidere pe partea incidentă a lentilei: (u) pupilă de ieșire virtuală; (b) reai exit pupil.

Observatorul Privind înapoi prin frontul Iens o poziție lângă P'o, va părea că A' și B' ar tăia razele.

Dacă deplasăm ecranul la stânga lui F, avem situația prezentată în Fig. 4.1b. Ecranul este în continuare oprirea diafragmei, dar imaginile A', B' ale lui A și B sunt acum la dreapta imaginii P'o. Pentru un observator care se deplasează suficient de departe spre righi, i se pare în continuare ca și cum razele sunt tăiate de A’ și B’.

-Imaginea opritorului de deschidere care este formată de lumină după ce trece prin Iens se numește pupilă de ieșire. În Fig. 4.1α pupila de ieșire este virtuală, în Fig. 4.1b este reală. Pentru un observator care examinează lumina după întâlnirea ei cu lentila, pupila de ieșire este deschiderea care definește unghiul solid pentru razele care converg către punctul de imagine pe axă.

Prin analogie, putem defini un elev de intrare. Aceasta este deschiderea pe care un observator ar identifica-o drept limitarea unghiului solid pentru razele care diverge de la un punct obiect pe axă. În Fig. 4.1, opritorul de deschidere acționează ca pupilă de intrare. Opritorul diafragmei este situat fizic între obiect și obiectiv. În această poziție, opritorul de deschidere limitează unghiul solid al razelor care provin de la obiect.

Termenul „elev” are legătură cu proiectarea unui sistem optic destinat utilizării cu observarea vizuală. Cel mai de dorit este ca pupila de ieșire să coincidă aproximativ cu pupila ochiului observatorului. Acest lucru se poate întâmpla în Fig. 4.Ih, dar nu în Fig. 4.1 a.

O rază de la un obiect în afara axei P prin centrul lui C al opritorului de deschidere se numește rază principală (CR). Porțiunea sa inițială (extinsă dacă este necesar) trece prin centrul pupilei de intrare. Raza conjugată P'C va (apărea) să treacă prin centrul C al pupilei de ieșire.

O rază, cum ar fi PA, dintr-un punct obiect prin marginea opritorului de deschidere, se numește rază marginală (MR). Raza conjugată PrA' pare să treacă prin marginea pupilei de ieșire. Razele marginale trase dintr-un obiect pe axă identifică unghiul maxim solid care poate fi trecut de Sistem.

Dacă planul obiect din Fig. 4.Ih ar fi oarecum dozat pe ecran, razele de la P0 ar înceta să fie limitate de AB, dar ar fi limitate de montura Iens QR. Prin urmare, acesta ar deveni opritorul de deschidere. Punctul de tranziție are loc pentru P0 la Pt, unde Pt, A și R sunt coliniare. Pentru dozatorul P0 la Iens decât acesta, marginea sa este opritorul de deschidere.

b. Oprire diafragmă pe partea de transmisie. Două cazuri simple în care opritorul de deschidere întâlnește lumina după Iens sunt prezentate în Fig. 4.2a și b. Este atunci propria sa pupilă de ieșire. Primele indică faptul că lumina la oprirea diafragmei a trecut deja prin obiectiv.

Pupila de intrare este imaginea reală a opritorului de deschidere din Fig. 4.2a și imaginea virtuală a opritorului de deschidere din Fig. 4.2b. În ambele cazuri, aceasta este deschiderea pe care un observator ar identifica-o ca limitare pentru razele care diverge de la punctul obiectului

2. Sistem cu lentile multiple. Într-un sistem cu lentile multiple se poate identifica întotdeauna o oprire a diafragmei folosind aceleași definiții ca cele prezentate în secțiunea 4.1 Al. Aceasta este deschiderea fizică care limitează cantitatea de lumină care poate trece prin Sistem. Pupila de intrare va fi deschiderea sau imaginea adecvată a unei deschideri spre care par să diverge razele marginale de la un obiect pe axă. Pupila de ieșire va fi deschiderea sau imaginea unei deschideri din care aceleași raze marginale par să convergă către imagine. În Fig. 4.3, oprirea diafragmei este AB, în timp ce pupila de intrare este AB și pupila de ieșire este A'B'.

O metodă sistematică de găsire a elevului de intrare este să imaginezi toate opririle și Iens

Fig. 4.2 Diagrame cu raze pentru cazul opririi diafragmei pe partea de transmisie a lentilei: (a) pupilă de intrare reală; (fe) elev virtual de intrare.

jante la stânga (în direcția opusă celei care este urmată de razele de la obiect) prin toate elementele refractoare care intervin ale sistemului. Găsiți unghiul solid subtins de fiecare imagine la P0. Cea cu magnitudinea cea mai mică este pupila de intrare, iar obiectul fizic care îi corespunde este opritorul de deschidere. Alternativ, pupila de

ieșire poate fi găsită imaginând aii opriri și Iens jante la dreapta (în aceeași direcție cu cea urmată de lumina de la obiect) prin toate elementele refractoare intervenite ale sistemului. Determinați unghiul solid subtins de fiecare imagine la P'o. Cel cu cel mai mic unghi solid este pupila de ieșire, iar obiectul fizic real corespunzător este opritorul de deschidere. Aceste două proceduri trebuie, desigur, să identifice același obiect ca opritorul de deschidere.

3. Metoda matriceală de localizare a opritorului de deschidere. A. Discutie generala. Metoda matricei poate fi utilă în localizarea opritorului de deschidere, mai ales când este suficientă utilizarea unidimensională a unghiurilor, mai degrabă decât a unghiurilor solide. Fie ca obiectul să fie la pianul care taie axa la A din Fig. 4.4. Atunci o rază de la A care doar ratează marginea opritorului deschiderii va fi raza care tocmai trece prin Sistem. Fie α_0 unghiul pe care îl formează cu axa. Dacă Mлв reprezintă matricea de transformare din planul din A la planul opririi diafragmei, atunci în general avem

Fig. 4.4 Raza marginală care ilustrează relația dintre unghiul la obiect și dimensiunea opritorului de deschidere.

sau, dacă sistemul Iens este în aer,

a, = M11a + M12X (4-Ia)

x' = M21Qt + M22x (4.1b)

Acum pentru raza în cauză pe care o avem

x = 0, Ot = Ot0, andx' = pv

unde p este raza opririi diafragmei. Ecuația (4.1b) dă atunci

⅝ = ɪ («) M2ι

Astfel, opritorul de deschidere are cel mai mic raport dintre raza p și M21 pentru toate opritoarele sau jantele Iens din Sistem.

b. Exemplu. Ca un exemplu simplu, luăm în considerare cazul ilustrat în Fig. 4.5. Problema care trebuie decisă este dacă L1 sau imaginea lui L2 subtind cel mai mic unghi la A. Acum L1 subtinde semiunghiul

Ot1 = 0,1 rad

Metoda matricei necesită calculul elementului (2, 1) al matricei

= / 1 OVl -!//Л/ 1 0 \ /-1 -0.2 \ AL2 \ Di2 lʌθ 1 Λnoι 1/ \ 4 ^0•2/

Acesta este M21 = 4 cm. Henee prin Ec. (4.2) avem

α_2 = 0,25 rad

Pentru sistemul din Fig. 4.5, marginea L1 este opritorul de deschidere și pupila de intrare.

Metoda directă ar fi găsirea imaginii lui L2 așa cum este formată de L1. Este situată la o distanță S' = 30 cm până la stânga lui L1 și este | S'/S | × 1 cm = 5 cm înălțime. Aceasta arată, de asemenea, că unghiul subîntins la A este de 0,25 rad.

Fig. 4.5

B. Field Stop și Windows

1. Definiții. Ar trebui să fie clar că oprirea diafragmei determină iluminarea unei imagini punctuale pe axă, deoarece cu cât este mai mare unghiul solid al conului de lumină transmis, cu atât fluxul de lumină transmis este mai mare. Densitatea fluxului în părțile în afara axei unei imagini depinde în parte de dimensiunea și locația unui alt opritor, opritorul de câmp.

Atât razele principale, cât și razele marginale vor lăsa un obiect în afara axei, dar nu toate aceste raze pot trece prin imagine. Oprirea câmpului este acel opritor sau marginea lentilei care limitează unghiul solid format de razele principale. Imaginea opririi câmpului formată din elemente optice de pe partea incidentă a opritorului de câmp se numește fereastra de intrare (En.W.). Imaginea opririi câmpului formată din toate elementele optice după oprirea câmpului este fereastra de ieșire (Ex.W.). Dacă nu există elemente de refracție suplimentare între opritorul de câmp și obiect sau imagine, atunci opritorul de câmp în sine acționează ca fereastra de intrare sau de ieșire, respectiv.

Dacă fereastra de intrare este aproape de planul obiectului, aceasta tinde să limiteze câmpul de vedere, adică întinderea laterală a obiectului care va fi imaginat de Sistem. Pentru un observator care examinează imaginea, fereastra de ieșire pare să limiteze zona imaginii, la fel cum o fereastră limitează zona pe care un observator o poate vedea când privește în aer liber. Pupila de ieșire, pe de altă parte, tinde să limiteze unghiul solid al razelor care converg către fiecare punct al imaginii.

Am folosit termenul „tinde să” în paragraful precedent, deoarece în multe sisteme optice câmpul de vedere nu este puternic limitat de oprirea câmpului; în schimb, există un grad de Ioss de Iight pe măsură ce ne depărtăm de axă. În plus față de acest efect, și legat de acesta, este un alt efect: un con de raze de lumină de la o sursă în afara axei la pupila de intrare nu va fi neapărat transmis în întregime. Poate fi tăiat parțial de opritorul de câmp sau de alte opriri sau margini de lentile din sistem. Aceasta se numește vignetare.

2. Exemplu. Pentru a ilustra aceste idei, considerăm un sistem optic format din două lensuri subțiri de aceeași lungime focală fi unde

PθEι = 2f, L1L2 — 4f, L2P0- 2f

Există un stop de deschidere în spatele L1 (Fig. 4.6). Un obiect pe axa P0 este imaginat mai întâi la P0 și apoi la P0. Oprirea diafragmei și pupila de intrare sunt la L1. Din ecuația lentilei aplicată imaginii opririi diafragmei de către L2,

1

S + S'~f

cu S = 4 fi, găsim

5 34/3

Astfel, pupila de ieșire va fi cu o treime mai mare decât opritorul diafragmei.

Fig. 4.6 Vignetare într-un sistem simetric cu două lentile. Ray MR1 ratează deschiderea L2, care este oprirea pe teren. Acest lucru cauzează o pierdere a luminozității imaginii pentru părțile în afara axei imaginii.

Lentila L2 este oprirea câmpului și, de asemenea, fereastra de ieșire în acest exemplu. Datorită poziționării simetrice a Ienselor, fereastra de intrare are o treime din dimensiunea L2 și este situată la o distanță (4/3)/până la stânga L1.

Pe măsură ce P0 se deplasează în afara axei, razele precum MR1 sunt Iost prin vignetare. Dacă un ecran iluminat uniform ar fi plasat în planul obiect la P, imaginea sa ar fi iluminată neuniform și ar fi aproximativ jumătate mai luminoasă la P" decât la P0.

Se poate pune o oprire suplimentară la punctul intermediar al imaginii P0, așa cum se arată prin liniile întrerupte. Dacă subtinde un unghi mai mic, așa cum este văzut din centrul opritorului de deschidere L1, decât face L2, va deveni opritorul de câmp. Noua fereastră de intrare va fi acum în planul obiectului și (în acest exemplu) va avea aceeași dimensiune ca oprirea câmpului (ambele sunt prezentate întrerupte în Fig. 4.6). Pe măsură ce P0 se deplasează în afara axei către P, razele principale vor fi acum tăiate mai întâi de această nouă oprire a câmpului, dar unele dintre razele marginale vor lipsi în continuare de L2 și va exista în continuare Ioss Ofbrightness în planul imaginii. Câmpul vizual în planul obiectului este acum puternic limitat de noua fereastră de intrare, dar avem în continuare vignetare.

3. Lentila de câmp. Vinetarea din exemplul secțiunii 3.1B2 poate fi complet eliminată punând un câmp Iens L3 la P0 (Fig. 4.7). Datorită locației sale, nu va afecta imaginea Iight din punctul de pe axa P. Va devia întregul coron de Iight, originar dintr-un punct în afara axei P. Această abatere va fi cea mai eficientă dacă L3 concentrează L1 pe L2. , pentru o rază marginală Ieșind din partea inferioară a lui L1 va fi deviată spre partea superioară a lui L2, în timp ce fără câmpul Iens L3, această rază marginală ar rata complet L2. Dacă L3 este mai puternic decât este necesar pentru a focaliza L1 pe L2, atunci o rază

marginală care iese din partea de jos a lui L1 va fi deviată atât de mult încât va rata partea superioară a lui L2.

În acest caz optim, un întreg coron de raze de la un punct în afara axei din planul obiect până la întreaga pupilă de intrare fie este complet reușită să treacă prin restul Sistemului, fie complet nereușită, în funcție de faptul că P este sau nu.

Rg. 4.7 Un câmp Iens îndoaie razele pentru a corecta pentru vignetare. Nu există nicio modificare a măririi ca urmare a introducerii lentilei de câmp.

în fereastra de la intrare. Oprirea câmpului este la L3, fereastra de intrare este în planul obiectului, câmpul vizual este puternic limitat de fereastra de intrare, iar luminozitatea imaginii se potrivește, într-o primă aproximare, cu cea a obiectului. Acest lucru va fi discutat în detaliu într-o secțiune următoare.

Introducerea unui câmp Iens în locuri cheie într-un sistem optic poate face o diferență marcată în capacitatea sistemului de a transmite o cantitate utilă de lumină. Desigur, acest lucru se poate face într-un sistem format din Componente individuale bine separate, dar nu pentru o lentilă compusă.

Conceptul de oprire a câmpului nu este adesea deosebit de util în discutarea unei lentile compuse, cum ar fi cea din Fig. 4.3. Pentru o astfel de lentilă, vignetarea unui con de raze dintr-un punct în afara axei poate fi descrisă prin diagrame de vignetare, așa cum se arată în Fig. 4.8. Mai întâi luăm în considerare fiecare deschidere de limitare a razelor sau marginea Iens pe rând. Folosind acele elemente refractoare care sunt plasate în partea stângă a fiecăruia, formăm o imagine a fiecărui obiect limitator de raze. De obicei, există doar trei obiecte Iimiting importante, prima margine Iens (FLR), opritorul de deschidere (AS) și Iens Iens (LLR). FLR este deja elementul din stânga, așa că nu trebuie să se formeze nicio imagine a acestuia. Imaginea AS este pupila de intrare (En.P). În cele din urmă, imaginea jantei Iens Iens (ILLR) implică refracția de către toate Iensurile din Sistem, cu excepția lentilei Iast.

Când obiectul se află pe axă, conul Iimitator de lumină este identificat de raze care se îndreaptă spre pupila de intrare. Pentru punctele obiect în afara axei, razele trebuie să fie supuse unor limitări suplimentare impuse de FLR și LLR. Pentru a determina acest lucru, trageți raze îndreptate din punctul obiectului către FLR și ILLR. Dacă oricare dintre acestea definește un con de Iight mai mic decât cel definit de En.P., atunci are loc vignetarea. Razele marginale superioare sunt predispuse la limitare de către FLR, iar razele marginale inferioare sunt predispuse la limitare de către LLR. Conul de lumină care trece prin Sistemul din Fig. 4.8 este prezentat în secțiunile verticale din jumătatea stângă a fiecărei părți a figurii.

Pentru a ilustra limitările impuse razelor din planul desenului,

ILLR

FLR

En.P.

FLR

ILLR

Proiecție

4 din FLR pe En.P.

Proiecția FLR pe En.P.

Proiecția ILLR pe En.P.

Proiecția ILLR-urilor pe En.P.

π9• 4.8 Diagrame Vignettmg. Diafragmele de limitare a razei sunt ilustrate spre stânga. Dintr-un punct de obiect, conurile de raze potențiale sunt atrase la imaginile deschiderilor. Intersecția acestora identifică coronul util pentru un anumit punct de obiect, (a) Pe axă. (b) În afara axei cu o cantitate mică. (c) În afara axei cu o sumă mai mare.

putem proiecta FLR și ILLR din punctul obiect pe planul pupilei de intrare (En.P.). Dacă unghiurile nu sunt prea mari, aceste proiecții pot fi aproximate prin cercuri. (Sunt într-adevăr elipse.) Găsim apoi aria comună tuturor celor trei proiecții, afișată strălucitor în jumătatea dreaptă a fiecărei părți a Fig. 4.8. Lumina care trece prin Sistem constă din raze totale din punctul obiect care se îndreaptă către această zonă comună (luminoasă) în planul pupilei de intrare.

Efectul „Opririi” Ienilor poate fi observat prin scăderea dimensiunii cercului care reprezintă pupila de intrare. Pentru a obține o scădere uniformă a iluminării (și, de obicei, pentru a minimiza aberațiile), este de dorit ca centrul pupilei de intrare să corespundă cu centrul zonei luminoase. Nu este cazul în Fig. 4.8, deoarece opritorul de deschidere nu este centrat între cele două Iense, care în acest exemplu au putere egală.

4.2 Radiometrie și Fotometrie

Un sistem optic real nu trebuie doar să producă o imagine de dimensiunea dorită la locul potrivit, dar imaginea trebuie să fie suficient de strălucitoare pentru a fi utilă. Luminozitatea imaginii va depinde de luminozitatea obiectului și de dimensiunea și locația opririlor în cadrul sistemului optic.

În optică există două tipuri de unități pentru cantitățile legate de energie, fizice și psihofizice. În notația noastră, indicele e (pentru

energie) va desemna unități fizice și V (pentru vizuale) unități psihofizice.

A. Nomenclatura fizică sau radiometrică

1. Definiții. Vom discuta mai întâi despre sistemul fizic, folosind sistemul mks sau un sistem hibrid în care aria este măsurată în centimetri pătrați.

Energia radiantă, Q_e în jouli, se referă la cantitatea totală de energie emisă, transferată sau colectată într-un proces de radiație. Densitatea de energie radiantă, U_e în jouli/m3, este energia radiantă conținută într-o unitate de volum de spațiu. Acestea două sunt legate de

$$U_e = dQJdr \quad (4,3)$$

unde di^ este un element de volum diferenţial arbitrar. Am văzut deja în Capitolul 1 că densitatea de energie datorată unui câmp electromagnetic dat de Ec. (1,54) este

$$C_e = \varepsilon_0 |E|^2 \quad (4.4a)$$

sau în prezența materiei

$$U_e = \varepsilon |EI^2 \quad (4.4b)$$

De obicei, suntem interesați de cantități medii în timp, deoarece detectorii noștri nu pot

urmărim variația rapidă a câmpului electromagnetic, de aceea avem nevoie

P

$$\langle C_e \rangle = - |E|^2 \quad (4.4c)$$

În restul acestei secțiuni vom simplifica notația eliminând parantezele medii de timp. Cu toate acestea, trebuie să se înțeleagă că toate cantitățile sunt mediate pe un număr de oscilații ale câmpurilor. Puterea radiantă sau fluxul radiant Φ_e în waţi este rata de timp de schimbare, sau rata de transfer, a energiei radiante. Aceasta poate fi exprimată ca

$$\Phi_e = dQJdt \quad (4,5)$$

Dacă identificăm o suprafață închisă care definește un volum așa cum se arată în Fig. 4.9, atunci fluxul radiant total care iese prin suprafața închisă este

unde dA este vectorul elementului de suprafață diferențială luat pozitiv spre exterior; S este densitatea fluxului de energie radiantă așa cum este definită în Ec. (2,20)

$S = E \times H$

După media de timp în medii neabsorbante, locale, liniare, izotropice, nemagnetice, aceasta devine [Eq. (2,45)]

„ ncε0 ,^

S = ^0 | E0 |⅛   (4.7)

În cazul general, S net din toate contribuțiile trebuie determinat la fiecare punct de pe suprafață astfel încât integrai din Ec. (4.6) poate fi completat. [În majoritatea cazurilor, aceasta se va dovedi a fi o sumă vectorială a S-urilor cu medie în timp din fiecare sursă. Cu toate acestea, dacă câmpurile din diferitele surse sunt coerente (aceeași frecvență și relații de fază constantă de auz între ele), atunci câmpurile trebuie combinate vectorial înainte ca S să poată fi determinat (mai multe despre aceasta în capitolul 5).]

Fig. 4.9 Suprafață închisă utilizată pentru calcularea fluxului radiant total.

Fig. 4.10 Geometria fluxului radiant integrai în cazul în care Lumina posedă o gamă de direcții.

Combinația densității fluxului din diferite surse incoerente poate fi exprimată ca

Φ.

1 + S2+S3+ ...]•dA

sau ca

[S1 cos θ1 + S2 cos θ2 + ...] Jj√

(4,8)

Când este prezent un interval continuu de direcții pentru S, acesta este scris mai convenabil ca

(4,9)

Acest lucru este ilustrat în Fig. 4.10. Factorul din paranteză este o integrală unghiulară solidă peste toate direcțiile. Incrementul dΩ este definit în Fig. 4.11 ca

í/Ω =

(4,10)

Fig. 4.11 Definirea relațiilor pentru elementul diflerențial cu unghi solid.

Fig. 4.12 Radianța de la o sursă de suprafață dsl în direcția θ față de normala suprafeței sursei și pentru unghiul solid dQ.

Acesta este descris de un coron, centrat pe o direcție specificată de vectorul unitar s, care interceptează o porțiune a sferei. Unghiurile solide sunt măsurate în Steradians (sr).

Dependența unghiulară diferențială a densității fluxului radiant dS/dΩ este denumită radiație și este semnificată prin Le. Prin urmare,

L Ids-

e dΩ

d2Φe cos θ dΩ dA

(4,11)

Strălucirea este dată în Wm-2 sr-1.

Suntem adesea preocupați de Caracteristicile surselor sau imaginilor dintr-un sistem optic. Acest lucru este cel mai bine descris de strălucire, deoarece proprietățile sursei sau imaginii depind de obicei de unghi (e) și poziție. Figura 4.12 ilustrează cum se specifică strălucirea unei surse. Se scrie fluxul radiant emis de dsi al sursei într-un element cu unghi solid dΩ în jurul direcției s

d2Φe = Le dΩ dsi 1 = Le dΩ dsi cos θ = Le dΩ(s · dA)

(4,12)

În principiu, radiația Le poate fi măsurată cu ajutorul aparatului ilustrat în Fig. 4.13. Deschiderea mică sau deschiderea are o zonă d≈√0. Proiectați această zonă pe sursă folosind linii drepte dintr-un punct de pe detector. Aria proiectată la sursă este atunci dsip = dsi0(l + d)2/l2. Unghiul solid subtins de detector așa cum este văzut de la sursă este dΩ = dsidet(l + d)2. Astfel, dsip dΩ = dsi0 dsiieJl2. Henee, dacă detectorul este calibrat pentru a citi în wați, luăm ieșirea sa d2Φe și obținem radiația din ecuație

l d2Φe   d2Φel2

e dsip dΩ dsiQ dsidet

Detector, zona cL√det

Fig. 4.15 Dispozitiv cu care a putut fi măsurată radiația de la o sursă.

4.2 Radiometrie și fotometrie 207

Sursa dsi

Fig. 4.14 Ieșirea radiantă este puterea pe unitatea de suprafață Ieșind dsi și mergând la dreapta. Include direcțiile de propagare θ de la 0 la 90°.

Una dintre cele mai importante mărimi fizice din radiometrie este fluxul de energie radiantă care curge pe unitatea de suprafață a unei suprafețe reale sau imaginare. Convenția acceptată face o distincție între suprafețele sursă și alte suprafețe. The l'idhint ii \f (in W'm2) i, Hic Iotal Cinitlcd Ilux Hciisitx (Fig. 4.14). În mod similar, - ' un W m este densitatea de flux radiant incident pe un real sau

suprafata imaginara. Astfel avem pentru fluxul către sau dinspre zona da√

dΦe = Me dsi (din dsi}

dΦe = Ee dsi (pe Jj/)

(4,13)

Aceste marimi sunt legate de radianta printr-o integrare unghiulara. De exemplu, ieșirea radiantă a unei surse poate fi obținută prin integrarea ecuației. (4.12) pentru dsi fix (la un punct dat de pe sursă).

dΦe = F d2Φe = dsi F Le cos θ dΩ

J(l/2)   J(l/2)

Prin urmare

Pe mine

Le cos θ dΩ

(1/2)

(4,14)

Aici

(...) dΩ

J(l/2)

se referă la o integrare unghiulară peste jumătate din unghiul solid complet, adică peste toate direcțiile spre exterior de la suprafață.

O altă mărime importantă este intensitatea radiantă Ie (în W/s). Acesta reprezintă fluxul pe unitatea de unghi solid radiat de o întreagă sursă într-o direcție dată (reprezentată prin s). Acest lucru este prezentat în Fig. 4.15. Intensitatea este de interes dacă sursa

dA

Fig. 4.15 Intensitatea radiantă /(s) reprezintă puterea totală pe unitatea de unghi solid care radiază în direcția § dintr-o sursă finită.

Fig. 4.16 Toate razele în aceeași direcție â sunt focalizate în același punct de către lentilă.

este departe și dacă cineva are un detector mic, astfel încât toate razele din orice parte a sursei către orice parte a detectorului să fie în esență paralele. De asemenea, este de interes dacă lumina este studiată în planul focal al unei lentile, pentru că atunci razele de la sursa cu o direcție dată s sunt focalizate în același punct (Fig. 4.16).

Dacă luăm în considerare un con de raze care formează un unghi solid dΩ în jurul s (Fig. 4.15), atunci fluxul este dat de

$d\Phi e\text{-}Ie d\Omega$ (4,15)

Intensitatea Ie va depinde, în general, de direcția s. Intensitatea Ie poate fi obţinută prin integrarea Eq. (4.12) pe suprafață, pentru s și dΩ fix:

$d\Phi e =$

$d2\Phi e = d\Omega$

$\cos \Theta\, ds\# = sd\Omega\bullet$

Le dA

Henee

$\iint Le \cos \theta\, ds¿ = s \bullet JJ\sum e\, JA$

(4,16)

Aici integrala se extinde peste acea parte a suprafeței care poate radia în direcția s, de exemplu, peste zona umbrită din Fig. 4.15.

2. Cazuri speciale, a. Sursa de izotropie. Pentru o sursă sferică uniformă de rază R0 care emite flux total Φe. |ot, obținem, prin integrare pe întreaga suprafață,

$\Phi e.\ tot =$

$Me\ dsi = 4\pi R0\ M1$

Apoi un mic detector de zonă ds/det plasat așa cum se arată în Fig. 4.17 va primi flux

$d\Phi e = \Phi e,tot$

^det

4πΛ2

Φe, lot ^det

4π R2

Φ

, tot

4π

dΩ

(4.17b)

Prin comparație cu Eq. (4.15) obținem

Φ≡.tot

4π

(4,18)

Sursă

r

~r~

Fig. 4.17

R

— Tl ⅛

Fig. 4.1 β Unghiul solid inelar Element diferențial.

pentru o sursă de izotropie. Pentru o astfel de sursă, presupusă sferică, obținem și, folosind (4.17a),

∫e =

(4,19)

b. Sursa Lambert. O sursă Lambert este una care are aceleași proprietăți direcționale ca o mică gaură dintr-o cavitate. În interiorul unei cavități, Iight-ul este complet randomizat. Se propagă peste tot în toate direcțiile cu strălucire egală. De asemenea, este uniform pe toată zona găurii. Astfel Le nu este o funcție a lui s sau a poziției pe sursă. Pentru o sursă Lambert, aparatul din Fig. 4.13 ar produce o ieșire a detectorului independent de poziție și unghiul θ,

atâta timp cât câmpul vizual al detectorului este limitat de deschiderea zonei dsd0 și nu de marginea sursei.

Pentru o sursă Lambert putem lua Le în afara integralei din Ec. (4.14). Apoi este util să redefiniți elementul unghi solid dQ. astfel încât cos θ va fi o constantă pe element. Inelul prezentat în Fig. 4.18 satisface această cerință. Atunci ¿Ω = 2π sin θ dθ. Pentru o sursă Lambert avem atunci

i'π/2   /*π/2

cos θ(2π sin 0) dθ = πLe ¿(sin2 θ') = πLe (4.20) o   Jo

3. Mărimi spectrale. Definițiile anterioare se referă la radiația totală la toate lungimile de undă. Poate fi definită o versiune spectrală a fiecăruia. De exemplu, un flux radiant spectral Φe(2) dλ reprezintă fluxul într-un interval de lungimi de undă între λ și λ + dλ. De obicei, lungimile de undă sunt specificate în termeni de nanometri. Astfel Φe(2) ar fi în wați/nanometru.

Obținem prin integrare

Φ.

Φe(λ) dλ

o

(4,21)

Alte mărimi spectrale sunt Qe(λ), Uf λ), Mf λ), Ef λ), If λ) și Lf λ).

De asemenea, este de interes în cazurile care implică interacțiunea radiației cu materia să se poată specifica fluxul de fotoni într-un fascicul optic. Mărimile spectrale identifică o lungime de undă unică care, prin teoria cuantică, este asociată cu fotonii unei anumite energii. Energia per foton este hc/λ (unde h = 4,135 × 10'15 eV sec este constanta lui Planck). Astfel, toate cantitățile spectrale care implică energie pot fi convertite în cantități care implică fotoni prin împărțirea expresiei radiante.

iuni prin hc/λ. Astfel, fluxul de fotoni (fotoni pe secundă) într-un interval de lungimi de undă de la λ la λ + dλ este

N(λ)dλ = ^j^dλ   (4,22)

el

4. Exemple numerice de mărimi radiometrice. „Una dintre cele mai intense surse incoerente este o lampă cu mercur de super-înaltă presiune. Aceasta are o strălucire în regiunea vizibilă a spectrului de aproximativ 250 W/ (cm2 sr). Laserele cu gaz continuu au o putere totală relativ mică, dar este foarte directă. Un exemplu tipic este oferit de un laser heliu-neon de 4 mW care emite lumină la 632,8 nm.

Ieșirea sa poate fi focalizată într-un punct r = 0,1 mm cu fasciculul formând un con de semiunghi θ = 2 mrad. Suprafața spotului este de aproximativ 3,1 × 10-4 cm2. Unghiul solid pe care îl formează conul este dΩ = (θR)2π/R2 = θ2π 1,3 × 10-5 sr. Produsul d¿rf dΩ este de 4 X 10-9 cm2 sr. Radianța Le este puterea împărțită la ds¿ dΩ sau aproximativ IO6 W/ (cm2 sr). Aceasta este de 400 de ori mai strălucitoare decât lampa cu mercur.

B. Nomenclatura psihofizică sau fotometrică

Ne întoarcem acum la cantitățile fotometrice înregistrate de un observator uman folosind lumina vizibilă. În știința fotometriei, comparațiile între diferite surse sunt făcute de un observator. Comparația este în cele din urmă legată de una sau mai multe surse standard. A fost dezvoltat un sistem de unități fotometrice care este în paralel cu unitățile fizice discutate mai devreme. Acest lucru este prezentat în Tabelul 4.1. Echivalența reală dintre unitățile fizice și psihofizice depinde de mai multe variabile: condițiile de observație, vârsta și experiența observatorului, unde Lumina cade pe retina ochiului observatorului și lungimile de undă prezente în lumină.

1. Deflnii. Unitatea de flux Iuminous Φv este lumenul, iar cea a intensității Iuminous Iv este bomboana sau lumenul/steradianul. O bomboană (1 cd) corespunde unui flux de un lumen (1 Im) printr-un unghi solid de un Steradian (1 sr). O sursă de izotropie cu o intensitate de 1 cd va radia un flux total de Iuminos de 4π Im.

Ieșirea luminoasă și densitatea fluxului de uluminanță ("Tr ɪ " sunt cantități

reprezentând densitatea fluxului iluminos. Lux sunt, de asemenea, callea metðr-^andles. Alte unități sunt lumânarea piciorului (lm/ft2) și fotografia (Im/cm2):

1-ft-cd = 10,764 m-cd (lux) = 1,0764 × IO 3 fotografie

1 fotografie = IO4 lux

Ca și omologul său fizic, '' -∏hn- T τ rjn hn/(m2 sr)]

per uʃɪt pro)ccted"qi^ff>Γ7sursa. Dacă lm/sr = 1 cd, unitățile mks oí Lv sunt, de asemenea, cd/m2. 1 cd/m2 se numește uneori nit. Alte unități sunt stilb sau lm/ (cm2 sr) sau cd/cm2 = IO4 cd/m2; lambert = (l/π) cd/cm2 = (104/π)cd/m2; /π) cd/m2; iar foot-lambert = 0,0003426 cd/ cm2 = 3,426 cd/m2.

Sau· 4.1. Corespondența radiometriei și a nomenclaturii fotometrice

Radiometrie	Simboluri fizice	Unități
Energie radiantă	Q	joule
Densitatea radiantă	Ve	J/m3
Flux radiant	Φe	Watt
Ieșire radiantă	Me	W/m2
Iradiere	Da	W/m2

Intensitate radiantă IeW/sr
Radianță LeW/sr-m2
Psihofizic
Unități de simboluri de fotometrie
Energie luminoasă ôvtalbot
Densitatea luminoasă ε∫vtalbot/m3
Flux luminos Φvlumen
Ieșire luminoasă Mvlm/m2
Iluminanță Evlm/m2 (lux)
Intensitate luminoasă IvIm/sr (bomboane)
Luminanță Lvlm/sr-m2

Standardul primar al Sistemului fotometric de unități este ieșirea iluminoasă a suprafeței unui radiator cu corp negru la temperatura de îngheț a platinei (2043,5oK), care este definită a fi 60 cd/cm2 = 60 stilb = 60 lm/(cm2). sr).

2. Conversia între unitățile de energie luminoasă și radiantă. Cea mai importantă variabilă în conversie este lungimea de undă prezentă în lumină. Sursele de radiație spectrală egală vor părea unui observator că au luminanță spectrală psihofizică diferită pe măsură ce lungimea de undă variază. Rezultatele experimentelor cu mulți observatori au fost combinate pentru a obține curba standard de iluminozitate prezentată în Fig. 4.19. Această curbă este o funcție a lui Л, pe care o vom nota yλ; are o valoare de vârf a unității la λ — 555 nm. Aceasta înseamnă că Iight de lungime de undă λ oferă un factor de yλ la fel de multă senzație psihologică ca Iight de lungime de undă 555 nm. Conversia la λ = 555 nm este standardizată să fie

Km = 680 Im/W (4,23)

Aceasta înseamnă că 1 W de flux la 555 nm oferă aceeași senzație fizică ca 6801m. Pentru alte lungimi de undă factorul de conversie este

K = Kmb = 680yλlm/W (4,24)

adică pentru λ ≠ 555 nm, 1 W produce mai puțin de 6801m.

Fig. 4.19 Curba standard de iluminozitate.

Putem folosi Eq. (4.24) pentru a converti orice mărime fizică spectrală din Tabelul 4.1 în mărimea psihofizică corespunzătoare. De exemplu, dacă avem un flux spectral Φe(Λ), atunci fluxul Iuminos este dat de

φv = 680 bΦe(λ) dλ [1m] Jo

Factorul de conversie mediu K este definit de

Φv = KΦe

(4,25)

(4-26)

Unde

Φe= Φe(2)d2

K este dat de

-- 680∫o∞yλΦe(2)<U j∞Φe(2) dλ

(4,27)

Dacă se dorește intensitatea din aceeași sursă, conversia ar fi

/v - 680 yλIe(λ) dλ [cd] = KIe Jo

(4,28)

Unde

și

Ie = Ie(λ) dλ

Jo

R = 680∫g>√e(Λ)d)l Γ cd -∫^/e(λ) dλ W/sr

(4,29)

Ecuațiile (4.27) și (4.29) sunt echivalente, deoarece pentru o sursă dată și geometrie dată, Ie(λ) va fi proporțional cu Φe(A).

Incidența iuminoasă de la soare la amiază la ecuator este de aproximativ IO5 lux, care este de 500.000 de ori mai mare decât cea de la luna plină în circumstanțe similare.

Densitatea fluxului de ulei de la o lumină „60-W” este de aproximativ 50 lux = 50 lm/m2 la o distanță de 1 m. Fluxul total ar fi atunci 50 lm/m2 × 4πm2 = 600 Im sau aproximativ 1 W flux radiant vizibil.

Un ochi uman complet adaptat poate vedea aproximativ 10-9 lux. Dacă presupunem că pupila ochiului are o rază de 2 mm, atunci aria ochiului care primește această lumină este π • 22 • 10-6 m2 ~ 13 × 10-6 m2, ceea ce înseamnă că aproximativ 10^14lm pot fi detectat de un ochi uman. Aceasta înseamnă aproximativ 1,5 × 10-17 W de putere vizibilă sau aproximativ 44 de fotografii/sec.

Un tub fotomultiplicator are o sensibilitate, așa cum este limitată de „curent întunecat” la temperatura camerei, de aproximativ 5 × 10“10 1m. Aceasta poate fi redusă până la 10 -15 Im prin răcirea tubului.

Un film fotografic destul de rapid (ASA 400) va dezvolta o zonă gri foarte vizibilă dacă este expus la 10-2 lux timp de 1 s. Dacă rezoluția se ridica la 30 linii/mm, atunci am putea distinge întunecarea într-o

zonă de 1 [(1/30) • 10-3]2 ≈ 10-9 m2 produsă în 1 secundă de 10-2 • 10-9 = 10-11 Im de lumină.

C. Exemple de radiometrie

Acum renunțăm la indicele e și v, astfel încât discuția să poată fi aplicată la fel de bine cantităților fizice sau psihofizice. Folosim termeni radianți în cele ce urmează, dar relațiile sunt valabile pentru termeni fotometrici și termeni iumiși.

1. Surse simple. În cele mai multe cazuri, calculele implică integrări unghiulare și suprafețe complicate. Uneori, geometria este deosebit de simplă. Simplificarea ulterioară pleacă de la presupunerea că sursele se comportă ca sursele Lambert. Dorim să calculăm iradierea E într-un punct P la distanță R de centrul sursei.

A. Disc. Geometria unui disc este prezentată în Fig. 4.20. Luați în considerare un element în formă de inel al sursei zonei dstfs care este egal cu

dstfs = 2πr dr = πd(r2) - πd(p2)

p

dXiet Fig. 4.20 Geometrie asociată cu o sursă în formă de disc.

unde ρ2 = R2 + r2 este considerată variabila dependentă în integrarea care va acoperi întregul disc. Fluxul care atinge zona dstfdet pe detectorul de la P care vine din acest inel va fi [Eq. (4.12)]

d2Φ = LdCl djrfs cos θ

Aici dCl este unghiul solid care este subtins de aria detectorului d.⅞det într-un punct de pe inelul sursei. Aceasta este determinată din Ec. (4.10) w(th <i√' = its/det cos θ, aria proiectată a detectorului; dCl = dj/dct cos θ | p2 . Prin urmare, fluxul este

dar

? n R2

COS2 θ = —y

P

Astfel, fluxul total care atinge d√del este

1 1

JR2

Iradierea de pe detector este

R2 R2 + a2

= πL sin2 Amax

(. N / A \

Sinflmax = -== (4,30)

\ √α2 + R2J

Rețineți că, ca a → ∞ pentru R fix, E tinde spre πL, analogul ecuației. (4,20). Rețineți, de asemenea, că pentru a fix și R mare, E devine

unde / = L • πα2 este intensitatea (fluxul/sr) sursei atunci când emite într-o direcție normală cu pianul acesteia. Ultimul rezultat deține în general o distanță mare față de o sursă mică, deoarece atunci putem scrie

dΦ = I dii, cu dCl =

R2

Prin urmare

dφ = J2 d^det

sau

dΦ _ I d^det R2

(4,32)

Fig. 4.21 Geometrie asociată cu sursa sferică Lambert.

b. Sferă. Situația pentru o sferă este prezentată în Fig. 4.21. În acest caz identificăm un inel inelar ca element diferențial al sursei. Fluxul de pe detector va fi

d2Φ = LdΩ d.rfs cos θ

Unde

dstfs = 2π(a sin β)a dβ

și

dΩ — dstfdi.l (cos <x)/p2

Să presupunem acum că R > a. Atunci α ~ 0, p ~ R, și θ ~ β. Aceasta înseamnă 2πa2

d2Φ ~ L—y djrfdet sin β cos β dβ

R

fluxul total care atinge dj√det este

27161

dφ = l~rγ

*π^2 Tta2

sin β cos β dβ = L d2 d,s/det o   ʊ

și

P dΦ L2

£ = vʒ— = ,.ɔ πα

dj√det R2

Aceasta este aceeași rezultat ca pentru Eq. (4.31) pentru discul cu raza a. Astfel, un emițător Lambert sferic va părea un disc uniform pentru un observator îndepărtat.

(4,33)

2. Luminozitatea imaginii. Acum suntem în măsură să calculăm radiația în diferite locuri din interiorul unui sistem optic, în special în locațiile imaginilor finale sau intermediare.

A. Conservarea strălucirii. În punctele care sunt conjugate cu sursa, strălucirea se supune unei legi fundamentale de conservare. Această idee a fost deja

Fig. 4.I2 Fascicul elementar care trece printr-un sistem optic.

menționată în secțiunea de optică paraxială sub forma relației Lagrange, Ec. (3.31). Acolo am găsit nxθ = n'x'θ'. Hiagnificarea liniară mare poate fi obținută numai în detrimentul unei degrandiri mari a unghiurilor razelor. Generalizarea acestui concept la unghiuri mai mari în afara limitei paraxiale duce la ceea ce este cunoscut sub numele de condiția sinusului.

$$n'x' \sin \theta' = nx \sin \theta$$

(4,34)

Acest lucru va fi justificat în secțiunea 4.3A4.

Aici dorim să aplicăm condiția sinusoială unui fascicul elementar care se originează pe o mică parte a sursei, trece printr-o porțiune a sistemului optic și produce o porțiune a imaginii (Fig. 4.22). Pentru a înțelege fasciculul elementar, luați în considerare un creion elementar de raze care își au originea într-un punct al sursei și care subtind un unghi solid infinitezimal dΩ — sin θ dθ dφ. Geometria este ilustrată în Fig. 4.23, unde creionul formează unghiul θ cu axa optică a sistemului

de focalizare. Unghiul azimutal φ va rămâne constant pentru creion atâta timp cât trece prin elemente optice care sunt simetrice față de axa principală. Un fascicul elementar este format din toate astfel de creioane care trec prin elementul de zonă i√ care este situat perpendicular pe axa Sistemului. Fluxul în fasciculul elementar este dat de Ec. (4.12) ca

$$d2\Phi = L \cos \theta \, dstf \, dCl = Ldstf \sin \theta \cos \theta \, d\theta \, d\varphi$$

$$— \tfrac{1}{8} Ld\Omega \, d\varphi d(\sin2 \theta)$$

Urmărim fasciculul elementar până când formează o imagine ca în Fig. 4.22. Daca nu

reflexia sau alte pierderi sunt permise, atunci fasciculul va avea același flux $d2\Phi' = J2\varphi$. Acest lucru înseamnă

$$E \, d.\tfrac{7}{8}, \, d\varphi' \, d(\sin2 \theta') — Ld.\tfrac{7}{8} \, d\varphi \, d(\sin2 \theta) \quad (4,35)$$

unde primele se referă la imagine.

Deoarece unghiurile azimutale sunt păstrate, trebuie să avem $d\varphi' = d\varphi$, deci

$$E \quad ds4 \, d(\sin2 \theta)$$

$$E \quad dstf' \, d(\sin2 \theta')(36)$$

Revenim acum la condiția sinusului care, la pătrat, devine

$$n'2x'2 \sin2 \theta' — n2x2 \sin2 \theta$$

Fie sursa elementară și zonele imaginii $x2$ și, respectiv, $x'2$, astfel încât condiția sinusului să conducă la

$$n'2 \, dstf' \sin2 \theta' = n2 \, dstf \sin2 \theta$$

Trebuie să luăm în considerare o gamă de unghiuri θ în fasciculul elementar, deci luăm diferența ambelor părți

$$n'2 \, dstf,d(\sin2 \theta') = n2 \, iL\surd d(\sin2 \theta) \quad (4.37)$$

Ecuația (4.37) poate fi combinată cu ecuația. (4.36) a ceda

$$E \ \eta'2$$

$$L = S \qquad (4\cdot38>$$

Dacă cei doi indici de refracție sunt aceiași, atunci obținem conservarea rezultată Iaw

$$E = L \qquad (4,39)$$

Am arătat că nicio cantitate de focalizare nu poate crește strălucirea fiecărui fascicul elementar de la obiect la imagine. O imagine redusă va avea mai multă iradiere (flux pe unitate de suprafață), dar razele de lumină vor subtinde un unghi solid mai mare la imagine decât la obiect.

b. Iradierea. Puterea radiantă sau iluminoasă pe unitatea de suprafață la imagine va fi integrată peste contribuțiile fiecărui fascicul elementar. Un fascicul conic de semiunghi θ' va contribui

$E \cos \theta' \, d\Omega' = 2\pi E \cos \theta' \sin \theta' \, d\theta'$

$= \pi E d (\sin 2 \theta')$

la fluxul pe unitate de suprafață la imagine. Integram această expresie de la θ' = 0 la θ' — a', unde a' este jumătatea unghiului subîntins de pupila de ieșire la imagine (Fig. 4.24). Folosind L' = (n'/n)2L din Ec. (4.38) și presupunând că L este independent de θ (sursa Lambert), obținem

/ n, \ 2

E' = I — I Ln sin2 a' (4,40)

\ n 7

21 β Practicai Geometrica! Optica

Fig. 4.24

Se poate scrie unghiul solid total subtins de pupila de ieșire la imagine

ia'   ■α'

sin θ dθ — 2π(l — cos α') — 4π sin2 — (4,41)

o

Pentru unghiuri mici α' putem aproxima sin2 α' ≈ 4 sin2 (α'/2). Apoi Eq. (4.40) devine

c.   Comportament în afara axei. Un punct în afara axei, cum ar fi P1 din Fig. 4.24, va fi reprezentat la P'1. Dacă nu există vignetare, unghiul limită al razelor care ating P1 va fi determinat de pupila de ieșire și va fi de aproximativ

σ', σ' cos φ' σ' cos3 φ' _ , ,,

.   ==■■— ≈ Ω cos φ

\ W'P'i \ 2 \ W'P'l \ 2 \ W'P' \ 2

unde σ' este aria pupilei de ieșire, σ'1 este proiecția sa perpendiculară pe HzP1 și Ω' = 4π sin2(α'/2) este unghiul solid văzut din P'. În acest caz de lipsă de vignetare, atâta timp cât φ este I mai

mic decât o valoare maximă determinată de oprirea câmpului (nu este prezentată în Fig. 4.24), toate fasciculele elementare care ies din P1 vor ajunge la P'1. Mai mult, se poate demonstra că pentru aceste grinzi, Eq. (4.38) este valabil dacă sistemul respectă condiția sinusoială. Astfel, putem folosi în continuare (rí/ri)2 L în versiunea în afara axei ecuației. (4,42).

Dacă dorim ca densitatea fluxului la P1 să cadă pe un ecran perpendicular pe axă, trebuie să introducem un alt factor de cos φ' pentru a ține seama de orientarea ecranului față de raza principală. Astfel, pentru densitatea fluxului în punctul în afara axei P1 obținem

E' (în afara axei) ⅛ I — | 2LΩ' cos4 φ,   (4.43)

\n /

Aceasta reprezintă o scădere destul de rapidă cu φ'. Densitatea fluxului este chiar mai mică dacă este prezentă vignetarea.

(A)

(b)

Fig. 4.25 Optica reflectoarelor: (a) colimare prin reflexie; (b) colimarea refracției.

3. Instrumente. Iluminarea este importantă în orice instrument optic. Cu toate acestea, în unele, transmisia eficientă a luminii este esența dispozitivului.

A. Reflector. Un Searchlight nu este un simplu dispozitiv optic care pare a fi la prima vedere. După cum se arată în Fig. 4.25, un Searchlight constă în esență dintr-o sursă mică intensă plasată în punctul focal al unei oglinzi reflectorizante sau al unei lentile. Dacă sursa ar fi cu adevărat un punct, atunci o oglindă parabolică sau un Iens corectat ar da un fascicul paralel perfect Colimat, având o densitate de flux care ar fi uniformă, cel puțin pentru deschideri unghiulare mici. Pentru a vedea acest lucru, este necesar doar să realizăm că un creion de raze de la sursă care face un coron cu unghi solid t/Ω = da,/f2 poate fi găsit pentru a ilumina zona dσ, dând o densitate de flux constantă.

E=Ea = Ji (4,44)

Acest rezultat nu mai este valabil cu o sursă de dimensiune finită. Pentru simplitate, considerăm ca sursa să fie un emițător Lambert în formă de disc cu raza rs. Acest disc este imaginat de către Iens la infinit la stânga lentilei, unde subtinde un semiunghi δ = rs/f (Fig. 4.26). Alegeți un punct de observare P la strângerea lentilei. Linia de la centrul imaginii la infinit la P va rămâne paralelă cu axa pe măsură ce P se mișcă, dar razele de la imagine la P trebuie să treacă prin lentilă. Dacă P este în afara axei, este posibil ca ei să nu poată face acest lucru (Fig. 4.27).

Este util să construiți conuri de la P la lentilă și de la P la imagine și să le proiectați pe un plan la o distanță f la stânga lui P. Intersecția conului cu imaginea dă un disc cu raza rs, iar intersecția corului cu obiectivul

Fig. 4.26 Raze marginale dintr-o sursă Lambert în formă de disc în reflector.

Fig. 4.27 Demonstrarea mecanismului prin care o sursă de dimensiune finită duce la iluminare neuniformă.

dă un disc ușor eliptic cu raza RLf /D. Intersecția acestor două discuri reprezintă imaginea văzută de la P. Aria din intersecție este egală cu j√', aria acelei părți a sursei care poate radia •prin Iens și ajunge la P. Sunt prezentate intersecțiile acestor conuri. în figurile mici din partea de jos a Fig. 4.29.

Fluxul care atinge zona dσ în jurul lui P din zona dj√s în jurul unui punct Ps la sursă este văzut din Fig. 4.28 ca fiind

,ɔɪ r , „ Ldstfsdσ

d2Φ — L ds#s dΩ. =--------

unde L este strălucirea sursei. Aici presupunem că normala la dσ este de-a lungul axei și neglijăm distincția dintre dσ și proiecția sa perpendiculară dσ1. Prin integrarea pe aria j√' a sursei care poate fi „văzută” din P, putem calcula fluxul total prin dσ:

„ Lj√' dσ dΦ =---------

u fl

Atunci densitatea fluxului dΦ/dσ este

τ, Lrf' e=υ-

(4,45)

În interiorul conului brighi la stânga lui d din fig. 4.29 imaginea subtinde o mai mică

dii = dσ | f2,

dσ

P?

Obiectiv

Flg. 4.20 Geometrie asociată cu fluxul de la Ps la d în jurul punctului de observație P.

Fig. 4.29 Analiza iluminării produsă de reflector. Considerentul important este proiecția conurilor subtinte de Iens și imagine.

unghi decât face lentila, astfel încât rs < RLf /D. Discul proiectat din imagine este apoi Complet în interiorul discului proiectat de la lentilă, astfel încât j/' = j/s. Acesta va fi cazul la punctul a. Apoi

E-E0-

L3/s

πLrs2

f2

(4,46)

care este o constantă. O astfel de densitate de flux constantă este de așteptat într-un fascicul reflector cu o sursă infinit de mică. Lungimea coroanei umbrite de la Iens la punctul d este RLf /rs, adică invers proporțională cu dimensiunea sursei.

Când P se mișcă lateral în afara corului umbrit de la a la b sau c, si' devine mai mic decât sis și E scade de la valoarea constantă a lui E0 a ecuației. (4,26).

În punctul d proiecțiile lentilei și imaginii coincid, dând RLf/D = rs. Când P este la dreapta lui d, proiecția lentilei este mai mică decât cea a imaginii. Când P rămâne în conul brighi la dreapta lui d, proiecția lentilei este în întregime în interiorul proiecției imaginii, iar zona comună este

\ DJ

si' = si (proiecție lentilă) — π

Putem rezuma aceste rezultate spunând că atunci când P este oriunde în conul brighi din Fig. 4.27, densitatea fluxului este dată de

Fig. 4.50 Diagrama schematică care arată părțile importante ale proiectorului.

E = E0 =

bπrs2

f2 '

LA' LkR2l

F -----—-------

/2 D2 :

(4,47)

Al doilea rezultat din Ec. (4.47) dă o expresie pentru E echivalentă cu cea obținută presupunând că Ienii au fost înlocuiți cu un disc sursă cu radiația L și aria κRjι. Acest disc ar avea atunci o intensitate

$I = LkR2l$ (4,48)

Aceasta este ceea ce se înțelege prin „intensitatea unui reflector”. De obicei, este exprimat în bomboane (sau „puterea bomboanelor”, ceea ce înseamnă același lucru).

b. Proiectorul. Un proiector de diapozitive sau un instrument similar are două Iense și efectuează două procese simultane de formare a imaginii. Proiecția Iens PL imaginează obiectul semitransparent O pe ecranul Q (Fig. 4.30). Un condensator Iens CL utilizat corespunzător va asigura că obiectul este iluminat uniform cu un fascicul intens. Condensatorul formează o imagine P' a sursei P la proiecţia Iens PL. Cu excepția pierderilor de transmisie, această imagine va avea aceeași strălucire ca și proiecția Iamp și va ilumina uniform acele părți ale ecranului (cu excepția factorului cos4 φ) care corespund părților transparente ale obiectului O.

4.3 Aberațiile lentilei

Ecuațiile de trasare a razelor utilizate în teoria opticii paraxiale au fost corecte de ordinul întâi în unghiurile de înclinare ale razelor și normale pentru suprafețele refractoare sau reflectorizante. Când se folosesc aproximări de ordin superior pentru funcțiile trigonometrie ale unghiurilor, se vor găsi abateri de la predicțiile opticii paraxiale. În general, nu va mai fi adevărat că toate razele care ies dintr-un obiect punctual se vor întâlni exact pentru a forma o imagine punctuală sau că mărirea într-un anumit plan transversal este o constantă. În plus, proprietățile sistemului pot fi dependente de lungimea de undă. Astfel de abateri de la comportamentul paraxial ideal sunt cunoscute sub numele de aberații Iens.

Aberațiile monocromatice apar cu o lumină de lungime de undă fixă. Ele pot fi tratate hiatematic în ordinea cea mai mică prin efectuarea calculelor de trasare a razelor la ordinul trei în unghiuri sau, echivalent, efectuând calculul diferenței căii optice la ordinul al patrulea . „Teoria de ordinul trei” rezultată este ea însăși valabilă numai pentru unghiuri mici, iar pentru multe sisteme reale calculele trebuie efectuate la un ordin mai înalt, să zicem al cincilea sau al șaptelea. Pentru un sistem centrat cu simetrie de rotație, în formulele de trasare a razelor va apărea doar o combinație ciudată a puterilor unghiurilor și doar o combinație pară de puteri va apărea în expresia pentru diferența de cale optică. Datorită complexității lor mari, aceste aberații de ordin superior sunt de obicei tratate numeric.

Majoritatea sistemelor cu lentile compuse conțin suficiente grade de libertate în proiectarea lor, astfel încât, dacă teoria de ordinul trei ar fi exactă, toate aberațiile ar putea fi eliminate. Pentru sistemele

reale, aberațiile reziduale de ordin superior ar fi în continuare prezente și nu există destui parametri de proiectare pentru a le elimina pe toți. Un designer optic cu experiență se străduiește să atingă un echilibru între aberațiile de ordinul trei și mai mari pentru a oferi performanțe optime cu un anumit sistem. Performanța trebuie evaluată în funcție de utilizarea prevăzută a instrumentului. Criteriile pentru un obiectiv telescop și pentru o cameră Iens pentru prim-planuri sunt destul de diferite.

A intra în subiectul aberațiilor Iens în orice detaliu ne-ar duce prea departe în aspectele tehnice ale designului optic. În schimb, vom descrie pur și simplu trăsăturile caracteristice ale fiecărui tip de aberație folosind forma teoriei de ordinul trei și inserì comentarii ocazionale despre metodele de corectare a acestor aberații.

A. Aberații monocromatice

Luăm în considerare mai întâi acele abateri de la teoria paraxiale care pot fi identificate atunci când sursa sau obiectul dă naștere la lumină cu o singură lungime de undă. Caracteristicile de refracție ale sistemului optic sunt apoi cuprinse în geometria suprafețelor și în indicii corespunzători de refracție. Acestea sunt constante. O rază dată de la o sursă punctuală va avea o cale unică prin sistem până la obiect. Dacă sistemul urmează să formeze o imagine, atunci alte raze care încep la unghiuri diferite la sursa punctuală trebuie să ajungă în același punct de imagine, având parcurs lungimi de cale optică identice. Dacă suprafețele Iens sunt secțiuni sferice, acest lucru nu va fi posibil. Vom caracteriza aberațiile monocromatice examinând deviația lungimii căii optice de la ceea ce ar fi de așteptat în teoria paraxiale. Acest lucru ne va permite să cuantificăm influența pe care o au aberațiile asupra formei și locației imaginii.

Acest lucru se va face pentru o sursă punctuală. Trebuie înțeles că un obiect extins poate fi considerat ca o colecție de puncte cu intensități diferite. Dacă diferitele poziții pe obiect sunt incoerente, atunci imaginea rezultată va fi suma imaginilor individuale ale surselor punctuale componente. Dacă sursa este coerentă, atunci teoria difracției este un mecanism mai potrivit pentru discuția despre performanța lui Iens. Acest lucru va fi discutat în capitolul 8.

1. Suprafață cu refracție unică. Pentru a simplifica discuția noastră despre Ienses, luăm în considerare mai întâi aberațiile unei singure interfețe de refracție sferică între mediile indicilor n și n' de pe laturile incidente și, respectiv, de transmisie ale interfeței.

A. Lungimea căii optice. Figura 4.31 descrie situația. Acest lucru este similar cu Fig. 3.12, doar că acum punctul obiect este pe axa optică. Ne vom îndepărta de axa optică mai târziu. Punctul P0 este imaginea paraxială a punctului P; Ps este interceptarea unei raze generale cu suprafața sferică de refracție. Investigăm lungimile de cale optică (OPL) de-a lungul PPsP0 și o comparăm cu calea paraxială PVP'0. În asa

făcând, definim diferența de lungime a căii optice

$I = (nPPs + n,PsP'0) - (nPV + n'VPζ)$ (4,49)

Din geometria din Fig. 4.31, identificăm

$PPs = [(S + Az)2 + p2]1/2$ (4.50a)

$P\sqrt{7}o = [(S' - Az)2 + p2J•lz2$ (4.50b)

$PV=S$ (4,50c)

$VF0 = S'$ (4,50d)

În capitolul 3, când am făcut aproximarea paraxială, am presupus că Ps este situat în același plan (perpendicular pe axa optică) ca și vârful V. Aceasta este echivalentă cu presupunerea că Az este zero. Aici păstrăm dimensiunea lui Az mică, dar diferită de zero. Prin necesitate, p va fi, de asemenea, mic, deși nu la fel de mic ca Δz. Aceste restricții permit încă o simplificare considerabilă a ecuațiilor. (4.50a și b). Cerem,

$Az «< R, S, S'$

și

$p<<R,S,S'$ (4,51)

Fig. 4.51 Refracția de la o sursă punctuală pe axa optică printr-o interfață sferică. Razele rămân în planul desenului din acest exemplu.

Continuăm prin extinderea ecuațiilor. (4.50a și b), neglijând termenul cu cea mai mare putere a lui Δz.

$PPs\hat{}\{S2 + 2S\ Δζ + ρ2]1/2$

$PsP'0 \approx [S'2 - 2S'\ Δz + p2]1/2$

(4.52a)

(4.52b)

Putem elimina p din aceasta folosind triunghiul PsCO, din care obținem

$R2 = p2 + (R- Δz)2$

Din nou, neglijarea termenului cu cea mai mare putere a Δz înseamnă

. P2

Az = —

27?

(4,53)

Cu acest rezultat în Ecs. (4,52)

PPs =

sau

PsP'0 =

s'2-s∑+

-11/2

P2

P2 /1

S \ S , K pɪ

S' \ s,

1/2

(4.54a)

(4.54b)

1 1

R

To Simplificați rădăcina pătrată, folosim expansiunea seriei Taylor a lui (1 + ε)1/2, £ P2

(1 + ε)1/2 = 1 + | — ɪ +...

Când ε < dă ξ 1, termenii de ordin superior pot fi neglijați. Aplicând acest lucru la Ecs. (4,54) Γ. p2/1 1 ʌ P4 /1 ι \ 2 PPs = S_ +2S \ S + K/ 8S2 \ S + k) +'”_
sau PP¡ S + — Í- + ɪʌ - — f̅ ɪ + ɪʌ + ...(4.55a) s" 2 \ S ^ 8S \ SRJ
și P2 il 1 \ p4/l 1V ,. cc,4 P„P' ~ S'+ — II-2--(I +···(4.55b) s °-2 \ S, R 8S, \ S' RJ

Ecuațiile (4.55) sunt acum funcții ale p. Diferența OPL (7) va fi, de asemenea, o funcție a p. Când combinăm ecuațiile. (4.55) și ecuațiile. (4,50c și d) cu Ec. (4.49) pentru diferența OPL pe care o obținem

,<^τΓ⅛+⅛-

n rí

n' — ri

S S1

,4 (T

R

IM2X

nS

AM 21 DE ANI

n'S'

(4,56)

κ 8

Prima observație pe care o putem face din această analiză este că diferența OPL este o funcție de ordinul doi a lui p. Acest lucru este de așteptat pe baza principiului Fermafs aplicat căii PVP'q. Deoarece p măsoară abaterea de la acea cale, prin Ec. (1.5) diferența OPL trebuie să varieze în funcție de p2. Calea PPsP0 nu este însă o cale virtuală arbitrară. Recunoaștem acest lucru amintind ceea ce știm despre punctele conjugate paraxiale P și P'o. Conform Eq. (3.26) distanţele 5 şi S' sunt legate prin

n rí rí — η

S + ~S' = R

Acum putem vedea că această condiție face ca termenul să fie proporțional cu p2 din Ec. (4.56) dispar. OPL PPsP0 este mai aproape egal cu OPL PVP0 decât ar fi cerut de o cale virtuală arbitrară care respectă principiul Fermafs. Acest lucru este adevărat deoarece acest sistem îndeplinește condițiile pentru formarea aproximativă a imaginii. Caracterizarea deviației de la formarea exactă a imaginii formează baza studiului nostru asupra aberațiilor.

Contribuția nenulă de ordinul cel mai mic la diferența OPL pentru un punct obiect pe axă este termenul proporțional cu p4 din ecuația. (4,56). Funcția de aberație pe axă este așadar

Cp4 l(p)=--f + ...

(4.57a)

Unde

(4.57b)

T

S'R

T

SR

b. Sfera de referință. Un mod util de a privi aberațiile este de a compara suprafața reală a undei cu o suprafață de referință ideală. Luați în considerare Fig. 4.32α. Aici σ reprezintă o suprafață de undă sferică care a apărut la sursa punctuală P. Dacă s-a produs o imagine perfectă, atunci, de cealaltă parte a interfeței, ar trebui să avem o altă suprafață de undă sferică care să convergă spre punctul ideal al imaginii P,o. Identificăm această suprafață de referință ideală ca aR. Rețineți că suprafața de referință intersectează axa optică la O.

Deoarece suprafața de refracție este o secțiune sferică (cu centrul său în C), suprafața undei adevărate nu va coincide cu σκ. Această situație este prezentată în Fig. 4.326. Aici suprafața undei adevărate care se întâlnește cu axa optică la 0 este identificată ca σ,. The

(6)

F⅛. 4.32 Conceptul suprafeței de referință, (a) Suprafața de referință sferică ideală care converge către punctul ideal al imaginii P10. (b) Frontul de undă adevărat nu este sferic. O normală la Pr intersectează axa optică la P'.

razele care sunt perpendiculare pe σ' nu vor întâlni P'o. Cu condiția ca sistemul să fie simetric cilindric (ca în această ilustrație), va exista un coron de raze OPL egale care coincid, de exemplu, la P'. Distanța dintre P'o și P' va fi legată de diferența dintre suprafața undei adevărate și suprafața de referință. După cum se poate observa din figură, această diferență depinde de distanța față de axa optică.

Distanța direcționată PsPt ɪs este strâns legată de funcția de aberație. Pentru a vedea cum, reconsiderați funcția de aberație pe axă pentru Fig. 4.32.

I(p) = OPL(PPsPτP'0) - OPL(PlDP0)

= OPL(PPsPt) + OPL(PτP,o) - OPL(PVO) - OPL(OP,0)

Deoarece Pτ și 0 sunt pe aceeași suprafață a undei de fază constantă, lungimile de cale optică I de la P la Pt și de la P la 0 trebuie să fie egale. Primul și al treilea termen de mai sus se anulează. Aceasta pleacă

I(p) = OPL(PrF0) - OPL(OP0)

— n'[PτPo ^~ oPo]

= n TPsP0 - PsPt ~ α∫*(>]

Acum, deoarece atât Ps, cât și 0 sunt pe aceeași suprafață de referință sferică, distanțele lor față de P0 trebuie să fie egale. Funcția de aberație pe axă este atunci

$$I(p)= -n'PsP\tau = -ɪ \quad (4,58)$$

Vom folosi distanța direcționată PsPτ, separarea suprafeței undei adevărate de suprafața de referință sferică la interfața de refracție, pentru a examina efectul aberațiilor din vecinătatea imaginii paraxiale.

c. Obiect în afara axei. Dacă punctul obiectului se află în afara axei optice, apar noi tipuri de aberații în plus față de cele descrise de Ec. (4,58). Luați în considerare Fig. 4.33a. Axa optică este linia prin Vand C. Presupunem că suprafața de refracție este limitată în mărime astfel încât suprafața este simetrică față de axa optică.

Obiectul punctual este la P, iar imaginea paraxială este la P0. Ambele puncte sunt încă în planul figurii. Dacă nu ar exista o limitare a suprafeței de refracție, atunci raza PUCP10 prin centrul de curbură la C ar fi axa optică naturală. Imaginile paraxiale ar avea loc pentru un mic creion de raze centrat în jurul acestei raze nedeviate (UR).

În Fig. 4.33h identificăm o rază generală care întâlnește suprafața de refracție la Ps. Dacă Ps se află în același plan cu P și cu axa optică, atunci este în planul meridional. Toate lucrările noastre anterioare s-au limitat la analiza razelor meridionale. Aici relaxăm această restricție și permitem lui Ps să fie departe de planul meridional. O rază care urmează acest tip de cale generală se numește rază oblică (SR).

În descrierea aberațiilor asociate cu raza oblică, am putea urma metoda noastră stabilită de a identifica o suprafață de referință sferică centrată pe P0 și de a întâlni suprafața de refracție la Ps. Deviațiile frontului de undă adevărat de la suprafața de referință ar fi descrise de funcția de aberație

unde pu, ca în Eq. (4.57), este distanța lui Ps de la raza nedeviată (vezi Fig. 4.33c).

Cu limitarea oferită de o oprire, aici reprezentată de întinderea limitată a suprafeței de refracție, este mai firesc să se raporteze toate razele la raza principală (CR), a cărei prelungire trece prin centrul pupilei de ieșire (Fig. 4.33d).), și care întâlnește suprafața de refracție la Pc. Introducerea planului de ieşire-pupila ne oferă

Fig. 4.55 Geometrie pentru aberații dintr-un punct obiect în afara axei, (a) Raza nedeviată. (h) O rază înclinată. (c) Parametru radial asociat cu funcția de aberație. Raza oblică nu se află de fapt în planul desenului, deși aici apare așa pentru claritate.

F⅛. 4.55 (continuare) (d) Pupila de ieșire care este planul unui sistem de coordonate polare util în specificarea razelor (Fig. 4.34). (e) Diferențele frontului de undă pentru o rază oblică în apropierea planului pupilei de ieșire.

libertatea de a descrie aberațiile sistemelor optice generale. Pentru o suprafață cu refracție unică, limitată ca întindere de o deschidere la suprafață sau pentru o suprafață simplă subțire, limitată de propriul diametru, pupila de ieșire aproape coincide cu elementul de refracție, iar lungimea L este aceeași cu distanța imaginii S'.

Acum trebuie să învățăm să descriem aberațiile asociate cu raza oblică, referindu-ne la raza principală. Raza principală în sine va contribui la aberații la P10, deoarece, spre deosebire de situația obiectului pe axă, raza principală nu este aceeași cu

raza nedeviata. În exemplul prezent, cantitatea de interes este funcția de aberație în afara axei

Hz= /skew - ʃɑhief = OPL(PPsPz0) - OPL(PPcP10)   (4,59)

Pentru a demonstra acest lucru, luați în considerare un punct Pt pe suprafața undei adevărate σ' în vecinătatea lui Ps. Situația este prezentată în Fig. 4.33e (pentru o rază meridională). Lăsați acest punct să se afle pe suprafața particulară, care trece și prin Õ, centrul pupilei de ieșire. Trebuie să avem OPL(PPr) = ÕPL(PO). Acest lucru conduce la următoarea expresie în locul ecuației. (4,59):

W= OPL(PrPz0) - OPL(OPz0)

Acum construiți o suprafață de referință sferică σκ centrată pe P0 având raza OP0. Fie Pr interceptarea dreptei PrPz0 cu suprafața de referință. Deoarece OP0 = PrP0 avem

W= OPL(PτP'0) - OPL(PrP'0) = -OPL(PrPt)

sau

W= -rí PrPt   (4,60)

care este similar cu Eq. (4,58). Ecuația (4.60) se reduce la Ec. (4.58) dacă obiectul și imaginea sunt plasate pe axa optică și oprirea diafragmei coincide cu suprafața de refracție. Atunci Õ este aproape la fel cu V și Pr este același cu ceea ce am numit Ps înainte.

Pentru a obține o expresie utilă pentru W, ne întoarcem la Ec. (4.58) unde funcția de aberație în afara axei este exprimată în termenii funcțiilor de aberație care se referă la raza nedeviată. În loc să folosiți distanțele perpendiculare pu, așa cum se arată în Fig. 4.33c, este mai convenabil să identificați intersecția razelor cu planul de ieșire-pupila. Acest lucru nu va modifica în mod serios rezultatul, deoarece unghiurile pe care raza principală și raza oblică le fac cu axa optică și raza nedeviată sunt încă mici. Figura 4.34 prezintă planul pupilei de ieșire Uitându-se de-a lungul axei optice de la sursă

la imagine cu raza nedeviată la Pu și raza oblică la P. Aceste puncte sunt, de asemenea, prezentate în Fig. 4.33h. Raza de interes este de asemenea identificată aici cu coordonatele polare f și $. În cadrul aproximării noastre, coordonatele polare ale lui P sunt aceleași cu cele pentru Pr sau Pr.

Funcția de aberație în afara axei poate fi apoi scrisă ca

W= I(puτ) - I(pu0) = - α (p⅛ - p↑l0)   (4,61)

Folosim legea cosinusului pe triunghiul OPPu pentru a elimina ρllp,

Pup = Può + f2 ÷ 2pu0f cos φ   (4.62a)

În cazul în care opritorul de deschidere este suprafața de refracție, pupila de ieșire coincide cu Iens și Lz S,. În spiritul aproximării cu unghi mic, putem

Fig. 4.54 Coordonatele polare care identifică interceptările razelor cu planul pupila de ieșire.

utilizați Fig. 4.35 pentru a elimina pu¿ în favoarea cantităților măsurabile,

Può = ,g, R pλ ×' ≡ bx'   (4.62b)

lɔ — κ)

Folosind ecuațiile. (4.62) și (4.63) în Ec. (4.61) Ne duce la rezultatul nostru final pentru funcția de aberație în afara axei a suprafeței cu refracție unică:

r

W= — — [f4 + 4bx'r3 eos $ + 4b3x'3r eos $ + 2b2x'2f2(2 cos2 $ + 1)]   (4,63)

Fiecare termen din această ecuație este asociat cu una dintre aberațiile primare.

d. Sistem general de formare a imaginii. Dispozitivele optice reale au aproape întotdeauna mai multe suprafețe refractoare sau reflectorizante. Imaginea produsă de prima suprafață acționează ca un obiect pentru a doua suprafață. Nevechimea pe care o produce acționează ca un obiect pentru suprafața următoare. Și așa mai departe. La fiecare refractie vor fi introduse aberatii care afecteaza imaginea finala. Aceste aberații sunt aditive. Finala

Fig. 4.55 Când opritorul de deschidere este suprafața de refracție, această diagramă aproximativă poate fi utilizată pentru a elimina pu0 din funcția de aberație.

Funcția de aberație este suma funcțiilor de aberație asociate fiecărei suprafețe de refracție.

Adesea nu se dorește cunoașterea funcției de aberație la suprafața finală de refracție în sine. Am văzut deja că este mai firesc să ne referim la funcția de aberație în planul pupilei de ieșire în cazul suprafeței cu refracție unică. Pentru un Sistem mai general de Ienses, pupila de ieșire poate să nu coincidă cu o suprafață fizică refractară. Cu toate acestea, razele pot fi tratate ca și cum ar urma linii drepte din planul pupilei de ieșire. Cu funcția de aberație cunoscută la pupila de ieșire, devine ușor de analizat influența aberațiilor asupra imaginii.

Funcția generală de aberație va avea forma Eq. (4.63), dar cu coeficienți diferiți și poate fi scris

IF = θC'4θ'r4 + l^31x'r3 COS + 2C22x'2F2 c°S2 $

+ 2C20x'2r2 + 3C11x'3f cos $ (4,64)

Indicele de pe coeficienții C se referă la puterile lui x’, r și, respectiv, cos $ care apar în fiecare termen. Acești coeficienți dau puterea aberațiilor primare afișate de sistem. Acestea conțin detaliile unui anumit sistem. Vom discuta despre coeficienți mai târziu.

2. Caracteristicile aberațiilor monocroniatice. În această secțiune presupunem că au fost determinați coeficienții C și că funcția de aberație poate fi specificată în planul pupilei de ieșire. Razele urmează fine drepte de la pupila de ieșire la imagine. Acestea vor fi perpendiculare pe suprafața undei adevărate la pupila de ieșire. Prin contrast, finele care sunt perpendiculare pe suprafața de referință sferică se vor intersecta în punctul paraxial al imaginii Pr0. Sub influența fiecărui termen individual din Ec. (4.64), razele adevărate vor rata punctul paraxial al imaginii și vor intercepta planul paraxial al imaginii la P'.

Luați în considerare Fig. 4.36, care este mult exagerată pentru claritate. Ea ilustrează situația razelor în plan meridional. Figura 4.36a arată cazul când obiectul se află pe axa optică, iar Fig. 4.36b ilustrează situația în afara axei. Suprafața undei adevărate σ' și suprafața de referință sferică σκ sunt prezentate în planul pupilei de ieșire, aici presupus a fi situate la o distanță L' de planul paraxial al imaginii. Urmând practica noastră anterioară, identificăm coordonatele lui Pr în planul meridional la pupila de ieșire ca x (Fig. 4.34). (Ignorăm diferențele în coordonatele transversale ale lui Pr, Pτ și P.)

Vom folosi distanța direcționată PrPt = l(Pτ), care este legată de funcția de aberație prin Ec. (4,60)

/(Pr) = _ w/rí (4,65)

Raza adevărată la Pr este PτP', care este perpendiculară pe suprafața undei σ'. Pe de altă parte, linia PrPtP10 este perpendiculară pe sfera de referință σs. Raza adevărată va rata punctul paraxial al imaginii cu distanța Δx'. Avem rezultatul aproximativ că

— Ax’ = y L’

(4,66)

Fig. 4.36 Geometrie care este utilizată pentru a găsi interceptările razelor reale cu axa optică și planul imaginii paraxial, (a) Punct imagine paraxial pe axă (b) Punct imagine paraxial în afara axei.

ca abatere de la punctul paraxial al imaginii. Aici y este unghiul dintre razele normale la σΛ și σ'. La nivelul nostru de aproximare, această relație poate fi folosită și pentru imaginea în afara axei. Cu toate acestea, ar trebui să fie clar din Fig. 4.36« și b că această echivalență nu va fi menținută cu o teorie de ordin superior.

Pentru a găsi γ în ceea ce privește funcția de aberație, examinați o a doua pereche de puncte P'R și P1t așa cum se arată. În aproximarea noastră, acestea ar fi identificate printr-o distanță suplimentară față de axa optică Δx. Distanța direcționată dintre P'R și P'τ este

P'rP't = l(P'τ) = I(Pt) + Δ/

Dacă construim o dreaptă prin Pr perpendiculară pe PrP,0 aceasta va intersecta P,rP,t la B. Dacă P'τ este suficient de aproape de Pτ, atunci BP' τ va fi foarte aproape egal cu Δ/, iar γ va fi aproximat cu Δ//Δx. În Iimit pe măsură ce P'τ se apropie de Pr avem

ôl_

dx

UlF rí ôx

(4-67)

Prin urmare, deviația în direcția x’ va fi

n ÕX

(4.68a)

Am putea repeta acest argument pentru deviația de-a lungul direcției /. Aceasta cedează

Δ/≈^ | ^   (4.68b)

nu da

(Amintiți-vă că obiectul și punctele paraxiale ale imaginii sunt încă situate în planul meridional, y = 0 și respectiv y' = 0.)

Acum știm cum funcția de aberație va modifica imaginea. În continuare, investigăm fiecare termen din funcția de aberație separat, presupunând că numai fiecare, la rândul său, este prezent.

A. Aberația sferică. Ca urmare a primului termen din Ec. (4,64)

IF- 0 C40T4 – 0C40(x2 + y)

(4,69)

Apare aberația sferică. Deoarece IF din cauza aberației sferice este independentă de χ', eroarea pe care o produce este aceeași pentru toate punctele imaginii din câmpul vizual. Aceasta este singura aberație monocromatică primară care există dacă obiectul se află pe axa optică.

Urmând ecuațiile. (4.68), aflăm că coordonatele deviației care descriu aberația sferică transversală sunt

Δx' = 4 – 0C40r2x

n

236 Procticol Geometrico! Optica

și

L' , ∧/ = 4^0C40∏

η

sau

P'0P' = Ar' ≡ {(Δx')2 + (Δ/)2}1/2 = 4 0C40F3 (4.70a)

Dacă introducem un ecran perpendicular pe axa optică la P'o, se va observa un cerc cu raza Δr' în locul unei imagini punctuale. Prin mutarea ecranului dozator la pupila de ieșire, cercul imaginii este redus. După cum se arată în Fig. 4.37, totuși, va exista o poziție E în care cercul este cel mai mic. Acesta se numește „cercul celei mai mici confuzii”. Deplasând stilul dozatorului la pupila de ieșire, ajungem în poziția de pe axa optică unde se întâlnesc razele marginale. Aceasta identifică P" în Fig. 4.36α. Cu condiția ca deviația să fie mică (nu ca în exagerarea din Fig. 4.36a), putem identifica aberația sferică longitudinală ca

_____ \ r' ar2

P,o P" = AS' ≈ – L' = – 0 C40 F2 (4.70b)

rn

b. Comă. Pentru punctele obiect în afara axei, celelalte aberații primare intră în joc în plus față de aberația sferică. Cea mai

importantă dintre acestea este coma. Ignorând toate celelalte aberații, avem

W — 1C31x,f3 cos $

sau

Bz= 1C31x'(x2 + y2)x (4,71)

unde x = r cos $ și y = r sin $ (Fig. 4.34).

Imaginea paraxială ar trebui să fie la P0, la o distanță x’ de axa optică. Intersecțiile razelor adevărate cu planul paraxial al imaginii vor avea loc în puncte care se abat de la punctul ideal al imaginii prin

. . L' ôW -, *'L„ x'L'r2

Δχ = ? A? = ɪε31 V(3x + y } = ɪɑɜi ^~rΓ(2 + cos (4-72a)

și

, L' ÕW x'L'x'L'r2 .~

ʌʃ = ,y ~ = 1C31 —r^xУ = ɪɑʒi —7—sin 2$ ri ôx riri

(4.72b)

Rețineți că razele din punctele aflate la distanță de 180°, adică cu același r, dar cu azimuturile $ și 180°-$, au aceleași valori ale Δx' și Δy'. Astfel, cu referire la Fig. 4.34, razele de la marginea pupilei de ieșire la ora 12 și la ora 6, identificate prin $ = O0 și 180°, se vor întâlni în același punct din planul imaginii. De asemenea, razele de la ora 3 și de la ora 9, identificate prin $> = 90° și 270°, se întâlnesc în același punct din planul imaginii. Pe măsură ce ne deplasăm în jurul marginii pupilei de ieșire la 360°, razele asociate intersectează planul imaginii astfel încât să definească un cerc care este trasat de două ori. Raza acestui cerc este

lC3ix'L'r2 ri

(4,73)

Centrul cercului este la Δx'~^2¾ Δ y' = O. Un astfel de cerc este prezentat în Fig. 4.38« pentru o valoare negativă a coeficientului C [cum ar fi cazul unei suprafeţe cu refracţie unică—Ec. (4,63)]. Acest cerc reprezintă locul „punctelor” de imagine care provin dintr-un inel inelar cu raza r la pupila de ieșire. Suprapunerea unor astfel de inele pentru toate valorile lui r de la zero la o valoare maximă dă un model de fiare în formă de cometă cu vârful său în punctul paraxial al imaginii P'o (Fig. 4.38h). Deoarece a este proporțional cu x', vedem că dimensiunea acestui model de fiare este direct proporțională cu cantitatea de deplasare în afara axei imaginii.

Fi⅞. 4.30 Model de aberație pentru comă, (a) Cerc cu valoare dublă Corespunzător razelor care trec printr-un inel inelar la pupila de ieșire. Punctul de imagine P10 este locația paraxială a imaginii ideale în afara axei, (b) Pentru o pupilă de ieșire care este complet deschisă, cercurile fuzionează într-un model de fire care converge spre punctul de imagine paraxial.

c. Astigmatismul și curbura câmpului. Aceste două aberații sunt strâns legate și sunt de obicei discutate împreună. Funcția de aberație adecvată este

W= (2C22 cos2 $ + 2C20)x'2r2 = (2C22 ÷ 2C20)x'2x2 + 2C2Qx'2y2 (4,74)

În planul imaginii paraxiale, aceasta duce la deviații

L' SW

ΔX — ~ = (2^22 + 2^2θ)-,c

n CX

Γ2L'xI

(4.75a)

n

și

i , L' SW „ ∧∫ = — = 2C20X

n Sy

~2L' '

— yn

(4.75b)

Pentru a înțelege mai complet aceste aberații, trebuie să ne îndepărtăm de acest plan și să investigăm razele în timp ce intersectează alte planuri transversale. Figura 4.39 arată cum se poate realiza acest lucru. Aici ΔS'• identifică locația planului de testare în raport cu planul paraxial al imaginii. Raza de la pupila de ieșire la P va intersecta acest pian la P". Aceasta va identifica o deviație, Δx", de la intersecția razei principale. Dacă toate unghiurile rămân mici și cu condiția ca Δ5' să fie, de asemenea, mic, găsim

Δx" = Δx' — ΔS' — = hx

L

(4.76a)

La fel găsim

Δ/ = Δ/ - ΔS' ɪ = byy (4.76b)

Deplasat longitudinal în raport cu planul paraxial al imaginii. Aceasta identifică punctul P”.

Unde

bx ~ (2 C22

. i72L'

+ 2C2o)x;

η

LA FEL DE

L'

(4.77a)

și

, - c x-2γ-δs: y — 2 e20x , , ,

(4.77b)

Rețineți că

bx = prin + 2c22x,2-τ

(4,78)

Razele care trec printr-un inel anidar de la marginea pupilei de ieșire sunt definite de $x^2 + ÿ^2 = r^2$ — constantă, ecuația unui cerc. Imaginea rezultată va urma

(Toporul")2 (Da")2

b2xr2 + h2r2

(4,79)

ecuația unei elipse având semiaxele de lungime

bxf și byf

Când fie bx, fie by este zero, elipsa degenerează într-o linie dreaptă. Cazul pentru by — 0 apare la P, unde

ΔSs — 2^-20x 2

Γ2L'2I

n'

(4,80)

Atunci avem Δy" = 0 și Δx" sub forma unei linii între Iimits

Δx" = ± 2 C22X12

Γ2L' .1

n'

(4,81)

Această linie se extinde în planul care conține axa optică și P'o. Aceasta se numește imaginea sagitală sau radială. Riguros, imaginea de linie este perpendiculară pe raza principală. Acest lucru este prezentat în Fig. 4.40. Aici derivarea noastră presupune că Ime ar fi paradă! la axa x pentru aproximarea cu unghi mic.

Când bx = 0 planul imaginii trebuie să fie la P't, dat de

ΔSt — (2^22 ÷ 2^2o)* 2

Atunci avem Δx" = 0 și Δ/ care se extinde între

Δy" = ± 2(⅛'2

(4,82)

(4,83)

Această linie este paradei către direcția y și se numește imaginea tangențială.

Fig. 4.40 Imaginile sagitale și tangențiale de-a lungul razei principale.

Când ΔS, este la jumătatea distanței dintre cele două valori tocmai definite, este ușor să arăți că imaginea este un cerc, deoarece în acest caz bx = -by. Raza cercului este

Δ = 2C22x'2

(4,84)

care reprezintă cel mai bun compromis între cele două imagini de linii la P't şi P's din Fig. 4.40.

Deplasările longitudinale identificate în Ecs. (4.80) și (4.82) sunt ambele proporționale cu x'2. Pe măsură ce distanța în afara axei x’ variază, iocii acestor două puncte de imagine mătură doi paraboloizi de

revoluție σs și σt, așa cum se arată în Fig. 4.41. Când 2C22 = 0, nu există astigmatism, iar σs și σt coincid pentru a forma o singură suprafață curbă numită suprafața Petzval. Aceasta produce un câmp de imagine curbat dintr-un câmp de obiect plan.

Astigmatismul, așa cum se găsește de obicei printre defectele oculare, nu este același

Fig. 4.41 Suprafețele sagitale și tangențiale create prin variația x’ și rotirea punctului imaginii în jurul axei optice.

Axa optică

Centrul planului imaginii -------------------- ► y'

Л9. 4.42 Coordonatele pentru calculul distorsiunii.

fenomen așa cum este descris aici. Acest efect se datorează unei distorsiuni a ochilor care tind mai degrabă spre un contur cilindric decât spre o sferă. Ceea ce am descris aici este o aberație primară prezentă în refracția sferică pentru un obiect în afara axei.

d. Deformare. Cu un sistem care arată doar distorsiune primară, obținem o imagine punctuală perfectă de la un obiect punctual în afara axei, dar imaginea nu este în punctul paraxial al imaginii P'o. În schimb, se află la P'd, o distanță transversală Δx' în planul care conține axa optică și P'o. Acest lucru este prezentat în planul imaginii din Fig. 4.42. Funcția de aberație este

Hz= 3C11x'3r cos $ = 3C11x'3x (4,85)

și astfel deviația de la P,o este

L' ,

Δx' = 3C11-x'3 (4,86)

Deoarece Δx' este independent de r și ȝ, razele normale cu suprafața undei emergente vor forma imaginea la P'd.

Acum luați în considerare situația când punctul obiect nu mai este în planul meridional. Punctul paraxial al imaginii este prezentat în Fig. 4.43 la P'o. Acest lucru este cel mai ușor de rezolvat prin înlocuirea r, cu x' și Δr' cu Δx, în Ec. (4,86). Acest lucru este echivalent cu o rotire a problemei în jurul axei optice cu un unghi Prin această tehnică putem identifica

Δr' = 3C11⅛-rz3

n

Odată ce a fost făcut acest lucru, putem reveni la orientarea originală a sistemului de coordonate pentru a găsi coordonatele unei imagini. Acestea vor fi la

Practicai Geometrica! Optica

Fig. 4.45 Distorsiunea pentru puncte care nu se află în planul meridional.

Δx' — Δr' COS Φ' — 3C11 (x 2 ÷ y 2)3/ ^,2 + y'2)1/2

= 3c11-(χ'3 + χy2) (4.87a)

n

și

Δy' = Δr' sin φ' — 3 C11 — (x'2y' + y'3) (4.87b)

unde imaginea paraxială ar fi fost la (x', y').

Acum luați în considerare un obiect linie care dă o imagine paraxială la x' = a. În loc de aceasta, atunci când este prezentă distorsiunea, găsim puncte de imagine care deviază

Δx' = 3 C11 | 7(α3 + aÿ2)

L' , ∧/ = 3C11 — (ay + y J) n

Pentru 3C11 pozitiv, imaginea distorsionată se va îndepărta de imaginea liniei paraxiale, așa cum se arată în Fig. 4.43. Dacă planul obiectului conține o rețea de linii pe un model de tablă de șah, planul imaginii va apărea ca în Fig. 4.44a. Aceasta se numește distorsiune în pernuță. Distorsiunea în baril are loc atunci când 3C11 este negativ (Fig. 4.44h).

3. Lentila subțire. În discuția de mai sus, coeficienții C au fost rămași generali și nespecificați, astfel încât să poată fi evidențiată influența geometrică a fiecărei aberații. Aici dorim să ilustrăm punctele forte ale aberațiilor monocromatice primare prin identificarea formei coeficienților C în cazul unui Ien subțire în aer care acționează

Distorsiune perniță

Fig. 4.44

ca propriul stop de deschidere. Nu vom obține rezultatele aici, ci doar să prezentăm formulele de ordinul trei și să discutăm implicațiile acestora (vezi Born și Wolf pentru detalii).

Pentru un Iens subțire cu lungime focală f și indice de refracție n, aberația sferică este proporțională cu

1

θα40 “ ^ 32/3n(n - 1)

n + 2,   - n3

× -----7 q2 + 4(n + l)pq + (3n + 2)(n - l)p2 H-------

n — 1   n — 1

(4,88)

Aici q este așa-numitul „factor de formă” determinat din razele de curbură ale celor două suprafețe

R, + R q~ R, -R

iar p este așa-numitul „factor de poziție”

1 2f p = 1-y

(4,89)

(4,90)

Dacă normalizăm toate lungimile la lungimea focală f, obținem din ecuația. (4.70b) formula adimensională convenabilă pentru aberația sferică longitudinală (cu L'= S')

— = 4 C f3 ʌ   (4 91)

f 0 4o/ LWWJ (' } Din forma funcțională a ecuației (4.88) vedem că pentru factorul de poziție hx p, aberația longitudinală va da o parabolă atunci când este reprezentată grafic în funcție de factorul de formă q și invers. proporționalitatea cu f~3; când f își schimbă semnul, la fel se va schimba și aberația sferică.

În Fig. 4.45 am reprezentat grafic coeficientul 40C40/3 în funcție de q pentru trei valori ale lui p, pentru n = 1,5. Sunt incluse și schițe ale formelor Ieps. Aberația sferică minimă apare atunci când cele două suprafețe ale Iens deviază razele din afara axei din fasciculul de lumină în cantități egale. Minimul nu va fi zero pentru obiecte reale și imagini (p între —1 și +1). Curba p = 0 se aplică atunci când S' = 2f— S; Thè Iens este folosit simetric si da o marire de (— 1). Iens echiconvex simetric (q = 0) are atunci cea mai mică aberație sferică. Curba p=—l corespunde lui S' =f. Valoarea minimă a aberației sferice apare atunci când q este aproape de valoarea de +1.

Aberația sferică primară poate fi eliminată prin combinarea a două lensuri subțiri cu lungimi focale de semn opus. Apoi exploatăm faptul că AS' este proporțional cu/3, astfel încât este negativ pentru o lentilă pozitivă și pozitivă pentru o lentilă negativă. Pentru un factor de poziție dat alegem un factor de formă q astfel încât primarul negativ

Aberația sferică a componentei pozitive are magnitudinea sa aproape minimă. Factorul de formă al componentei negative poate fi apoi ales pentru a oferi o cantitate relativ mare de aberație sferică pozitivă pentru puterea sa negativă mică. Puterea netă a combinației va fi pozitivă, aberația sferică generală este zero. Un astfel de Iens este adesea fabricat cu suprafețele adiacente cimentate împreună.

Pentru exemplul nostru, teoria de ordinul trei pentru coeficientul de comă produce rezultatul

г - 1 Гo ɪn √n+1)

,c3i~¼r⅛L2 υ +("77υ

(4,92)

unde p și q sunt definite în ecuațiile. (4,89) și (4,90). Conform Eq. (4.73), raza cercului cometic este dată de

A

7

(r//)2(χ7/)

4n

(2n + l)p +

(n + 1) Ί

(4,93)

Aceasta este liniară atât în p cât și în q. Este relativ ușor să găsiți valori rezonabile ale p și q care vor face această comă de ordinul trei la zero pentru o lentilă subțire.

La acest nivel de aproximare, Ienul subțire este lipsit de distorsiuni, 3C11 = 0. Cu toate acestea, astigmatismul și curbura câmpului vor fi întotdeauna prezente. Teoria de ordinul trei dă

2^22 —

1

2/57ξ

(4,94)

și

r _   Í «+JΛ ɪ

2 20 Г 4n J f S'2

(4,95)

Aceste aberații pot fi reduse sau eliminate în sistemele cu lentile multiple.

4. Condiție Sinus. Am văzut că coma primară produce o „imagine” în formă de cometă cu o dimensiune care variază liniar cu distanța în afara axei x’. Dacă acest efect nu este mic, imaginea unui obiect extins va fi considerabil neclară și distorsionată, chiar dacă imaginea punctului de pe axă ar putea fi de o calitate mai bună. Un efect similar poate fi produs de aberațiile de ordin superior, și anume, cele cu funcții de aberație W care depind de puteri mari ale lui r, dar sunt liniare în x'. Există o cerință generală, cunoscută sub numele de condiția sinusului, care trebuie îndeplinită de un sistem de formare a imaginii dacă nu trebuie să existe o astfel de scalare liniară a dimensiunii unei imagini aberante în afara axei cu x'.

Dacă sistemul din fig. 4.46 nu are nicio aberație sferică pentru punctul P'o de pe axa de simetrie, imaginea este perfectă, iar sistemul este „cartezian” pentru punctele conjugate P0 și P0. Acum luați în considerare punctul P1 I situat în afara axei de la P0 la distanța mică x. Fie P'1 imaginea sa paraxială. Cu excepția unei oglinzi plane, nici un sistem optic practic care produce o imagine perfectă a P0 pe P0 nu poate

Fig. 4.46 Relații geometrice în discuția condiției sinusului.

produce o imagine perfectă a lui P1 pe P'l. Adică, toate lungimile de cale optică de la P1 la P1 nu pot fi făcute exact egale. Este posibil, totuși, ca lungimea traseului optică să fie egală cu primul ordin, în distanța de imagine în afara axei x'. Cu alte cuvinte, sistemul poate fi proiectat astfel încât funcția de aberație W pentru Iight care provine din P1 să nu conțină termeni proporționali cu x'. Acest lucru va fi adevărat dacă condiția sinus este valabilă.

Este convenabil, dar nu necesar, să puneți pupila de ieșire a Sistemului din Fig. 4.46 în al doilea pian focal prin F,. Atunci F' poate fi identificat cu Õ în Fig. 4.34. Atunci variabila independentă F1 pentru funcția de aberație W reprezintă distanța unei raze de la axă când trece prin planul focal. Razele care ies din punctul obiect P1 paralel cu axa trec prin F' si au F1 = O. Raza 1 este o astfel de raza. Raza 2 părăsește P1 la un unghi finit 0 și intersectează pupila de ieșire la P1 la o distanță f1 de axă, făcând un unghi diferit cu axa. Diferența de cale optică pentru aceste raze este dată de funcția de aberație

OPL(2) - OPL(I) = W   (4,96)

iar cerința noastră este ca aceasta să fie zero la primul ordin în x'.

Mai întâi arătăm că razele paralele 1 și 3 au lungimi ale traseului optice egale de ordinul întâi în x'. Rețineți că OPL-urile de la P1 la F' și P0 la F' sunt exact egale. Prin urmare

OPL(I) - OPL(3) = n~P \ F, - P^F,

= n'(√x'2 + X'2 - X') = n' — + ...   (4,97)

Ultima egalitate rezultă dintr-o expansiune a rădăcinii pătrate într-o serie de puteri în (x'/X')2.

Țineți minte că conform Ec. (4.96) în cele din urmă vrem să comparăm

Lungimile traseului razelor 1 și 2. Razele 1 și 3 sunt egale cu ordinul întâi în x'. Razele 3 și 4 au lungimi de drum exact egale, deoarece P0 este o imagine perfectă a lui P0. Prin urmare

OPL(3) = OPL(4) (4,98)

Împreună cu Eq. (4.97) aceasta dă

OPL(4) - OPL(I) = 0(x'2)   (4,99)

Pentru a obține Ec. (4.96) trebuie să comparăm lungimile traseului razelor 2 și 4. Înaintea oricăror suprafețe refractoare, acestea sunt paralele, ambele formând un unghi θ cu axa. OPL-urile de la Pi la P1 și de la N la P1 sunt exact egale, deoarece P1N este perpendicular pe direcția razei. OPL-urile de la P1 la P0 și P1 la N' sunt egale cu primul ordin în x'. Specific,

P1P'0 = Apin')2 + (n'P'0)2 = pιN↑ 1 + -ɪɪ

\   (P1N')2/

-----/   1 (N'P'Λ2\-----

= P1N'(1 + -1   07 +...| = P1N' + 62(x'2)

\   2 (P1N')2 J

Astfel, la primul ordin în x', partea de la P1 la N' a razei 2 are același OPL ca și partea de la N la Pz0 a razei 1. Aceasta elimină contribuția de la P0N și NzP1 :

OPL(2) - OPL(4) = n'N'P'1 - nP^Ñ + ¿P(x'2)   (4.100)

Când adăugăm Ec. (4.99) și (4.100), obținem comparația dorită a OPL-urilor razelor 1 și 2:

OPL(2) - OPL(I) = n'N'P'1 - nP0N + $(x'2)   (4,101)

Acest lucru poate fi simplificat și mai mult prin utilizarea triunghiurilor P0NP1 și Pz0N'P1:

P0N — X sin θ, N'P1 = x' sin θ'

Prin urmare

W= OPL(2) — OPL(I) = [n'x' sin θ' — nx sin 0] + 0(xz2) (4.102)

Vom avea rezultatul dorit ca W să fie independent de x’ de ordinul întâi dacă și numai dacă condiția sinusului

$$n'x' \sin \theta' = nx \sin \theta \qquad (4.103)$$

este satisfacut. Aceasta reprezintă o generalizare a ecuației Lagrange [Eq. (3.31)]

$$n,x'\theta' = nx\theta$$

a opticii paraxiale la unghiuri mari.

Un sistem care (a) este cartezian pentru o pereche de puncte P și P' și (b) satisface condiția sinus este numit aplanic.

Unele implicații ale condiției sinusului vor fi explorate în probleme. Se poate

fi rearanjat pentru a spune că condiția de mărire a unghiului de rază ia forma

sin θ' nx n

—— = — =-------------— const.

sin θ n'x'n'mx

(4,104)

Aici $m_x = x'/x$ este mărirea transversală. Astfel, dacă o serie de raze iese din P la unghiurile 01, θ2,... și ajunge la P' la unghiurile θ'1, θ'2,..., trebuie să avem

sin θ'1 _ sin θ,2 __ (4.105)

sin 01 sin θ2

Ecuația (4.105) poate fi utilizată pentru a testa un sistem aplanatic, adică unul cu imagini perfecte a punctelor ușor în afara axei. Interesant este că acest test implică doar comportamentul razelor dintr-un punct pe axă.

Condiția sinus a fost deja folosită pentru a deriva Eq. (4.39), legea de conservare a luminanței sau a radiației într-un fascicul elementar. Este posibil să se obțină această conservare Iaw din Legile termodinamicii și apoi să se obțină condiția sinusului din legea conservării.

Sistemele optice reale pot fi făcute aplanatice sau aproape aplanice printr-o varietate de dispozitive, cum ar fi utilizarea meniscului Ienses. Acestea vor fi utile doar pentru deplasări mici în afara axei și numai pentru un singur plan obiect. Ele pot fi folosite la microscoape și anumite telescoape unde câmpul vizual este mic și planul

obiectului este fix. Pentru câmpuri de vedere mai largi, aberațiile care sunt pătratice sau mai mari în x' devin importante și nu se poate reduce în general fără a renunța la condiția sinusului și a accepta unele comă și efecte aferente.

B. Aberații cromatice

Deoarece majoritatea sistemelor optice sunt utilizate cu lumină de lungimi de undă diferite, dispersiile mediilor de refracție trebuie luate în considerare. Proiectantul optic trebuie să ia în considerare variația indicilor de refracție cu lungimea de undă, astfel încât performanța rezultată a sistemului să fie mai mult sau Iess independentă de lungime de undă.

Putem distinge două tipuri generale de aberații cromatice: (1) variații cromatice ale proprietăților paraxiale de formare a imaginii ale unui sistem și (2) dependența de lungimea de undă a aberațiilor monocromatice. Al doilea tip este evaluat prin tratarea indicilor de refracție ca variabili în secțiunea A a acestui capitol. Ne vom concentra aici în primul rând pe primul tip. Având în vedere acest lucru, revenim la condițiile imagistice paraxiale.

În optică paraxială, proprietățile unui sistem de formare a imaginii depind numai de locațiile planurilor principale și ale planurilor focale. Aberațiile cromatice apar atunci când poziția oricăruia dintre aceste planuri este dependentă de lungimea de undă. Putem discuta efectele aberațiilor monocromatice în ceea ce privește o variație a distanței imaginii de-a lungul axei și o variație a măririi transversale. Deoarece o suprafață cu o singură refracție prezintă un comportament care poate fi observat în sisteme mai complexe, vom începe cu ea.

F⅛. 4.47 Când este prezentă aberația cromatică, punctul paraxial al imaginii depinde de lungimea de undă a luminii. Iight albastru (b) și Iight roșu (r) creează imagini diferite care sunt separate prin AS'.

1. Suprafață cu refracție unică. Considerăm mai întâi un punct obiect P pe axa Sistemului. Cu indici de refracție așa cum se arată în Fig. 4.47, condiția de formare a imaginii este

n

Si

n − 1

R

1

S

(4,106)

Să notăm două lungimi de undă diferite cu r și b (pentru roșu și albastru, de obicei) și să presupunem că indicii au proprietatea n(b) > n(r). Modificarea indicelui Δn = n(b) — n(r) va fi mică în comparație cu unitatea pentru mediile optice transparente și putem folosi aproximări de ordinul întâi în Δn. Atunci Iet AS' = S'(h) — S'(r) reprezentăm aberația cromatică longitudinală, iar prin diferențierea Ec. (4.106) obținem

/1 \ ΔS' Δn /11

Δ — 1 = — —T = —-------

\ S' S'2n \ R S'

(4,107)

(4,108)

Aici n și S' pot fi evaluate la orice lungime de undă convenabilă, dar cea mai bună acuratețe se obține cu o lungime de undă între r și b.

La P'(b), focarul pentru lumina b, razele de lumină vor forma un cor convergent către P'(r). Corul va avea o jumătate de unghi de aproximativ p/S' și va intersecta planul imaginii b într-un disc cu rază

δ√=-δs•⅞ = s^(I _1

S n \ R S'

Un disc de aproximativ aceeași rază este format din raze b în planul imaginii r. Acest lucru este prezentat în Fig. 4.48.

Un punct obiect în afara axei va produce imagini în lumină r și b la înălțimi diferite față de axă. Acest lucru este prezentat în Fig. 4.49. Punctul obiect P are imagini cromatice ale punctului paraxial la P'(b) și P'(f) care se află de-a lungul razei nedeviate (UR) care trece prin centrul de curbură la C. Aceasta duce la o hiagnificare transversală dependentă de lungimea de undă.

Fig. 4.48 Aspectul „focalizării” în vecinătatea punctelor de imagine paraxiale pentru lumina albastră și roșie.

Modificarea fracționată a măririi

Amx x,(b) — x,(r) · mr   x'

(4,109)

unde x' este media lui x,(b) și x'(r), poate fi găsită luând în considerare triunghiurile similare prezentate în insertul din Fig. 4.49. Avem

x' — [x'(h) — x'(r)] (S' - «)= AS'

astfel încât

AS' x'(b) — x'(r) Amx (S' — R) x' mx

(4.110)

S1-R -sS'

Fig. 4.49 Dependenţa cromatică a poziţiei focarului paraxial într-o direcţie perpendiculară pe optica! axă.

(4.Ш)

Acest lucru poate fi modificat! prin rescrierea Eq. (4.107) ca

ΔS" _ Δη (S' - R) ~^n~ RS'

Îndreptând spre

ΔS,' Δη S'

(S' — R) ~ ~~nR

Comparând aceasta cu Eq. (4.110) dă rezultatul final

Δmx   Δη S'

mx   π R

care este independent de x'.

În sistemele complexe cu mai multe suprafețe de refracție, putem elimina adesea aberația cromatică longitudinală, astfel încât imaginile albastre și roșii să coincidă pentru un punct de obiect pe axă la o anumită distanță. Cu excepția cazului în care razele diferite colorate în afara axei coincid, în general, va exista în continuare aberații cromatice pentru punctele obiectului în afara axei. Astfel, mărirea transversală dependentă de lungimea de undă este mai greu de corectat.

(4.112)

2. Lentile de contact. Dubletul cimentat este unul dintre cele mai simple și mai comune modele „acromatice”. Având în vedere două Ienses subțiri cu separarea practic zero d, putem scrie puterea combinației din Ec. (3,79) ca

cu

= ɪ = (», - l)(ɪ - ɪ) = (», - 1)X,   (4.113a)

Jl   \ κι λι/

și

^92 = 4 = Oh - ŋfɪ - ɪi ≡ («2 - IЖ2 (4.113b) J2   \ ^2 ^2/

Cuantificările K1, K2 se numesc curbura totală a fiecărei lentile. Modificarea puterii totale cauzată de o modificare a lungimii de undă este

Δ^s — An1K1 + An2K2

= δ",7¼i-1)'''1+Γ δ"2i]<"2-1)r'== ⅞ + ⅞ (4'14)

n1 — IJ |_n2 — IJU V2

Am folosit Eq. (4.113) în a doua egalitate și am introdus constantele de dispersie ale ochelarilor în cele două Iense, care sunt definite după cum urmează:

v=fhJ∑l

1 An1 '   2 An2

(4.115)

Lungimile de undă la care n și Δn,s din Ec. (4.115) sunt determinate sunt considerate în mod convențional ca fiind următoarele:

Δn = n(F) - n(C)

n = n(D)

unde F reprezintă linia albastră a hidrogenului la 486,1 nm, C linia roșie a hidrogenului la 656,3 nm și D liniile galbene de sodiu la 589,3 nm. Linia D este aproape de lungimea de undă a răspunsului maxim al ochiului uman. Inele F și C au oferit o răspândire convenabilă în spectrul vizibil. Datele despre indici ai constantelor de refracție și dispersie sunt furnizate de producătorii de sticlă adesea ca un număr de șase cifre; de exemplu, 517645 înseamnă n(D) = 1,517, V= 64,5.

Unele filme alb-negru au sensibilitate maximă în regiunea albastră a spectrului; am dori apoi să selectăm o cameră acromatizată pentru lungimi de undă mai scurte decât finele F și C.

Revenim acum la Ec. (4.114). Pentru acromatizarea la cele două lungimi de undă utilizate pentru a defini Δη, setăm Δ.^9 = 0 și prin utilizarea ecuației. (4.115) obţine

(4.116)

sau

0

(4.117)

În scris

noi obținem

și

(4.118)

Ecuațiile (4.118) oferă condiția necesară pentru ca ienii noștri subțiri să fie acromatizați pentru cele două lungimi de undă folosite pentru a defini Δn. Aberația cromatică care rămâne la alte lungimi de undă se numește spectru secundar și este adesea suficient de mică pentru a fi neglijată.

Rețineți că și 0>2 trebuie să aibă semne opuse. Dacă trebuie să fie pozitiv, avem nevoie de > -^2, presupunând că 0>1 este pozitiv. Apoi prin Ec. (4.116) vrem

Fig. 4.50 Lentila acromatică.

Astfel, componenta pozitivă trebuie să aibă o constantă de dispersie mai mare (și de aceea dispersia mai mică Δη).

Pentru a controla spectrul secundar și pentru a minimiza aberațiile monocromatice, dorim să menținem mărimile și ^2 mici. Acest lucru se poate face dacă IV2 — V11 este mare.

Factorii de formă ai Ienselor individuale nu influențează ecuațiile. (4.118). Acestea pot fi variate pentru a reduce aberația sferică și coma. Pentru dubletele acromatice ieftine, factorii de formă sunt mai probabil să fie aleși pentru ușurința fabricării. De exemplu, elementul pozitiv este adesea echiconvex; elementul negativ devine apoi aproape pianconcav pentru paharele tipice folosite într-un dublu cimentat.

Ca exemplu, luați în considerare un dublu cimentat din sticlă de coroană borosilicată nr. 517645, n(D') = 1,517, V= 64,5, ca element pozitiv și sticla densă din silex nr. 617366 ca element negativ. Atunci, dacă lungimea focală trebuie să fie de 10 cm = 0,1 m, puterea SP va fi de 10 m_1 (dioptrie). Ecuațiile (4.118) dau apoi SP2 = —13,118 dioptrii și SP1 = 23,118 dioptrii. Dacă elementul pozitiv este echiconvex, atunci razele de curbură sunt K1 = — R1 = 4,47 cm. Deoarece elementele sunt în contact, trebuie să avem R2 = —4,47 cm. Apoi putem calcula R2 ca fiind 91,2 cm. Iens este ilustrat în Fig. 4.50.

3. Dublet separat. Sistemul Constând din două Ienses subțiri separate de o distanță d în aer este un model pentru mai multe instrumente optice importante. Dacă Componentele au puteri de SPγ și SP2 atunci, din Ec. (3.79), puterea totală va fi

ɪ = +- 0 \ SP2d

Apoi modificarea SP la două lungimi de undă diferite este dată de

= Δ^1 + Δ,^2 - d(<^2 Δ^1 + Δ<^2)(4,119)

Procedând ca înainte, scriem

SPγ = (∏l - l)Ki = (n1 - l)(ɪ -

SP2 = (n2 - 1)K1 = (n2 -   -

J_\

r,J

JA

*y

254 Practicol Geometrica! Optica

și obțineți rezultatele

și

Δ^,1 = ^,1/K1

Δ^2 = 0>2 | v2

folosit în Ec. (4.114).

Pentru a determina configurația acromatică setați Δ^a — 0 și obțineți

<я>   /11 \

0 = K + Kd^⅛ + d

Dacă iensele sunt făcute din sticlă de același indice, avem F1 = V2 și obținem

+ 0>2 - 2d0>10>2 = 0

sau

(4.120)

Ecuația (4.120) este condiția ca dubletul să aibă o lungime focală independentă de lungimea de undă (la primul ordin în Δn). În general, atunci când este mulțumit avem

d

(4.121)

Dubletele sunt adesea folosite ca oculare ieftine în telescoape și microscoape. Funcția ocularului este de a mări imaginea intermediară formată de lentila obiectiv. Distanța finală a imaginii virtuale S' este mult mai mare decât lungimea focală a ocularului, iar distanța obiectului este foarte apropiată de lungimea focală f În aceste condiții, dimensiunea unghiulară aE = x/f a imaginii este importantă.

ca în Ec. (3.103) sau, alternativ, dimensiunea sa liniară la distanța de vizualizare convențională de 250 mm. Astfel, mărirea ocularului va fi acromatizat dacăʃis. Spunem că ocularul este corectat pentru „culoarea laterală”.

Acum, ca exemplu de dublet corectat pentru culoarea laterală, luăm în considerare ocularul Huygens din Fig. 4.51. Pentru simplitate, este convenabil să presupunem că imaginea virtuală finală este la infinit. Apoi, imaginea intermediară formată de obiectivele telescopului sau microscopului trebuie să fie în primul plan focal prin F al ocularului. Acționează ca un obiect virtual pentru ocular. Razele de la obiect sunt de fapt aduse la un focus la F2, primul plan focal al L2. Acesta este, de asemenea, al doilea plan principal pentru ocular. Aici ar trebui plasat opritorul care limitează câmpul vizual (oprire câmp). De asemenea, aici ar trebui să fie plasate reticulele sau reticulele, astfel încât să poată fi imaginate de L2 în același plan cu imaginea finală. Din păcate, această imagistică nu este corectată, deoarece se utilizează numai L2; astfel, ocularul Huygens nu este potrivit pentru utilizare cu un reticulul.

Ocularul poate fi corectat pentru comă prin selectarea corectă a lui n și o[f2jf \ , dar are o cantitate relativ mare de aberație sferică.

Flg. 4.51 Ocular Huygens, corectat pentru culoarea laterală.

Obiectivul unui telescop sau microscop este opritorul de deschidere. Distanța sa față de ocular este cu mult mai mare decât lungimea focală a ocularului, încât imaginea acestuia formată de ocular este aproape în al doilea plan focal, prin F' din Fig. 4.51. Această imagine, desigur, este pupila de ieșire și ar trebui să coincidă aproximativ cu pupila ochiului observatorului. Distanța L2F' de la al doilea vârf al celui de-al doilea Ien se numește relief ocular. Pentru ienii din Fig. 4.51 această distanță este f/3, dacă putem ignora grosimea lui L2.

Acum alegem f1 =f2. Apoi, pentru a corecta culoarea laterală, Ec. (4.120) rezultă d -f1 și Ec. (4.121) dăʃ=f1. Ocularul rezultat este prezentat în Fig. 4.52. Aici L1 acționează ca o lentilă de câmp, imaginând obiectivul pe L2 și prevenind vignetarea. Imaginea intermediară coincide acum cu L1 și este inaccesibilă pentru plasarea firelor de păr sau a reticulelor. Un alt dezavantaj vine cu zgârieturile sau praful de pe L1 care este focalizat împreună cu imaginea. Un al treilea dezavantaj constă în ușurarea ochilor zero, deoarece pupila de ieșire este la L2.

Dezavantajele Iens din Fig. 4.52 pot fi exagerate dacă sacrificăm o anumită corecție pentru culoarea laterală și mutăm dozatorul Ienses împreună. Cazul în care d = 2f1β este ilustrat în Fig. 4.53. Acesta se numește ocular Ramsden și va avea f = 3f1/⅛. Ienses sunt orientați așa cum se arată pentru a reduce aberația sferică și pentru a elimina coma. Relieful ochilor este f/3. Acum există o aberație cromatică transversală. Ocularul Kellner Fig. 4.54) este un ocular Ramsden cu ochiul Iens L2 acromatizat pentru a reduce această culoare laterală.

Fig. 4.52

Fig. 4.54 Ocular Kellner, un design Ramsden cu o lentilă oculară acromatizată.

Cu aceste exemple practice de oculare, încheiem discuția noastră despre geometrică! optica.

REFERINȚE

Born, Max și Emil Wolf. Principii de optică. Pergamon Press, Oxford, 1980.

Cagnet, Michel, Maurice Francon și Jean Claude Thrierr. Atlasul fenomenelor optice. Springer-Verlag, Berlin, 1962.

Conrady, AE Optică aplicată și design optic. Dover, New York, 1957.

Cox, Arthur. Fotografie Optica. Focal Press, Londra, 1966.

Driscoll, Walter G. și William Vaughan. Manual de optică. McGraw-Hill, New York, 1978.

Hardy, AC și FH Perrin. Principiile opticii. McGraw-Hill, New York, 1932. Herzberger, Max. Optica geometrică modem. Interscience Publishers, New York, 1958. Hopkins, HH Wave Theory of Aberations. Clarendon Press, Oxford, 1950.

Kingslake, Rudolf. Fundamentele pentru proiectarea lentilelor. Académie Press, New York, 1978.

Levi, Leu. Optica aplicata. Wiley, New York, 1968.

Martin, LC Teoria microscopului. Elsevier, New York, 1965.

Nicodemus, Fred E., „Radiometrie” în Robert R. Shannon și James C. Wyant. eds., Optica aplicată și inginerie optică, voi. 9, p. 13. Académie Press, New York, 1983.

Palmer, JM Date despre aberația obiectivului. Elsevier, New York, 1971.

Smith, Warren J. Inginerie optică modem. McGraw-Hill, New York, 1966.

Stavroudis, ON Optica razelor, fronturilor de undă și causticii. Académie Press, New York, 1972.

Walsh, J, WT Fotometrie. Dover, New York, 1965.

Welford, WT Aberrations of the Symmetrical Optical System, Académie Press, New York, 1974.

Prodlems

Secțiunea 4.1 Opriri și deschideri

i ,ıt O lentilă groasă, așa cum se arată în Fig. 4.55, este utilizată în aer. Prima și a doua rază de curbură sunt $R1 > 0$ și $R2 < 0$, indicele este $n > 1$, iar grosimea este d. Care va fi oprirea diafragmei pentru această lentilă pentru un obiect axial √ la o distanță generală S1 la stânga lui F1? Oprirea diafragmei este întotdeauna aceeași? (Nu este necesar niciun calcul pentru a rezolva această problemă.)

^2J Un obiect este situat la o distanță de 3R/2 de suprafața unei marmură sferică ($n = 3/2$) care are un diametru de 2R. Un opritor de deschidere (diametrul R) este poziționat la vârful frontal. Găsiți locațiile planurilor principale și ale imaginii, locația și dimensiunea pupilei de ieșire și trasați o rază principală și o rază marginală pe o diagramă care demonstrează soluțiile dvs.

' 1. O lentilă pozitivă subțire cu o lungime focală de 2 cm este plasată în spatele unei diafragme la o distanță de 4 cm. Diafragma este poziționată simetric în jurul axei optice a lentilei și conține o deschidere de 3 cm. Un obiect se află la 2 cm în fața diafragmei. Obiectul se extinde de la axa optică 1,5 cm pe verticală. Grafic, determinați localizarea pupilei de ieșire, γ•

pupilele de intrare și ieșire, raza principală din partea de sus a obiectului, razele marginale. Din această diagramă, localizați poziția și dimensiunea imaginii.

Sp. Un ien pozitiv subțire cu diametrul de 1 inch și lungime focală de 2 in. acoperă capătul unui tub cu diametrul de 1 inch care are 5 inci lungime. Capătul închis al tubului este îndreptat către un obiect. Găsiți o expresie pentru locația opririi diafragmei în funcție de distanța obiectului.

6. Un Iens pozitiv subțire care are o rază a și o lungime focală/ este plasat la jumătatea distanței dintre un obiect și ochiul unui observator. Dacă obiectul este plan și este situat la o distanță/de ochi, găsiți întinderea obiectului care poate fi observată prin lentilă.

7. Lupa Coddington este eut după cum se arată în Fig. 4.56 dintr-o singură sferă.

(a) Unde trebuie ținut un obiect astfel încât să se formeze o imagine virtuală la 250 mm în fața lentilei?

(b) În condițiile de la (a), găsiți elevii de intrare și de ieșire.

⅛,Pentru sistemul optic din Fig. 4.57, localizați (a) raze marginale și o rază principală de la vârful obiectului. imaginea, (b) poziția și dimensiunea intrării Din această diagramă, localizați poziția și dimensiunea ferestrei.

imagine. ζ⅜/A- lentilă subțire L1 cu diafragma de 5,0 cm și

4. O diafragmă circulară cu raza de 2 cm este plasată la 1 cm'· lungime focală +4,0 cm este plasată la 4,0 cm la stânga în spatele unei

lentile subțiri care are o lungime focală de 3 cm. Un obiect care este de 2 cm tali este situat cu baza sa pe axa optică la o distanță de 6 cm în fața lentilei. Determinați grafic dimensiunile și locațiile

un alt Iens L2 de 4,0 cm în diametru cu o lungime focală

Ry

Fig. 4.55

Rg. 4,56

de +10,0 cm. Un obiect de 2,0 cm înălțime este localizat cu centrul său pe axa la 5 cm în fața lui Ll. Există un opritor cu diametrul de 3,0 cm centrat la jumătatea distanței dintre L1 și L2. Găsiți analitic poziția și dimensiunea pupilei de intrare, a pupilei de ieșire, a imaginii. Faceți o schiță scurtă la scară.

10. În Fig. 4.58 sunt date următoarele dimensiuni: f1 = 12 cm, R1 = 1,0 cm, R = 0,9 cm,/2 = 12 cm, R2 – 1,0 cm. Localizați oprirea diafragmei pentru sistem pentru un obiect la A în funcție de distanța S, unde S variază de la infinit la zero. Pentru fiecare valoare a lui S, găsiți oprirea câmpului. (Să presupunem că Ienses sunt subțiri.)

11. Camerele standard de „35 mm” au o deschidere de 24 × 37 mm chiar în fața filmului, care acționează ca un opritor de câmp. Luați în considerare o cameră cu un obiectiv cu lungime focală de 50 mm.

Care este dimensiunea câmpului vizual pentru o distanță de obiect de 1 m? 30 m?·

12. F/# unui Iens este definit ca raportul dintre lungimea focală și diametrul pupilei de intrare cu diafragma irisului (dacă există) larg deschis și cu un obiect îndepărtat. Luați în considerare un obiectiv f/2,8, adică unul cu un f/# de 2,8,

având o lungime focală de 45 mm. Care va fi jumătatea unghiului corului de lumină care converge de la pupila de ieșire spre imaginea unui obiect aflat la o distanță de 0,50 m?

5.0Λn? 50 m?

t lá; Un câmp? opritorul cu diametrul de 4 mm este plasat la ; poziţia imaginii intermediare în microscopul compus din Fig. 3.38. Care este dimensiunea câmpului de

vedere? Pupila de ieșire are 4 mm în diametru. Care este jumătatea unghiului corului de raze dintr-un punct al obiectului, dacă corul este doar pupila de intrare?

Fig. 4.5β

Secțiunea 4.2 Radiometrie și Fotometrie

(14,1 Să presupunem că soarele se supune legii lui Lambcrt. (Nu, \ /din cauza unui fenomen cunoscut sub numele de „întunecarea mădularului”).

(a) Găsiți luminanța acestuia.

(b) Găsiți intensitatea luminii de la soare (în lumeni/steradian).

O imagine a soarelui este formată pe pământ de un Ien cu lungime focală IOm și rază de 1 m.

(c) Găsiți iluminarea în acea imagine (neglijând pierderile din obiectiv).

(d) Găsiți fluxul luminos total care lovește ecranul la imagine Presupuneți că soarele este deasupra capului și că radiația sa ajunge la pământ cu o iluminare de IO5 lux. Raza soarelui este de 7 × IO8 m. Distanța pământ-soare este de 1,5 × 1011 m.

15. Folosind informațiile date în problema 14, calculați intensitatea radiantă a imaginii soarelui formată dintr-o lentilă simplă cu diametrul de 4 cm și lungimea focală de 25 cm. Comparați acest lucru cu carcasa fără lentile.

j ɑl^ʌ O sursă de lumină care este pătrată și 2 mm pe o latură √ emite 2 W de radiație. Găsiți strălucirea sursei

presupunând că se comportă ca un emițător Lambert. Găsiți fluxul radiant colectat de o lentilă cu diametrul de 20 mm situată la 80 mm de sursă.

, 17, Un Iamp mic cu o intensitate radiantă de 10 W/sr se află la ■ 2 m deasupra unei podele. Găsiți iradierea pe podea direct sub lampă și pe podea la 1 m distanță de locul chiar sub lampă.

yl8. Repetați calculele problemei 17, abia acum „să presupunem că sursa este un emițător Lambert în formă de disc, cu o rază de 10 cm, cu o radiație de 1000 W/sr-m2.

19. O sursă Lambert S cu strălucire 106 W/sr-m2, Γ V

1 cm în diametru este situat la 45 cm de o lentă subțire de + 30 cm lungime focală și 10 cm diametru. Un detector este amplasat la 120 cm la dreapta lentilei. Este alcătuit din două măști, M1 și M2, fiecare cu găuri cu diametrul de 0,1 mm pe axa distanță de 1 cm, urmate îndeaproape de un PC fotocelul mare cu o sensibilitate de 103 A/W. Neglijați iosurile din Iens și găsiți valoarea fotocurentului care vine de la fotocelula (vezi Fig. 4.59).

; l ¿Vi Luna se află la 2,5 × IO5 mile de Pământ și are 2200 mile în diametru. Presupunând că luna acționează pe un disc uniform așa cum s-a observat pe pământ și știind că lumina lunii se ridică la 0,2 lm/m2 pe pământ, calculați Iuminanța lunii.

2L Consultaţi Fig. 3.8. Aceasta arată un sistem de coordonate în centrul căruia acum presupunem că există un dipol oscilant p orientat de-a lungul axei +x. Amplitudinea maximă a dipolului este de 10^3lj Cm. Frecvența oscilației este astfel încât radiația are o lungime de undă de 500 nm. Intensitatea câmpului electric la o distanță radială r de origine este

- ɪ eiω<'"rw sin θ

⅛ λ2r

Din aceste informații se calculează iradierea la o distanță de 0,1 m de-a lungul direcțiilor s = z și s = (l/λ/2)(x + z), se calculează intensitatea radiantă de-a lungul acestor două direcții și se determină fluxul radiant emis. prin dipol.

22. Fie obiectul din fig. 4.60 o sursă mare uniformă Lambert de radiație 10 W/cm2/sr. Presupuneți 10% Ioss în fiecare lentilă și calculați puterea totală transmisă de sistem.

23. Un proiector folosește un Iamp cu filament fiat cu o luminanță de 2000 cd/cm2. Lentila condensatorului complet

Obiect

S

Diam =

0,5 cm

Fig. 4.60

filis thè l-in.-diametru deschidere a 2-in. proiecția la lungimea focală Iens cu imaginea filamentului Iamp. Care este iluminarea pe un ecran la 30 de metri de Iens de proiecție dacă fiecare Ien transmite 90% din incidentul de lumină pe acesta?

24. Care este densitatea maximă a fluxului luminos (iluminanță) la o distanță de 1 km de la o putere de căutare de 100 de milioane de lumânări dacă, la această distanță, inegalitatea

RJ

D > -

rs

se presupune că ține? Dacă reflectorul are un diametru de 1 m, care este luminanța necesară a arcului Iamp folosit ca sursă? Mărimea arcului influențează puterea lumânării luminii de căutare? Dacă nu, ce efect are dimensiunea arcului?

Secțiunea 4.3 Aberațiile lentilei

i25t. Un fascicul paralel uniform de 3 mm în rază de la un laser cu heliu-neon este adus la focalizare de un Iens planocovex cu lungime focală de 1 m și diametrul de 1 cm realizat cu sticlă cu indice de refracție 1,5. Iens este orientat să ofere cele mai bune performanțe. Calculați aberația sferică transversală ca multiplu al lungimii de undă, 633 nm. Repetați cu /=20 mm.

26. Se consideră Iens simetric biconvex de rază a când 5 = 2/ Dacă indicele de refracție al sticlei este n, se deduce o simplificare pentru expresia care dă aberație sferică longitudinală.

27. Pentru o suprafață monorefracție cu 0C40 = –C l'și raza r și pentru o imagine paraxială pe axă și Iocată la S', se determină analitic locația și mărimea cercului de cea mai mare confuzie.

Fig. 4.61

formarea perfectă a imaginii lui P1 pe P'1 și a lui P2 pe

P12 dă această expresie de ordinul întâi în z:

, , · 2 θ' - 2 θ n Z smz – = nz sm -2 2

{Sugestie: Folosiți razele prezentate în Fig. 4.61).

Cu excepția unei oglinzi plane, este incompatibilă cu condiția sinusoială. De ce?

28. Luați în considerare un Iens în aer care prezintă doar comă (ipotetică). Dacă distanțele dintre obiect și imagine (paraxiale) sunt egale la 20 cm și dacă obiectul (un punct) este

La 5 cm de axa optică, schițați aspectul imaginii. Să presupunem că Iens are o rază de 2 cm și că iC31 = –(1/400) cm-3. Schița trebuie să fie desenată cu acuratețe la scară.

29. Ì Localizați punctele aplanatice conjugate ale unei suprafețe refractoare din sticlă sferică cu raza de 6 cm dacă indicele de refracție al sticlei este 1,60.

30. Găsiți relația pentru distanța imaginii în termeni de distanța obiectului și parametrul R în condițiile ca coma primară pentru un Iens subțire să fie zero. Razele de curbură pentru Iens sunt R1 = R și R2 = – 2R, iar indicele acestuia este 1,5.

31. Un sistem optic dat are cel mult o pereche de puncte aplanatice. De fapt, sistemul oferă o formare perfectă a imaginii numai pentru perechea de puncte aplanatice și pentru punctele deplasate lateral pe o distanță mică x. Nu va oferi o formare perfectă a imaginii pentru punctele deplasate axial la o distanță mică z. Arătaţi că condiţiile pentru

32. Arătaţi că pentru a avea o pereche aplanică de puncte cu obiectul la infinit trebuie să avem $d = x'/\sin \theta' = const = f'$. (Vezi fig. 4.62.)

,33y Sistemul sferic din Fig. 4.63 a fost deja luat în considerare în problema 9 a capitolului 3, unde vi s-a cerut să arătați că P' este o imagine perfectă a lui P cu condiția ca n2S = n'2S' = nn'R. Arată acum că P și P' formează o pereche aplanică; adică arătaţi că condiţia sinusului este respectată.

34. O metodă practică de obţinere a unui obiect la P din problema 33 este de a folosi un menisc Iens şi de a pune obiectul în centrul de curbură C1 al primei suprafeţe (Fig. 4.64). Apoi. prima suprafață formează o imagine perfectă a lui C1 la C1. Meniscul Iens are o axă naturală prin cele două centre de curbură C1 și C2. Arătați că imaginea de către prima suprafață a unui obiect O la o distanță scurtă x deasupra acestei axe de la C1 va satisface condiția sinusului și că imaginea I se află de-a lungul liniei de la C1 la 0. (Imaginea celei de-a doua suprafețe a fost arătată a fi aplanică în problema 33. Imaginea finală va fi de-a lungul liniei C2/.) Prin urmare, imaginea generală este aplanică. Această proprietate a meniscului Ienses este adesea folosită în obiectivele microscopului.

Fig. 4.65

35. Să considerăm un Iens subțire cu n = 1,5, /=10 cm și r = 2 cm în aer care prezintă doar astigmatism și curbură a câmpului. Pentru un obiect punctual aflat la 20 cm în fața Iensului, situat la 2 cm în afara axei optice, găsiți locațiile focarului sagital, cercul celei mai mari confuzii și focalizarea tangențială în termeni de abateri de la focarul paraxial de-a lungul șefului. raza.

36. Dacă punctul focal tangențial este la 30,1 cm și punctul focal radial este la 31,4 cm de lentila simplă, găsiți dimensiunea maximă a unui Iens care demonstrează doar astigmatismul și curbura câmpului care va avea un cerc de confuzie mai mic de 1 mm în diametru.

37. Un spectrofotometru comercial folosește o oglindă cu lungime focală de 1/2 metru într-un sistem //10 (vezi problema 12 pentru o definiție a //#) cu o pupilă de ieșire de 1/4 metru

Fig. 4.65

din oglinda. Incidentul de lumină paralelă pe oglindă oferă o imagine punct paraxial la 1 cm în afara axei. Discutați dimensiunea și forma adevăratei „imagine” rezultate din aberația sferică primară, comă și astigmatism.

38. Proiectați un dublet acromatic cu conturul indicat în Fig. 4.65. „Utilizați sticla 510635 ca componentă a coroanei și sticla 620364 ca componentă din silex. Tratează Ienses ca Iense subțiri cu separare zero și găsește o combinație de raze de curbură care va produce un Iens având o lungime focală de 100 cm.

39. Ocularul Huygens din fig. 4.51 realizat cu sticlă 500650 este ajustat pentru a oferi o imagine a unui obiect acromatic (virtual) care se află la infinit pentru lumina albastră. Unde este imaginea pentru lumina rosie?

40. Calculați aberația cromatică laterală, exprimată ca o modificare fracțională a măririi, pentru ocularul Ramsden din fig. 4.53 dacă sticla folosită este aceeași cu cea din problema 39.

5 Inferență

Începem acum studiul nostru de optică fizică, unde detaliile proprietăților ondulatorii ale Iight-ului devin mai importante. Acesta va fi cazul în care efectele suprapunerii fibrelor optice electrice ale mai multor unde joacă un rol major în problemă. Suprapunerea liniară este procesul prin care, într-un anumit punct din spațiu și la un anumit moment, câmpurile electrice din mai multe surse sunt combinate vectorial pentru a produce un câmp electric rezultat:

$$E = E_1 + E_2 + E_3 + \ldots \quad (5.1)$$

Acest concept este important și în optica geometrică. Ideea de suprapunere, inclusiv diferențele relative de fază între diferitele componente ale „perturbației optice”. a fost scos în evidență în discuțiile noastre Sprijinirea principiilor lui Huygen și Fermafs. De asemenea, am folosit principiul suprapunerii în tratarea reflexiei și refracției. Vom vedea cum legile formării imaginii pot fi derivate și din perspectiva opticii fizice.

Ca caz special de optică fizică, optica geometrică poate fi descrisă printr-un formalism care nu ține evidența în mod explicit a fazelor câmpurilor electrice optice. Principiul suprapunerii lucrează în spatele scenei, totuși, în aproape toate fenomenele optice clasice. Motivul pentru aceasta este că câmpurile electrice și magnetice care descriu Iight trebuie, de asemenea, să se supună ecuațiilor lui Maxwel. Formalismul lui Maxwel conduce la o ecuație de undă diferențială parțială de ordinul doi liniară,

V2E-4 |‰0 (5.2)

care restricționează tipul de funcții vectoriale care pot fi utilizate pentru a descrie câmpul electric optic. O caracteristică importantă a ecuației de undă este că oricare două funcții vectoriale care satisfac Eq. (5.2) poate fi combinată vectorial pentru a produce o a treia funcție vectorială care, de asemenea, va satisface Eq. (5.2). Astfel, principiul de suprapunere optică poate fi urmărit direct la caracterul electromagnetic al luminii.

Acest lucru este riguros adevărat pentru Iight în vid. Când un mediu este introdus în problemă, principiul de suprapunere este valabil cu condiția ca răspunsul mediului la câmpul optic să poată fi aproximat ca liniar. În cadrul aproximării mediilor liniare, izotropice, așa cum sa

discutat în capitolul 2, momentul dipol indus pe unitate de volum, PL, este legat de câmpul electric din mediu prin

Pi = e0Zl E (5•3)

unde /L este susceptibilitatea liniară. Efectele neliniare, prin contrast, vor implica o contribuție suplimentară la P din Pjvl, ale cărui componente sunt

3 3

(Pnl)1 =Σ ∑W (¡=1,2.3) (5.4)

It = IJ=I

Pe lângă faptul că posedă caracter de anizotropie prin susceptibilitatea neliniară, dijk, polarizabilitatea neliniară are o dependență pătratică de câmpurile optice. Când Pjvl poate fi neglijat în raport cu PL, ne referim la mediu ca fiind „liniar”. Acesta este întotdeauna cazul pentru E2 suficient de mic (adică pentru densitatea de energie suficient de slabă).

5.1 Interferență cu două fascicule

A. Consideraţii generale

O mare varietate de experimente de interferență cu aspect destul de diferit implică suprapunerea câmpurilor în două fascicule de lumină separate, care în practic toate cazurile sunt derivate din aceeași sursă. Dacă cele două fascicule parcurg căi separate având lungimi de cale optică diferite, va exista o diferență în fazele câmpurilor în punctul de recombinare. Dacă sursa este monocromatică, diferența de fază va fi independentă de timp. Detectăm media de timp a densității de putere care este proporțională cu media de timp a densității de energie în câmpul optic de locație (a se vedea secțiunea 1.C2)

<l/> = ε<E•E> (5,5)

Aici, câmpul electric, E, este rezultatul sumei vectoriale a câmpurilor electrice din fiecare dintre cele două fascicule în punctul de recombinare, E = E1 +E2. Introducerea explicită a celor două contribuții se referă la

<[/> = ε<E1•E1+E2•E2 + 2E1•E2>

sau

<17> = <ι/1> + <I/2> + 2ε<E1 • E2> (5.6)

Primii doi termeni din Ec. (5.6) sunt densitățile medii de energie ale celor două fascicule considerate independent. Ultimul termen este cauzat de interferență. Influența interferenței poate fi constructivă sau distructivă, în funcție de faptul dacă semnul termenului de interferență este pozitiv sau, respectiv, negativ.

Fig. 5.1 O situație în care nu poate apărea nicio interferență. Unghiul θ este arbitrar.

Caracterul vectorial al acestui termen nu poate fi ignorat, în general. Dacă câmpurile sunt perpendiculare, adică dacă direcțiile de polarizare sunt ortogonale, termenul de interferență dispare. Această situație este prezentată în Fig. 5.1α. Când câmpurile sunt paralele, ca în Fig. 5.1b, poate avea loc interferență. Cu toate acestea, cu excepția cazului în care unghiul este mic, franjele de interferență vor apărea la o scară de lungime atât de mică încât pot fi neobservabile, cu excepția cazului în care sunt utilizate tehnici speciale, cum ar fi cele ale holografiei. Pentru a evita dificultățile asociate cu Fig. 5.1, în cele mai multe cazuri, ne vom restricționa atenția la cazurile în care două fascicule sunt suprapuse într-un punct în care direcțiile lor de propagare sunt aproape aceleași și unde câmpurile lor electrice sunt coliniare (polarizate inițial în aceeași direcție). Ultima limitare nu ne împiedică să folosim Iight nepolarizat din următorul motiv. Este posibil să se trateze lumina nepolarizată ca fiind compusă din două câmpuri orientate perpendicular care sunt defazate unul față de celălalt într-un mod aleatoriu și care variază rapid. Fiecare dintre aceste componente poate fi considerată independent. Prin urmare, atunci când lumina monocromatică nepolarizată este utilizată ca sursă pentru un experiment de interferență care depinde de variația lungimii căii optice, rezultatul va fi același ca și cum ar fi fost folosită lumină polarizat inițial.

Vom suprima natura vectorială a câmpurilor de acum înainte prin luarea în considerare

$<l/> = \varepsilon<E2>$

sau echivalent

$<S> = v(U> = v\varepsilon(E2)$

(5-7)

Câmpurile electrice din fiecare dintre fasciculele de lumină trebuie să satisfacă Eq. (5.2). Soluțiile adecvate au forma undei plane de călătorie sinusoidale familiare:

. $E = Aei\varphi$ (5,8)

unde faza este data de

$\varphi = 2\pi\theta,- \eta + \varphi = 2\pi v(t - \quad + \varphi = f\omega t - kR) + \varphi$ (5.9)

iar unde φ este o Caracteristică a sursei. Aici, ca și în Capitolul 1, relațiile dintre frecvența v, frecvența unghiulară ω, numărul de undă k, lungimea de undă λ, perioada T și viteza de fază v a undei sunt:

$\omega = 2\pi v$ (5.10a)

T=- (5.10b)

v

2π

⅛ = y (5,10c)

$v = v\lambda$ (5.10d)

De asemenea, este util să ne amintim că viteza de fază a undei care se propagă printr-un mediu neabsorbant de indice n va fi

v = - (5,11)

n

Dacă sursa este un punct geometric, atunci R în Ec. (5.9) este distanța radială de la sursă și amplitudinea A în Ec. (5.8) este invers proporțională cu R, A → A/R. Pentru undele sferice, puterea sursei A trebuie să aibă dimensiunile (câmp electric × lungime). Fronturile de undă în avans, așa cum sunt identificate de suprafețele de fază constantă, sunt sfere. Dacă sursa este o linie geometrică, atunci R este măsurat în continuare de la sursă, dar amplitudinea devine invers proporțională cu rădăcina pătrată a lui R, (cu condiția ca R să fie mult mai mare decât À) A → A | y/ R . Pentru unda Cilindrică, puterea A sursei trebuie să aibă dimensiunile (câmp electric X χ/lungime). Suprafețele de fază constantă sunt apoi cilindri. Departe de surse în oricare dintre aceste cazuri, dependența R își pierde semnificația în factorul de amplitudine în comparație cu dependența care variază rapid de R care rezultă din factorul de fază. Presupunând că A din Ec. (5.8) se comportă ca o constantă, aproximăm suprafețele de fază constantă ca plane. În acest caz, R care apare în faza ϕ este distanța de-a lungul direcției de propagare a fasciculului de lumină, măsurată perpendicular pe planurile de fază constantă.

Trebuie înțeles că notația exponențială este o reprezentare convenabilă a câmpului real, care, desigur, nu poate fi complexă. Folosim această formă din cauza modului simplu în care pot fi manipulate fazele câmpurilor. La sfârșit, înainte de a introduce câmpul rezultat în Ec. (5.7), trebuie să luăm partea reală drept cantitate semnificativă fizic.

B. Adăugarea fazorilor

Consideră câmpurile din cele două grinzi ale noastre ca

E1 — A1etφl și E2 — A2elφl (5-12)

care sunt reprezentați ca fazori în planul complex din Fig. 5.2α. Dacă în faze

Fig. 5.2 Construcția fazorilor care arată adăugarea complexă a lui E_1 și E_2. (a) Fazorii componente. (h) Adunarea vectorială a fazorilor pentru a produce E. (c) Reprezentarea sumei E.

dintre aceste două câmpuri [ca în Ec. (5.9)] coeficienții termenilor proporționali cu timpul sunt aceiași, condițiile de interferență nu se modifică în funcție de timp. Cei doi fazori din Fig. 5.2a se rotesc apoi în jurul originii cu aceeași viteză cu diferența de unghi de fază, $\delta = \varphi_2 - \varphi_1$, rămânând aceeași. Putem vedea din acest argument că câmpul rezultat va avea aceeași frecvență ca și Componentele, dar va diferi de fiecare dintre Componente în ceea ce privește amplitudinea și faza sa. Cele două componente sunt combinate pentru a forma rezultatul \

$$E = E_1 + E_2 = Ae^{l\varphi} = 4(\cos \Phi + i \sin \Phi) \qquad (5.13)$$

Această operație este reprezentată în plan complex ca adunare vectorială, așa cum se arată în Fig. 5.2b. Mărimea și faza rezultatului, așa cum se arată în Fig. 5.2c, pot fi exprimate în termeni de Componente reale și imaginare ale fazorului:

$$A = [(\mathrm{Re}\, E)^2 + (\mathrm{Im}\, E)^2]^{v2} = [EE^*]^{1/2} \qquad (5,14)$$

$$\Phi = \tan^{-1}(\mathrm{Im}\, E/\mathrm{Re}\, E) \qquad (5.15a)$$

$$= \cos^{-1}(\mathrm{Re}\, E/A) \qquad (5.15b)$$

Unde, din cauza caracterului vectorial al construcției fazorilor, avem,

$$\mathrm{Re}\, E = A_1 \cos \varphi_1 + A_2 \cos \varphi_2 \qquad (5.16a)$$

$$\mathrm{Im}\, E = A_1 \sin \varphi_1 + A_2 \sin\varphi_2 \qquad (5.16b)$$

Înlocuirea ecuațiilor. (5.16) în Ec. (5 14) pentru amplitudinea câmpului rezultat Iead to

$$A = [A_1 \cos^2 \varphi_1 + Л_2 \cos^2 \varphi_2 + 241Λ2 \cos \varphi_1 \cos \varphi_2$$

$$+ A_1^2 \sin^2 \varphi_1 + A_2^2 \sin^2 \varphi_2 + 2Л_1Л_2 \sin \varphi_1 \sin \sqrt{>}2]^{1/2}$$

sau

$$A = [4^2(\cos^2 \varphi_1 + \sin^2 \varphi_1) + Λ^2(\cos^2 \varphi_2 + \sin^2 \varphi_2)$$

$$+ 2Λ_1Λ_2(\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 + \sin \varphi_1 \sin \varphi_2)]^{112}$$

Prin utilizarea a două identități trigonometrice comune, aceasta devine

$$A = [A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1)^\wedge]^{il2}$$

$$= UÎ + ¿2 + 2Λ142 \cos ò]^{1/2} \qquad (5,17)$$

Pentru o expresie analitică care dă naștere la faza rezultatului, începem cu Eq. (5.15b) folosind $\varphi_1=\omega t$ și $\varphi_2 = \omega t + \delta$.

cos Φ = [Re E/Л] = [(Λ1 cos ωt + A2 cos(ωt + <5))/Л]   (5.18)

Acesta poate fi rescris ca

ɪ Л i   Л 2Л ɔ

cos Φ = — cos ωt + cos ωt cos ¿-1 sjn ωt s | n δ

AA   A

A . A2

— + ~ cos δ

A A

= cos ωt

— sin ωt

ʌ2 · X

— sin δ

A

Să definim acum unghiul de fază independent de timp Φ', unde A ¡ Aj

cos Φ = —1 ^ cos δ(5.19a)

/ɪ 7î

și

Aj

sin Φ'= —sin <5 (5.19b)

√T.

Se poate demonstra cu ușurință că cos2 Φ' + sin2 Φ' = 1 prin substituție directă, justificând astfel atribuirea noastră. Acest lucru ne permite să scriem

cos Φ = cos ωt cos Φ' — sin ωt sin Φ'

= cos (ωt + Φ')

Prin urmare, faza rezultatului este

Φ = ωt + Φ'

unde Φ' este dat de Ecs. (5.19).

Aceste concepte sunt clarificate în Fig. 5.3, unde instanta în timp Corespunde

la condiţiile din Fig. 5.2 este ilustrat.

C. Densitatea de putere medie în timp

Trebuie acordată atenție la calculul densității de putere a rezultatului. Notația complexă trebuie înlocuită cu formalismul sinusoidal pentru această dezvoltare deoarece trebuie să evaluăm media în timp a câmpului la pătrat. Din Eq. (5,7)

$$<S> = \infty<E^2>$$

Fig. 5.5 Suprapunerea algebrică a lui $E_1(t)$ și $E_2(t)$ pentru a da $E(t)$. Condițiile la linia verticală sunt aceleași cu cele care dau naștere construcției fazoare din Fig. 5.2.

Unde

$$E^2 = A^2 \; qos^2(\omega t + \Phi')$$

$$= \Lambda^2[\cos \; cot \; \cos \Phi' - \sin \omega t \sin \Phi']^2$$

$$- \Lambda^2[\cos^2 \omega t \cos^2 \Phi' + \sin^2 \omega t \sin^2 \Phi'$$

$$- 2 \cos \omega t \sin \omega t \cos \Phi' \sin \Phi'(j \qquad (5.20)$$

Media de timp a Eq. (5.20) implică

$$, \quad ,\kappa 1 <\cos^2 cot) = (smz \; \omega t) - -(5.21a)$$

și

$$<\cos \; cot \; \sin \; cot) = 0 \quad (5.21b)$$

Așa că rămânem cu

$$<E^2) = A^2 \; ɪ \; (\cos^2 \Phi' + \sin^2 \Phi')$$

$$_ \; A^2 \; 2 \qquad (5-22)$$

Aceasta înseamnă

$$<s> = y\hat{} \qquad (5,23)$$

și folosind Eq. (5.17) ajungem cu,

$$<5> = y \; [\Lambda f + A^2 + 2A_1A_2 \; \alpha os <5]$$

Acest lucru poate fi rescris în termeni de densități de putere a fasciculului componente ca

$$<5> = <S,1> \div <S_2> + 2\sqrt{<S_1><S_2>}\cos \delta \qquad (5,24)$$

De acum înainte în acest capitol vom renunța la simbolismul mediei timpului <...), înțelegându-se că densitatea de putere S este întotdeauna media temporală <S).

Un caz special important apare atunci când $A_1 = A_2$. Atunci S este dat de

$$S = 2S_1[1 + \cos<5] \quad (5.25a)$$

sau

$$S = 4S_1 \cos2(<5/2) \quad (5.25b)$$

Această ecuație este reprezentată grafic în Fig. 5.4. Rețineți că, deși vârful densității de putere medie în timp este de două ori mai mare decât suma densităților de putere a sursei, conservarea energiei este încă menținută. Media spațială a Eq. (5.25) pe un număr întreg de oscilații este 251 așa cum trebuie să fie. Interferența acumulează energia în unele regiuni ale spațiului în timp ce o fură din alte regiuni ale spațiului.

Fig. 5.4 Distribuția densității puterii în modelul de interferență cu două fascicule.

D. Condiții de interferență

1. Polarizare. Am văzut deja cum polarizarea câmpurilor electrice ale fasciculelor componente trebuie să fie coliniară în momentul și locația suprapunerii, dacă aceste fascicule vor interfera între ele. În plus, există restricții asupra fazelor grinzilor componente.

2. Frecvența. Să presupunem pentru moment că două fascicule de lumină sunt suprapuse după ce au parcurs aceleași căi optice măsurate de la sursele lor. Atunci diferența de fază este

$$<5 = \neq2 - \neq\iota = (\omega2 - eo\text{ɪ})t + (\varphi2 - \varphi1)$$

(5,26)

După cum se arată în prezentarea fazorilor din secțiunea anterioară, dacă interferența trebuie să fie observabilă, această mărime nu trebuie să se modifice în timpul, T, al măsurării. Acest lucru necesită ca cele două surse să aibă aceeași frecvență. Apoi primul termen dispare.

3. Coerență. Termenul rămas în diferența de fază este contribuția φ2 – φ1 provenită din sursele înseși. Orice sursă adevărată de lumină posedă fluctuații aleatorii de fază care variază lent în comparație cu timpul necesar pentru o perioadă de oscilație a câmpului optic.

Să definim un timp de coerență reciprocă τc ca timpul necesar pentru ca valoarea medie pătrată a lui φ2 – φ1 să se modifice cu, de exemplu, 1 rad. (Putem face acest lucru mai precis mai târziu.) Atunci, dacă τc > T, observăm efecte de interferență, în timp ce dacă τc < T, nu. În primul caz spunem că cele două surse sunt reciproc coerente”, în al

doilea caz sunt reciproc incoerente. Rețineți că conceptul de coerență este unul cantitativ

unul, deoarece depinde de dimensiunile relative ale timpului de coerență reciprocă și de timpul de răspuns al aparatului de măsurare.

Luați în considerare cazul a două transmițătoare radio ca exemplu. Fiecare poate fi destul de stabil, dar dacă nu sunt de fapt conectați în fază de un fel de unitate de control, ele se vor defaza unul față de celălalt. La fel este și cu laserele. Dacă nu sunt utilizate scheme speciale de sincronizare, două lasere se vor defaza într-o mică fracțiune de secundă (τc ~ 10-3 sec). Sursele obișnuite de descărcare în gaz de radiație „monocromatică”, cum ar fi amperii de neon sau amperii de mercur, vor avea timpi de coerență mai scurti de 10-8 secunde. Cu o fotografie rapidă (timpi de expunere de 10-3 secunde sau mai puțin) am putea fotografia modelul de interferență de la două lasere nesincronizate separate, dar pentru sursele obișnuite acest lucru ar fi practic imposibil. Vom reveni la subiectul coerenței în capitolul 8.

Metoda tradițională de obținere a două surse care sunt coerente reciproc este de a avea două surse legate în cele din urmă de aceeași sursă unică. Două exemple celebre sunt oferite de experimentul lui Young și de interferometrul Michelson. Geometria lui Young implică o diviziune a frontului de undă, în timp ce dispozitivul Michelson exploatează o diviziune a amplitudinii undei optice. Vom investiga ambele cazuri în detaliu.

E. Configuraţia lui Young

În 1807, Thomas Young a efectuat unul dintre cele mai vechi experimente care implică interferență. Lumina soarelui dintr-un singur orificiu într-un ecran a fost aranjată astfel încât să ilumineze un al doilea ecran care conține două orificii. Acestea s-au comportat ca surse reciproc coerente. Dublarea prin modem a acestui experiment implică de obicei fante în loc de găuri pentru a simplifica analiza și pentru a îmbunătăți debitul. Elementele de bază sunt prezentate în Figura 5.5α. Lumina de la sursa L intră în două fante foarte înguste la L1 și L2 într-un ecran de barieră. Undele Huygens secundare cilindrice de acolo acționează ca și cum ar fi provenite de la L1 și L2. Răspândirea Iight dincolo de fante va fi pronunțată dacă fantele sunt înguste. Aceasta este o manifestare a fenomenului de difracție, despre care vom discuta în detaliu mai târziu. Pentru moment, pur și simplu presupunem că L1 și L2 sunt surse de linii coerente cu amplitudini bine definite și aceeași fază. Această diferență de fază va depinde numai de diferența dintre căile optice (n1LL1 – n2LL2) și rămâne constantă dacă suporturile mecanice sunt robuste și lipsite de vibrații.

Măsurăm densitatea fluxului pe un plan de observație paralel și la o distanță D' de planul barierei. La L', așa cum este identificat prin coordonatele x' în planul de observare, cele două fascicule componente sunt suprapuse după ce au parcurs căi optice care diferă prin (R1n1 – K'2n2). Dacă ambele fascicule trec prin același mediu (aici se

presupune că au n = 1), atunci diferența de lungime a căii optice (OPL) este

R1 - R'2 = L1Mi

Dacă L' este aproape de axa z (x' < D') și dacă sursele liniilor sunt apropiate între ele (a ≤ D'), atunci putem exploata următoarea aproximare

L1M' ≥ a sin 0'

(5,27)

Flg. 5.5 Geometria lui Young în care fante paralele sunt iluminate de radiația de la o singură fante sursă. În (a) fanta sursei este pe axa z. În (b) sursa este deplasată departe de axă.

Dar pentru că sin θ' ≤ x'/D' ≤ θ', diferența OPL este

R'l - P2 aθ'

1   2 D

(5,28)

Amplitudinile câmpurilor optice la L' poartă dependența caracteristică R~112 a undelor cilindrice. Putem ignora acest lucru în comparație cu efectele diferențelor de fază dintre cele două fascicule deoarece în aproximarea noastră Ri = P2 = D ·

Diferența de fază față de Ec. 5.9 va fi

<5 = 02 - </>1 = -^(P2 - P'i) - k(R'l - P2)

care, folosind Eq. (5.28), devine

e >   ,, , 2π ax'

Sskax/D =

(5,29)

Dacă presupunem, de asemenea, că L1 și L2 au luminozitate egală, atunci densitatea de putere medie în timp la L' este dată de Ec. 5.25

S = 4S,cos2(^)   (5,30)

Pe măsură ce L' se mișcă în planul de observație spre sau departe de axa z, densitatea de putere variază într-un model de franjuri Hilustrat în Fig. 5.4, unde abscisa poate fi interpretată ca fiind proporțională cu poziția de observație prin ecuația (5.29). Separarea Δx’ între două

maxime (sau minime) succesive se obține prin stabilirea Δ<5 = 2π și rezolvând pentru Δx,:

1 , λD'

Δx — — a

Dacă sursa nu se află pe axa z așa cum se arată în Fig. 5.5b, atunci se introduce o diferență OPL suplimentară pe partea incidentă a barierei

R2 — R1 = ML2 = a fără θ

Diferența totală OPL de la L la L'între grinzile care trec prin L1 și L2 este

(OPL)2 - (OPL)1 = (R2 + R2) - (R1 + R'1)

= (R2 - R1) - (R'1 - R2)

≤ «(sin θ — sin θ')

Diferența de fază totală este atunci o funcție a ambelor θ și θ'.

δ — ϕ2 — ϕ1 — — k[(R2 + R2) — (R1 + R1)]

= fc∏(sin θ' — sin θ)

= 2π y (sin θ, — sin θ)   (5.31)

Λ

F. Alte configurații Spirit-Sursă

Există și alte aranjamente pentru producerea interferenței prin împărțirea sursei. Unele sunt mai eficiente decât geometria lui Young și duc la modele ale căror maxime au o densitate de putere mai mare. Oglinda lui Lloyd constă dintr-o sursă de linie și o singură oglindă folosită la o incidență aproape de pășunat. Interferența are loc între sursă și reflexie, așa cum se arată în Fig. 5.6. Două surse de linii virtuale pot fi produse dintr-o singură sursă de linie prin refracție printr-o pereche de prisme subțiri. Bazele sunt cimentate împreună, așa cum se arată în Fig. 5.7. Această configurație este cunoscută sub numele de biprismă FresneL. În ambele exemple, cele două fascicule se suprapun fără ajutorul difracției.

5.2 Interferență cu deamuri multiple

A. Adăugarea fazorilor

Procedura urmată în Secțiunea 5.IA poate fi generalizată la cazul mai multor grinzi de lumină coerente. Dorim să găsim densitatea de putere medie în timp în punctul de suprapunere a N fascicule. Aceasta va rezulta din Ec. (5.23) cu amplitudinea rezultatului dată de Ec. (5.14).

Pentru cazul interferenței cu fascicule multiple, totuși, trebuie să înlocuim Eq. (5.13) și (5.16) cu

Fig. 5.7 Biprismul lui Fresnel.

N

$E = E1 + E2 +$ [redacted] $+ En = \sum En = A\ ei\varphi = \Lambda(\cos \Phi + i \sin \Phi)$ (5.32)

n= 1

N

$Re\ E = A1 \cos \varphi1 + A2\cos \varphi2 + \cdot$ [redacted] $+ An \cos \varphi N = \sum An \cos \varphi n$ (5.33a) n = 1

N

$Im\ E = A1 \sin \varphi1 + A2\sin\varphi2 +$ [redacted] $+ An \sin \varphi N = \sum An \sin \varphi n$ (5.33b)

n= 1

Când ecuațiile. (5.33) sunt Substituite în Ec. (5.17) pentru amplitudinea, A, a rezultatului, vom găsi două tipuri de termeni sub rădăcina pătrată. Un tip are forma $\Lambda2(\cos2 \varphi n + \sin2 \varphi n) = An$, iar celălalt tip are forma

$AnAm(\cos \varphi n \cos \varphi m + \sin \varphi n \sin \varphi n \backslash$

unde n și m nu sunt egale. Când A2, determinat în acest mod, este înlocuit în Ec. (5.23), vedem că termenii primului tip Ie conduc la densitățile de putere ale fasciculului independent, în timp ce cei din al doilea tip furnizează interferența

N NN

$s = \sum sn + \sum \sum +'SnSm \bullet \cos(\varphi m - \varphi n)$

è = 1 n = 1 m = 1

$n \neq m$

(5,34)

B. Matematica! Soluţie

Este convenabil să folosiți notația exponențială pentru a determina rezultatul în situația cu fascicul multiplu.

N

$E = A1\ ei\varphi i + A2\ ei\varphi2 + -+.A11\ ei\varphi fi = \sum An\ ei\varphi n$

л = 1

= A eiφ (5,35)

Când toate amplitudinile sunt egale și dacă φn = ωt + <5(n — 1), ca în Fig. 5 8, avem

NI

E(δ) = A1 eiωt(l + eiδ + ei2δ + [redacted] + ei(N~1)0) = A1 eiω, ∑ einδ (5.36)

л = 0

Rezultatul așa cum este exprimat de Ec. (5.36) ia forma unei progresii geometriei cu e,δ ≡ r ca raport comun. Pentru a evalua suma luați în considerare

N

σN≡ ∑ rn = (1 + r + Γ2 + · ■ · + rN)

è = 0

= σN_1+τN (5.37a)

De asemenea, putem forma o altă expresie scăzând una din sumă.

σN ~ 1 — rσN- 1

(5.37b)

Fig. 5.β Diagrame de fazori Corespunzător punctelor Ietate de pe graficul densității puterii din Fig. 5.10a.

Acum eliminați σ2v din ecuațiile. (5.37a) și (5.37b) să cedeze

JV-I

= ∑rli

л = 0

(5.37c)

Prin comparație putem observa că suma din Ec. (5.36) este exact de această formă. Prin urmare,

/1 _ √^r<5 \ eiNS¡2 (e~iyi,2 — eiNÔ/2)

•E(<5) = A1 e,ωt(ɪ _ ei<5 Ì = A1 e,ω, ^ii/2 ^e~iδ/2 _ e^/2y

. ,ʌʌ-, sin(N<5/2)

= A1 eχp[i(ωl + (N- 1)0/2)] s|n (<й-

(5,38)

Pentru a afla densitatea de putere conform Eq. (5.23) trebuie să evaluăm pătratul amplitudinii rezultatului, A2 = EE*. Dacă asociem S1 cu vε4f/2, densitatea de putere datorată numai unuia dintre fascicule, atunci densitatea de putere a rezultatului este

X2

5(ó) = VEy = S1

/sin(≡/2) \ 2 ` sin (0/2) j

(5,39)

Putem determina valoarea acestei funcții la δ → 0 printr-o aplicare a regulii LHospitaΓ.

r /sin(N<5/2) \ vl. /cos(ΛΓ<5/2) \ lɪm • zgjç√ I = N lɪm ------------ɪ- = N

ьo \ sm(<5/2) J s→0 \ cos(<5/2) J

Aceasta înseamnă

Iim S(<5) = S1N2 ≡ S(O)   (5,40)

i→o

În această condiție, toate câmpurile se adaugă Constructiv. Acest lucru se va întâmpla și când

<5 — m2π   (5,41)

unde m este un număr întreg. Ecuația (5.41) identifică condițiile maximelor principale. Acestea apar cu condiția ca diferența OPL dintre grinzile adiacente să fie un multiplu al lui λ. Întregul m este de ordinul maximului și este numărul de lungimi de undă cu care diferă OPL-urile fasciculului adiacent.

Numărătorul din Ec. (5.39) poate fi zero fără ca numitorul să fie zero. Acest lucru se întâmplă pentru

2π 4π 6π

Ñ' ^N' ~N,

Nl. ~2π

(5,42)

Există N — 1 dintre aceste minime între maximele principale adiacente. Între aceste minime există N — 2 maxime minore. Acestea sunt identificate prin condiție

d_

dδ

/ sin(N0/2) \ =

\ sin(<5/2) J

sau

bronz (N<5/2)

N tan (<5/2)

(5•43)

Cazul pentru N — 4 este prezentat în Fig. 5.8. Diagramele piane complexe ale fazorilor sunt, de asemenea, date pentru diferite valori ale defazajului. Aici am folosit Eq. (5.40) pentru a normaliza densitatea de putere în raport cu valoarea sa la maximele principale.

S(<5) = S(O)

Zsin(lV<5/2) \

\ 7V sin(<5/2) J

(5,44)

2

Fig. 5.9 Geometria rețelei de transmisie care arată detaliul diferențelor OPL dintre contribuțiile adiacente din fante separate prin a. Unghiurile sunt măsurate pozitiv în sens invers acelor de ceasornic de la axa z.

O geometrie practică în care se poate observa modelul de interferență cu patru fante este ilustrată în Fig. 5.9.

Dacă N = 2, atunci Ec. (5.44) devine

S(ó) = S(O)I

sin((>) V 2 sin(<5/2) J

Și folosind sin δ = 2 sin(<5/2) cos(<5/2) avem

S(δ) = S(0)cos2(<5/2)

(5,45)

care este același cu Eq. (5.25), pe care l-am derivat pentru cazul experimentului lui Young.

C. Gratare

Pentru N mare, densitatea de putere în modelul de interferență va fi concentrată lângă δ — 2πm, locațiile maximelor principale. Lățimea maximelor principale [așa cum este identificată prin separarea dintre primele minime de fiecare parte a maximului principal, din Ec. (5.42), acesta este Δ<5 = 4π/ΛQ devine foarte îngust.

Calim acest tip de dispozitiv de interferență un grătar. Deoarece difracția este necesară pentru contribuția fiecăreia dintre fantele individuale care se suprapun în planul de suprapunere, acestea sunt denumite în mod obișnuit rețele de difracție. Cu toate acestea, utilizarea principală a rețelei este ca un produs al interferenței cu fascicule multiple, așa cum este tratat aici. Mai târziu vom introduce caracteristicile modelului care rezultă din dimensiunea și forma fantelor. Deocamdată, continuăm să ne limităm tratamentul la cazul fantelor infinit lungi, foarte înguste.

Totuși, nu toată densitatea de putere este livrată la maximele principale. Maximele minore sunt atât de atenuate încât pentru N mare ele pot fi ignorate. Pentru a vedea acest lucru mai clar, luați în considerare Ec. (5.44) la valorile <5 date de Eq. (5,43). Acestea vor fi foarte dozate la δ — 3π/N, 5π/N,(2N — 3)π/ΛL Dacă primul maxim minor este identificat cu f = 1, al doilea cu / = 2 și așa mai departe până la f — N — 2, putem indexa maximele minore cu t și exprimăm δ ca

δ = {2i + l)τr/7V; { = l,2,...,(N-2) (5,46)

δ

(α)

Fig. 5.10 (α) Distribuția densității puterii în modelul de interferență cu fascicule multiple cu patru surse, (ò) Locația primului minim O și a primului maxim minor <3> de ambele părți ale unui maxim principal la <5 = O. Aceasta arată că, pe măsură ce N, numărul de fante, crește, modelul devine concentrat la δ = 0. (c) Densitatea de putere relativă normalizată pentru primul maxim minor < × și la mijlocul dintre maximele principale □ . Aceasta arată cum, pe măsură ce N crește, practic nu apare nicio putere în mijlocul tiparului.

27

15

3⅛-

0,16

IJ

S(O) 0 08

Ol

3

<3∑γ≡>

<S∑3i>

φφ

ϕ)

<3zf

F> <≡> f f f De la <£> <£> DE LA DE LA Os DE LA DE LA DE LA 00 Oo Oo Oo Oo

Oh

Oh

Oh

OO O o

O o O o O o

®> ɔ

<≡>

<o f

F

F F

<de către GO

MERGE

GO GO

GO GO

MERGE

MERGE

MERGE

00

00

00 o.o

OO oo

OO

OO oo oO oo o o o o o O

(despre)

despre

°°o

α ^0000000000000000000000000000000

□

□□

------Elj DDP¿annQQQaoGaQ[boaaG¿3jaooao¿

15   2739

N

(c)

Fig. 5.10 (Continuare)

Urmează direct o aproximare a densității de putere la aceste maxime minore.

SW = Wsin2

/(2/ + l)ττ \

Eu 2Ã I

(5-47)

O Φ

■ o 1

δ

Dacă avem un număr impar de fante, atunci una dintre maximele minore va fi la jumătatea drumului

între maximele principale, la / = (N − l)/2. Aici densitatea de putere este S(O)N~2. Figura 5.10 prezintă aceste Caracteristici ca funcții ale lui N.

Rețelele au fost extrem de utile în spectroscopie datorită capacității lor de a separa lumina policromatică în componentele sale monocromatice. Acest proces se numește dispersie. Condiția pentru un maxim de interferență poate fi scrisă sub forma ecuației rețelei familiare prin combinarea ecuațiilor. (5.31) și (5.41).

$\alpha(\sin\theta' - \sin\theta) = m\lambda$ '   (5,48)

Dispersia implicată aici poate fi văzută din dependența de lungime de undă a unghiului de observație, θ', pentru un unghi de incident fix, θ și m de ordin diferit de zero. Diferențiând, obținem

$a \cos\theta' \, d\theta' - m d\lambda$

i^-=-n-ff=-   (5,49)

$d\lambda$ a cos θ a1

unde a± – a cos θ' este separarea fantei proiectată.

Să presupunem că Iight a două lungimi de undă λ_i și λ_j este prezentă în fasciculul incident care se propagă în direcția θ. Interferența de ordinul zero are loc în aceeași direcție. Pentru λ_i, interferența de ordinul întâi are loc la $(\sin\theta' - \sin\theta) = \lambda_i/a$, pentru λ_j la

Fig. 5.11 Modelul de interferență al rețelei atunci când sunt prezente două lungimi de undă.

λ_j/a. Interferența de ordinul doi pentru λ_i este la $2\lambda_i/a$, cea pentru λ_j la $2\lambda_j/a$ și așa mai departe așa cum este indicat în Fig. 5.11. Rețineți că separarea celor două vârfuri în ordinea al mi-lea este

$\Delta(\sin\theta') =$ (5,50)

A

Ne întrebăm acum: Cât de apropiate pot fi λ_i și λ_j, astfel încât să fie abia distinse ca vârfuri separate? Dacă cele două linii sunt la fel de intense, criteriul aplicat de obicei, criteriul Rayleigh, înseamnă că sunt doar „rezolvate” în mth; ordine dacă maximul de ordinul m al lui λ_j apare la primul zero imediat dincolo de maximul al m-lea al lui λ_i (Fig. 5.12). De la maxim la primul minim implică o schimbare în <5 de $2\pi/N$, iar modificarea sin θ' este $\lambda/(Na)$, unde λ ar putea fi fie λ_i, fie λ_j, deoarece acestea sunt aproape egale. Echivalarea expresiei pentru $\Delta \sin\theta'$ cu cea din Ec. (5.50), se obține $\lambda/(Na) = m\,\Delta\lambda/a$. Definim puterea de rezolvare ca

care în acest caz devine

$M = Nm$ (5,52)

Acest număr poate fi destul de mare. Sunt disponibile monocromatoare cu rețea la prețuri moderate care utilizează rețele având în mod obișnuit

1200 de linii/mm cu o suprafață utilă de 100 mm lungime. (Cele mai bune rețele pentru cele mai multe scopuri de spectroscopie sunt cele produse iolografic. Ele tind să fie mai lipsite de nereguli decât rețelele rigle.) Astfel,

$$N = 100 \text{ mm} \times 1200 \text{ linii/mm} = 120.000 \text{ Iini}$$

Acest lucru ar oferi o putere de rezolvare teoretică de ordinul întâi de 120.000. Dacă $\lambda = 600$ nm, $\Delta\Lambda = 1/200$ nm.

Fig. 5.12 Interferență în ordinea lunii la limita rezoluției.

În utilizarea reală, găsim mai multe grătare de tip reflex decât de tip transmisie. Cel mai simplu rețeau de reflexie este un analog exact al celui mai simplu rețeau de transmisie – unde cel mai simplu are o deschidere, primul are o suprafață reflectorizante, iar în cazul în care acesta este opac, primul este nereflectant, așa cum este indicat în Fig. 5.13.

Interferența de ordin zero, unde $\theta' - \theta$, corespunde acum reflexiei speculare din planul rețelei. Interferența maximă de ordinul al m-lea stili apare la $\delta = 2\pi m$, ceea ce dă aceeași ecuație a rețelei

$$\alpha(\sin\theta' - \sin\theta) = m\lambda$$

5.3 Interferență cu două fascicule: interfețe Porrollel

A. Diferența de lungime a căii optice într-un strat dielectric

O altă metodă de a obține efectiv două surse coerente din aceeași sursă fizică este utilizarea procesului de dublă reflexie ilustrat în Fig. 5.14.

Fig. 5.14 Interferență cu două fascicule produsă de reflexia de la două interfețe paralele.

Relațiile fizice și geometrice pertinente pot fi derivate cu ajutorul Fig. 5.15. Placa cu fețe paralele cu indice n2 este înglobată într-un mediu cu indice de refracție n1. Luăm în considerare aici doar acele materiale care conduc la reducerea reflectivității la fiecare interfață, cum ar fi o placă de sticlă în aer. În secțiunea 5.4 vom trata

Fig. 5.15 Detaliul geometriei interfeței paralele.

cazul interfețelor foarte reflectorizante. Aproximațiile noastre actuale asigură că efectele dominante pot fi descrise prin formalismul interferenței cu două fascicule. E1 și E2 sunt câmpurile optice ale fasciculelor componente care trebuie aduse împreună cu un Iens (neprezentat) pentru a demonstra interferența.

În punctul de suprapunere trebuie să evaluăm amplitudinile și fazele relative ale fasciculelor componente. Acest lucru se poate face comparându-le la linia DD', deoarece dincolo de această linie ambele fascicule vor fi supuse aceleiași procesări optice. Considerăm variațiile măsurate față de punctul B, în afara plăcii, deoarece ambele grinzi aici sunt una în aceeași grindă incidentă. Fie R la B zero, astfel încât câmpul optic incident să fie Ae~ιωt. Coeficienții de reflexie și transmisie de amplitudine au fost derivați în Capitolul 2. Dacă fasciculul este incident pe interfața de la mediul 1, îi etichetăm p și, respectiv, τ. Dacă fasciculul este incident din mediul 2, ele vor fi p'^ și τ'. Amplitudinile câmpurilor relevante sunt enumerate în Tabelul 5.1. Săgețile arată cum se modifică fasciculul 2 devenind fasciculul transmis la D'. Aici factorii de amplitudine τ'ρ'τ pot fi rescriși cu ajutorul ecuațiilor. (2,71) și (2,72).

$\tau'p'\tau = -p(l - p2)$

Deoarece p este mic, p2 va fi și mai mic - pentru un sistem de sticlă cu aer (1 — p2) ≥ 0,96. Amplitudinile grinzilor componente sunt atunci foarte apropiate

$A1 = pA$

$A2 = — pA$ (5,53)

Semnul minus provine din schimbarea de fază de 180° care apare la reflexia de la o interfață în care mediul incident este optic mai puțin dens decât mediul de transmisie. În loc să păstrăm semnul minus în expresia de amplitudine pentru A2, alegem să menținem acest efect prin includerea unui termen suplimentar în faza lui E2. Mărimile celor două componente din aproximarea noastră sunt egale. Acum putem folosi Eq. (5.25) pentru a găsi densitatea de putere medie în timp ca o funcție a diferenței de fază introdusă de lungimile de drum optice neegale și de reflexia la B.

Tabelul 5.1. Demonstrarea contribuțiilor la factorii de amplitudine pentru câmpurile în interferența interfeței paralele cu două fascicule

În general, faza este dată de

, 2πR 2πnR

unde λ0 este lungimea de undă în vid și n este indicele de refracție. Diferența de fază dintre E1 la D și E2 la D' va fi

— 2π ------ ---- --------

$\varphi 2 — \Phi\iota = —:— [n2(BC + CD1) — n1BD] + \pi$ (5,54)

ΛΟ

Din fig. 5.15 vedem că

BC = CD' =------–

COS V2

(5,55)

Aceasta mai arată că BD = BD' sin θl. Vrem să exprimăm acest lucru în termeni de grosime a filmului. Acest lucru se face prin recunoașterea faptului că BD' = 2d tan θ2. Prin urmare,

BD = 2d tan θ2 sin θ1 (5,56)

Combinarea ecuațiilor. (5.55) și (5.56) pentru traseele fizice Lungimi cu Ec. (5.54), ajungem la expresia pentru diferența de fază

– 2π

02 01 - 1

Z0

2d|

M2

-----– n< tan θ2 sin θ cos θ2

(5,57)

Utilizarea SnelFs Iaw ajută la reducerea acesteia la o formă mai simplă.

n . λ sin θ2 . „ sm2 θ2

n, tan V2 sin 01 = n,----– sin θ1 = n2-----–

1 211 cos θ2cos θ2

ASA DE

– 2π Γ Zdn2 _ . , . 4

-----– (1 – sin2 θ2) + π cos θ2

02 Φ1 – 1

ʌo

–4πn2d

= –------cos θ2 + π

λ0

(5,58)

Ec. (5.25) apoi Ieads to

$S(\delta) = 2S1[1 + \cos(–ó + \pi)]$

$= 2S1[1 - \cos(<5)]$

$= 4S1 \sin2(<5/2)$

(5,59)

Unde

4πn2d

–;– cos θ2 λ0

Acest lucru este ilustrat în Fig. 5.16.

ò =

(5,60)

Fig. 5.16 Distribuția densității puterii în modelul de interferență datorată reflexiei de la două interfețe paralele cu reflexie scăzută.

B. Franjuri de interferență Haidinger

Franjurile Haidinger sunt tipul de model de interferență care rezultă cu o sursă extinsă în care au loc reflexii parțiale dintr-o placă dielectrică plan-paralelă. Interferența luată în considerare în secțiunea anterioară are loc atunci pentru Iight care provine din fiecare parte separată a sursei.

Figura 5.17 prezintă un aranjament experimental tipic pentru observațiile franjurilor Haidinger. Sursa extinsă trebuie să fie în esență monocromatică. Divizorul fasciculului este o placă parțial transmisie care permite unghiului incident θ1 să fie mic. Ienii ar putea fi într-un telescop sau în ochiul unui observator. Franjurile rezultă din interferența care apare în planul focal al lentilei.

Raza de lumină care părăsește sursa la P1 va fi împărțită în două fascicule prin reflexii parțiale de pe placă. Cele două raze parțiale vor ieși sub un unghi θ1 și vor avea o defazare relativă dată de – δ + π, unde δ este dat de Ec. (5,60). Unghiul θ2 poate fi determinat din unghiul θ1 prin aplicarea legii SnelFs.

Cele două fascicule vor intra în Iens făcând un unghi θ1 cu axa sa și henee vor fi reunite în planul focal la o distanță în afara axei x = θɪʃ (în aproximarea cu unghi mic), unde f este lungimea focală a obiectiv.

O altă rază de lumină paralelă cu prima care părăsește sursa într-un punct diferit Pn va fi, de asemenea, împărțită în două raze parțiale.

Deoarece au aceeași valoare a lui $\theta 1$ și a lui $\theta 2$ ca prima rază (din P |), va exista aceeași defazare relativă de – $\delta + \pi$ ca înainte.

Datorită simetriei de rotație în jurul axei lentilei, defazarea va fi o constantă pe un cerc în planul focal, având ca centru axa lentilei. Interferența dintre grinzile parțiale va fi aceeași pe acest cerc. Din Eq.

Fig. 5.17 Ilustrare schematică a configurației pentru observarea franjurilor Haidinger.

(5.59) vedem că interferența constructivă, care produce un inel luminos, va rezulta când δ este un multiplu integral impar al lui π și interferența distructivă, care produce un inel întunecat, va rezulta când <5 este zero sau un multiplu integral par al lui π . Modelul de interferență în planul focal al Iensului constă apoi dintr-o serie de inele concentrice.

Numărul total de multipli de 2π în schimbarea de fază la un anumit punct al modelului este de ordinul m al modelului de interferență. Putem folosi m pentru a indexa modelul scriind <5 = (2m – 1) (nu trebuie să fie un număr întreg), apoi

2n2d .   1

m = —— cos U2 + -

A0 2

(5,61)

Pentru cazul analizat, o valoare integrală a lui m corespunde unei benzi strălucitoare, o valoare semiintegrală unei benzi întunecate. Rețineți că cel mai înalt ordin în modelul de interferență are loc în centru, unde $\theta 2$ – 0 și cos $\theta 2$-l.

Acest număr de ordin maxim este astfel dat de

2n1 d 1

ш =----------1—

max λn 2

(5,62)

Din punct de vedere al acesteia, Ec. (5.61) devine

m =

(5,63)

dacă unghiul $\theta 2$ este mic şi mmax este mare. Pentru $\theta 2$ mic, SnelFs Iaw devine $n1\theta 1 \approx n2\theta 2$, astfel încât să putem scrie

m - mmax

(5,64)

Putem folosi relația θi = x/f pentru a obține expresia Iblowwing care raportează ordinea franjului de raza sa în planul focal al lentilei:

m(x) = Wrnax

i _ 1 (rbx \ 2

2YfW

(5,65)

Acest lucru poate fi rezolvat pentru x în funcție de wmax:

n2/Γ2(wmax - m)Tz2

« 1   mmax

(5,66)

Numărul de franjuri vizibile brighi între x = 0 și x va fi dat de p ≡ mnıax - m. Dacă d este cunoscut, putem determina rnmax din ecuația. (5,62). Aceasta conduce la următoarea expresie pentru raza celei de-a doua franjuri vizibile:

Z(⅛⅛Y'2   (5,67)

p H1 yd J

Din Eq. (5.65) vedem că creșteri egale în m corespund decrementelor egale în x2, iar aria πΔ(x2) închisă între două inele succesive este o constantă pentru d fix. De fapt, putem scrie, din Eq. (5,65),

(\ 2

—ɪ- i Δ(πx2)

n2jJ

Astfel, aria dintre al doilea inel și al (p + l)al-lea inel este independentă de p:

2x ɔ inlf \ 2 1 //Vπ2⅞zςrcλ

Δ(πx) = 2π --- -----≈ π — ——   (5,68)

\ «1 J ^max \ nlJ d

Pe măsură ce d crește, zona dintre franjuri scade, iar franjurile se îmbină între dozator și dozator.

C. Interferometrul Michelson

Interferometrul Michelson este adesea folosit în așa fel încât să prezinte franjuri Haidinger. Acest lucru este prezentat în Fig. 5.18, unde Asemănările dintre interferența cu două fascicule de la o placă dielectrică și interferometrul Michelson sunt accentuate. În primul, diferența OPL este furnizată de reflexii parțiale la interfețele Z1 și I2. Deoarece aceste oglinzi sunt realizate din același material, coeficienții de reflexie care trebuie aplicați câmpurilor optice ale fasciculelor 1 și 2, pe măsură ce se reflectă în oglinzi, vor fi egali. Spre deosebire de aceasta, reflexia de pe interfețele plăcii dielectrice introduce o diferență de fază între cele două fascicule de 180o. Există totuși o asimetrie adăugată la interferometrul Michelson, deoarece fasciculul 1 trece prin divizorul fasciculului de trei ori, iar reflexia fasciculului 2 la separatorul fasciculului este de pe o interfață dielectric-metal. Cu toate acestea, reflexia pentru fasciculul 1 la separatorul fasciculului este în afara unei interfețe aer-metal. Asimetria reflexiilor de separare a fasciculului produce o diferență de fază de $\varphi_2 - \varphi_1$. Prin introducerea unei plăci compensatoare în grinda 1, putem elimina efectul grosimii

(6)

Fig. 5.1 β Demonstrarea asemănării dintre (a) geometria Haidinger și (b) interferometrul Michelson.

divizor de fascicul luminos. Diferența de lungime fizică dintre cele două ramuri va fi atunci singura diferență OPL în problemă. Diferența totală de fază va fi dată de

φ2 - φ1 = + (φ2 _ ς>1)

Unde

δ

4πnd

= —— cos θ λ0

(5,69)

Aici n este indicele de refracție a aerului, A0 lungimea de undă a luminii în vid, d calea optică suplimentară în ramura 2 față de cea din ramura 1 și θ este unghiul cu care

razele de lumină sunt înclinate în raport cu axa interferometrului. Faza δ poate fi variată într-un interval mare prin simpla mișcare a uneia dintre oglinzi și astfel schimbând d.

Sunt necesare câteva modificări pentru a transfera expresiile din secțiunea anterioară la interferometrul Michelson. Acest lucru este deosebit de simplu dacă, așa cum este de obicei cazul, φ2 — φ↑ =0. Atunci S este dat de Ec. (5.25) ca

S(δ) = 4S1 cos2(<5/2) '

Acest model este complementul celui descris în Ec. (5,59). Dacă indexăm modelul cu m, ca înainte, și setăm δ = 2πm, atunci

m = cos θ (5,70)

Z0

În centrul modelului mmax = 2nd/λ0, astfel încât m = mmax eos θ. Din nou, dacă θ este mic, dar spre deosebire de înainte, fără restricții asupra mmax, m ≈ mtnax(l — θ2/2). Ecuațiile (5.65) până la (5.68) sunt transferate direct cu substituția n1 — n2 = n.

Figura 5.19 prezintă distribuția iradierii în modelul Michelson ca a

Fig. 5.19 Distribuția densității de putere în modelul interferometrului Michelson al franjelor în funcție de diferența în lungimea path dintre cele două fascicule. (a) d = lOÂ, (6) d = 102 + 2/8, (c) d = 102 + 2/4, (d) d = IOz + 32/8, (e) d = 102 + 2/2 . Aceasta arată cum franjuri m = 20 se deplasează de la centrul modelului la I mai mare % pe măsură ce d crește.

funcția distanței față de centrul modelului pentru mai multe valori ale lui d. Observați cum se formează franjurile la x = 0 și se deplasează pe măsură ce d crește.

D.   Interferenţa Fizeau

Luați în considerare lumina hionocromatică care cade pe o peliculă dielectrică subțire (Fig. 5.20). Existența efectelor de interferență și iocalizarea lor în spațiu depinde în mod critic de modul în care este observată lumina reflectată (sau transmisă). Să presupunem că ochiul unui observator este focalizat într-un punct P', sau se uită printr-un microscop focalizat în P', iar filmul să fie iluminat de o sursă extinsă. Se consideră un mic element al sursei Pl. Razele de interes sunt atunci cele de la P1 la P1 reflectate de cele două suprafețe ale filmului. Dacă pelicula este foarte subțire în comparație cu distanțele P1A și AP' și dacă suprafețele sunt aproape paralele, rezultatele noastre anterioare pentru diferența de fază pentru cele două raze vor rămâne în continuare, și anume,

φ2 φ1

-4πn2d

Âo

cos θ2 + π

Dintr-o altă parte P11 a sursei va fi o altă pereche de raze care merg spre P'. Pentru aceste raze d și Q2 vor diferi în general suficient de cele pentru razele de la P, astfel încât cele două valori diferite ale defazajului nu vor fi egale. Efectele interferenței nu se vor combina în mod constructiv și, deoarece sunt luate în considerare și alte părți ale sursei, în general nu obținem o interferență netă de vreo semnificație. Noi

Fig. 5.20 Interferență în peliculă subțire de la o sursă extinsă.

trebuie să găsească locuri pe care să se concentreze pentru care diferența de fază este constantă pentru toate părțile observabile ale sursei.

Totuși, dacă P' este aproape de suprafața filmului, perechile de raze de la Pi și P11 vor avea practic aceleași valori ale lui d. Ei vor avea valori diferite pentru schimbarea de fază pentru o peliculă subțire numai dacă valorile lor cos Q2 diferă considerabil, cu condiția ca d să nu fie foarte mare. Variația cosului Q2 poate fi redusă de unul sau ambele dispozitive următoare: (1) Dacă ochiul sau instrumentul optic focalizat pe film are o pupila de intrare mică, toate razele care pot trece de la sursa P' off filmul prin pupilă va avea aproximativ aceeași valoare a Q2. (2) Dacă franjurile sunt observate la o incidență aproape normală Q2 = 0, cos Q2 va fi aproape unitar chiar dacă există o răspândire moderată a valorilor Q2 despre Q2 = O. Deoarece trebuie să ne concentrăm pe (sau foarte aproape) filmul. pentru a vedea aceste franjuri Fizeau, se spune că sunt „Iocalizate în film”.

Pe măsură ce ochiul sau microscopul de observare se deplasează pe suprafața filmului, cos Q2 nu se modifică rapid, în special aproape de incidența normală, iar ordinea m a franjurilor va depinde în principal de d. Franjurile pot fi .considerate a fi Iocii de grosime constantă a filmului optic. Observăm o „hartă de contur” a secțiunii transversale a filmului.

Figura 5.21 ilustrează acest efect pentru o pană de aer între două plăci. Placa superioară este o fiat optic, iar placa inferioară poate fi o probă care trebuie testată. Dacă ambele piese sunt foarte fíat, se observă o serie de benzi drepte echidistante. Între o franjuri și următoarea, grosimea penei trebuie să se modifice cu Â/2 (pentru o direcție de observare aproape perpendiculară). Henee, dacă a este unghiul panei, avem următoarea relație pentru separarea transversală w între franjuri:

λ

αw = - (5,71)

Aici λ = λ0/n2 reprezintă lungimea de undă în mijlocul panei. Dacă aer, n2 = 1.

Fig. 5.21 Franjuri Fizeau într-o pană de aer.

Fig. 5.22 Configurarea pentru observarea inelelor lui Newton.

În regiunea cu o ușoară depresiune în placa inferioară, grosimea golului va crește. Franjurile vor fi convexe spre punctul de contact dintre plăci, așa cum se arată în Fig. 5.21.

Un exemplu faimos de franjuri Fizeau apare atunci când o suprafață sferică concavă este plasată pe un fiat optic. Când privim de sus cu iluminare monocromatică, vedem o serie de inele concentrice (inele lui Newton) în jurul unui punct întunecat central (Fig. 5.22). Pentru al-lea inel întunecat din centru, golul are o grosime de

я λ

$d_m = m-$

Dar d poate fi aproximat prin analiza triunghiului dreptunghic.

$R2 = X2 + (R - d)2 = X2 + R2 - 2Rd + d2$

$0 - X2 - 2Rd + d2 \approx X2 - 2Rd$

asa de

2R

Astfel, dm – x„/2R, iar raza celui de-al al-lea inel întunecat va fi dată de

y/mλR

(5,72)

5.4 Interferență cu multiple deam: interfețe paralele

A. Formalismul matriceal

Dorim acum să tratăm în detaliu reflexiile multiple neglijate în secțiunea 5.3. Ele vor fi importante în practică atunci când reflectivitățile interfețelor sunt mari. Efectul poate fi studiat prin „argintirea” parțială a suprafețelor unei plăci dielectrice paralele plane sau a oglinzilor unui etalon Fabry-Perot (un interferometru în care

„slab” este într-adevăr un gol de aer). „Silvering” poate fi un strat metalic sau poate fi un strat dielectric multistrat.

Este posibil să urmăriți în mod explicit calea fiecărei raze atunci când au loc reflexii multiple dacă placa este un singur strat, așa cum se arată în Fig. 5.23. Rezultatul este suprapunerea tuturor componentelor, fiecare dintre acestea fiind defazată față de celelalte prin multipli ai aceluiași factor și fiecare dintre acestea fiind

atenuată de produsul corespunzător al coeficienților de reflexie și transmisie. Această abordare devine în curând greoaie când sunt prezenți mai mult de un strat. Dezvoltăm aici un formalism mai general care poate fi folosit pentru a specifica reflectanța și transmisia unui stivă având orice număr de straturi. Tehnica nu se limitează la dielectricii la incidență normală, deși mai târziu vom demonstra mai multe concepte în aceste circumstanțe.

Luați în considerare configurația multistrat prezentată în Fig. 5.24. Lumina este incidentă pe sistem de la stânga la dreapta. În cadrul stivei, două straturi adiacente arbitrare sunt i și j. În orice strat, inclusiv mediul de delimitare, câmpul optic total, în general, constă din două Componente, Erj care se deplasează la dreapta și Eej se deplasează spre stânga. Fiecare strat are două laturi. Vom distinge între câmpurile din partea stângă (notație neprimată) și partea dreaptă (notație amorsă). Astfel, Erj este câmpul din partea stângă a stratului j care este asociat cu unda care se deplasează spre dreapta în stratul j și Eri este câmpul undei din partea dreaptă a stratului i.

În traversarea unei interfețe date folosim reflexia și transmisia

„i

Mediu incident

nN

Mediu final

Fig. 5.24 Notație pentru metoda matriceală a opticii cu reflexie multiplă, medii multiple.

coeficienții pij și τij. Aici primul indice se referă la mediul de început, al doilea la mediul final. Examinând Fig. 5.25 putem nota relațiile dintre câmpurile de pe ambele părți ale interfeței. De exemplu, Erj este suma porțiunii transmise a lui E'ri și a părții reflectate a lui E(j.

Erj — Eriτu + EfJpJi (5.73a)

Într-o manieră similară găsim

E^i - Efjτji + Eri Pu(5.73b)

Folosim Eq. (5.73a) pentru a elimina Eri din Ec. (5.73b)

— Efj τjiτij PjiPij xu+ Erj^ T-(5,74)

Primul termen din această expresie poate fi simplificat printr-o aplicare a relațiilor de simetrie derivate din ecuațiile Fresnel din Capitolul 2 [Ec. (2.71) Pu = -pij și Ec. (2.72) τjiτij + (pij)2 = 1]. Ecuațiile (5.73a) și (5.74) devin apoi

Stratul i

Layerj

» r,j

(5.75a)

(5.75b)

Fig. 5.25 Notație pentru undele care se deplasează spre dreapta și spre stânga de fiecare parte a unei interfețe dintre straturile i și j.

Ecuațiile (5.75) sunt ecuații liniare cuplate care ne spun care sunt câmpurile de pe partea stângă a interfeței dintre straturile i și j în termeni de câmpurile de pe partea dreaptă a interfeței.

Este convenabil să se definească un formalism de matrice care reprezintă ecuațiile. (5,75). Vom descoperi că propagarea pe un strat poate fi gestionată și în cadrul tehnicii matricei. Avantajul acestei abordări este că prin multiplicarea matricei putem modela efectul optic al unei stive multistrat cu relativă ușurință.

Mai întâi trebuie să identificăm matrice de coloane care conțin câmpul Componente într-un anumit punct al stivei. Lăsa

(5.76a)

fi asociate cu câmpurile din partea stângă a stratului j și

(5.76b)

reprezintă câmpurile din partea dreaptă a stratului j. Definim acum matricea de tranziție a interfeței

H,j ≡- (' *,,j)

τij \ Pij 1 /

(5-77)

Cu această colecție de matrici, Ecs. (5.75) deveni

EJ = H0Ey (5,78)

În traversarea unui strat dat din partea stângă în partea dreaptă se introduce un factor de fază $e^{i\beta_j}$ unde

(5-79)

2π

Pj ≡ T nidj cos θj ʌo

Aceasta rezultă din diferența de lungime dintre căile optice din Iayerj și mediul incident sau final. Pentru cazul unui strat (Fig. 5.23)

„ 2π –   – 2π ––

β = — (n2BC - n1BD) = — (n2BC - n3CE) ^o ⅞

Aceasta poate fi exprimată ca

(5,80)

E'rj = Erje iβj (5.81a)

De asemenea, pentru propagarea din partea dreaptă a unui strat în partea din stânga a aceluiași strat

Eιl = E',je~^ Dacă definim o matrice de propagare layer

Lj≡Λ""

j \ 0

(5.81b)

0

eiβj

(5,82)

apoi ecuațiile. (5.81) se poate scrie în notație matriceală ca

E7 = L7E} (5,83)

Aceasta ne spune care sunt câmpurile de pe partea stângă a unei zone de strat în termeni de cele de pe partea dreaptă a stratului.

În cele din urmă, identificăm o condiție limită importantă. În mediul final nu poate exista o propagare luminoasă spre stânga. Prin urmare,

En = f ∫) (5,84)

\ •c'γn/

Începând cu matricea câmpului în mediul final, putem aplica matricea de tranziție a interfeței pentru a determina matricea câmpului la partea incidentă a ultimei interfețe,

En- i = Hn- i,nEn

În partea stângă a mijlocului N — 1 vom avea

En-i — 1•jv~1En-1 (5.85)

unde Ec. (5.83) a fost folosit pentru a propaga câmpurile de-a lungul stratului Pentru a transforma exemplul în mediu N — 2 folosim din nou matricea de tranziție a interfeței.

En —2 = Hn-2,n-iEjv-i

~ Hn-2,ni | •n-iHjv-i,nEjv   (5.86)

În mod similar, continuăm până ajungem la mediul incident. Combinația de matrice care reprezintă întreaga stivă multistrat este

∏12 | -2 • • • | -jv-iHn-1,n ≡ Sljv = f 1(5.87)

\ d21 d22/

Relațiile dintre câmpurile din mediul incident (1) și mediul final (N) sunt apoi exprimate prin:

E'i = SljvEjv   (5,88)

Matricea stivă Sljv conîaine combina<! efectul tuturor straturilor inclusiv multiple refecții. Putem construi întotdeauna Sljv pentru orice număr de Iayers dacă cunoaștem indivizii βj, τij și pij. Dacă algebra scapă de sub control, putem programa un computer pentru a face înmulțirile matriceale cerute în Ec. (5,87). Odată ce matricea stivei este determinată, putem găsi cu ușurință relația dintre câmpurile de pe ambele părți ale stivei.

Metoda matriceală care este dezvoltată în acest capitol este utilizată pentru a determina rapoartele intensității câmpului. Traiectoriile razelor sunt tratate prin formalismul matriceal prezentat în Capitolul 3. Cele două tehnici sunt strâns legate. Ambele se bazează pe procesarea secvențială a informațiilor optice prin întâlniri cu o colecție de elemente. Cu toate acestea, cele două tehnici nu ar fi potrivite pentru a fi utilizate pe același

problemă. Este important să recunoaștem că matricea stivă multistrat implică manipularea fazelor câmpurilor optice în straturi cu laturi paralele, în timp ce matricele din Capitolul 3 se ocupă de geometria razelor și a interfețelor sferice. Solicităm aici ca coerența să fie menținută prin grosimea totală a stivei multistrat. Prin urmare, cel mai bine este să ne limităm metoda stivei la analiza situațiilor de peliculă subțire.

Coeficienții de reflexie și transmisie pentru stiva de ventilare derivați prin utilizarea condițiilor la limită ale ecuației. (5,84) în Ec. (5,88)

\ _ /S11 S12 \ / 0 \ / \ 521 S22J \ E,nJ _ /S12ErjvX \ S22 ErjvJ
Prin urmare,   Ez1 S12 P ≡ ~r =(5,89) -εrl^22
iar   Erfl 1 τ = ~ = v~(5,90) -εrl322

Reflectanța R și transmitanța T sunt formate din acestea ca în capitolul 2.

R = IpI2   (5,91)

T= nN cos

nl cos θl

(5,92)

B. Placă dielectrică unică

Revenind la situația din Fig. 5.23, un strat de indice n2 Intercalat între medii de indice n1, ni și n2 ambele reale, recunoaștem că matricea stivei va fi

S = H12L2H21 (5,93)

Din Eq. (5.77), matricele de tranziție ale interfeței sunt

H12 = -W1 p1i2 \ H21 = Ip M τι2 \ Pι2 1 J τ2ι \ P21 1 /

iar din Ec. (5.82), matricea de propagare a stratului este

κ

0\

W

Unde

o 2π ,

p = — n2d cos θ2 λ0

Înlocuind acestea în Ec. (5.93) randamente

s =____ɪ___P iβ + eiβρ12ρ21 e iβρ21 + eiβp12 \

*12*12 \ e~'βP12 + eiβP2ι e~iβPl2P21 + ^iβJ din care rezultă direct coeficienții de reflexie și transmisie.

S12 _ P12(eιg - e~iβ)e~iβ

PS

û22

și

1 - PÌ2 ε i2β

*12*21 g ÌP

l-p2i2e~i2β

(5,95)

Reflectanța și transmitanța pentru un singur strat dielectric sunt atunci

R = IpI2 =

4 | p1212 sin2 β

\ l-p2i2e~i2β \ 2

(5,96)

și

2_______ | τ12τ2112

^ Jl -p212e~i2β \ 2

(5,97)

Dacă placa este acoperită cu o peliculă subțire de metal pe ambele părți pentru a îmbunătăți reflexiile multiple, atunci ar trebui să tratăm aceste filme ca două straturi suplimentare. Cu toate acestea, putem lua o comandă rapidă care va păstra forma ecuațiilor. 5,96 și 5,97. Recunoaștem că influența învelișului metalic va fi introducerea unor schimbări de absorbție și modificări suplimentare de fază. De aceea scriem

P12 = Po eiγ

unde p0 este real și pozitiv și unde y este un unghi real care reprezintă schimbarea de fază a undei la reflexie la interfața 1-2. Numitorul din Ec. (5.97) devine apoi

11 - P?2 e~i2β \ 2 = (1 - Po e~if2β~2γi)(l - p20 eii2β~2γ'>) '

— 1 + Pq — 2pθ cos δ (5,98)

Aici δ ≡ 2β — 2γ reprezintă diferența totală de fază între fasciculele succesive din secvența reflexiilor multiple. O parte din această schimbare rezultă din propagare (2β), o parte din reflexie (2y).

Este convenabil să introduceți reflectanța și transmisia pentru o singură interacțiune cu interfața 1-2:

Rι≡ | Pi2 | 2 = P^ (5•99)

și

T1 ≡ 1*12*211 (5.100)

În general, conservarea energiei necesită

Ri + T1 = 1 - A1

(5.101)

unde A_1 este absorbția interfeței. Acest lucru este necesar din cauza posibilității de absorbție în stratul metalic. Folosind ecuațiile. (5.98) până la (5.101) în Ec. 5.97 Ieads la o simplă resuit.

T21

1 + — 2K1 cos δ

(5,102)

Transmisia maximă are loc unde cos δ — 1. Transmitanța este atunci

T

*max

T21 = Γ1 _ A1 Ț (I-K1)2 L l-*i_

(5,103)

Pentru interfețele dielectrice A_1 — 0, deci $T_{max} = 1$. Totuși, în aceste condiții R_1 ar fi mic. Atunci când acesta este cazul, transmisia minimă este încă destul de mare. Minimul apare atunci când cos δ = — 1.

p = (I-K1)2

min j-(1+λj2

(5,104)

Pentru a reduce T_{min} și astfel pentru a obține un contrast ridicat în modelul de interferență, avem nevoie de $K_1 \approx 1$. În acest caz, T rămâne mic, cu excepția cazului în care <5 este aproape de 2πm, unde m este un număr întreg. Putem arăta acest lucru cel mai ușor după câteva rescriere:

Ț= Ț α ~ Kl)2 _ ________________Tnax_____________

max 1 - 2K1 cos δ + K2 1 + K2 - 2K1 + 2K1 - 2K1 cos <5

1 + K2 - 2K1

T

________ max______

2K1(1 — cos <5)

+ (ɪ - Ri)2

Acum folosiți 1 — cos δ = 2 sin2 <5/2. Atunci putem scrie

4K1 sin2(<5/2)I Tmax

ɪ- r1)2 J=τττ⅛) (5I05) unde

,.   4K1

f = (Γ^r17 <5•1°6>

se numeste contrast. Ecuația (5.105) este cunoscută ca formula Airy.

Când δ = π + 2πm, sin(<5/2) este egal cu +1, iar T este egal cu ‰in. Minimele sunt la jumătatea distanței dintre maxime. Astfel avem

T *min

*max

1 + F

sau

* max 4 . τ~, t~=i + f λ min

(5,107)

Acest raport poate fi destul de mare atunci când F este mare, ceea ce la rândul său va fi cazul dacă R1 este aproape de 1. De exemplu, luăm R1 = 0,9. Atunci F = 3,6(1 = 0,9)2 = 3,6/0,01 = 360. Dacă F > 1, putem deriva expresii aproximative pentru T când <5 este aproape de 2πm unde m este un număr întreg, adică aproape de un maxim în T . Putem scrie

(5,108)

Atunci noi avem

_______ max______ % _________imax________ _ ɪ,
____________ɪ/ɪ__________ ,, ɪθm

1 + F sin2(<5/2) 1 ÷ F(δ/2 — mπ)2 max 1/F + (¿/2 — mπ)2

Această aproximare este valabilă atâta timp cât

<5

- — mπ

2

< 1

Dependența funcțională de <5 în ultima egalitate a ecuației. (5.109) se numește lorentzian.

Lățimea completă la jumătatea maximului W este de două ori mai mare decât valoarea lui δ — 2πm la care T = TmaJ2. Acest lucru se va întâmpla când

(5.110)

Fig. 5.27 Diagrame fazorice care arată originea contrastului ridicat în interferența cu reflexie multiplă atunci când F este mare.

Prin urmare

W=   -R,)pentru R, aproape) (5.111)

√F √K.

Figura 5.26 arată cum arată curba de transmisie pentru F ridicat și Iow.

Motivul pentru care există mult mai mult contrast atunci când R1 este aproape de unitate decât pentru R1 mic poate fi văzut din diagramele fazorice din Fig. 5.27. Ele arată grafic adunarea complexă tratată analitic prin metoda matricei. Când R1 ≈ 1, multe componente mici se adaugă pentru a forma câmpul rezultat.

Când sunt în fază, toți fazorii se aliniază, dând un rezultat mare. Când δ, diferența relativă de fază, nu este egală cu un multiplu integral de 2π, contribuțiile individuale se află pe un poligon care aproape se închide, dând un rezultat mic. (Ne vom ocupa de diagrame fazori similare atunci când discutăm despre difracție.) Când R1 este mic, fazorii componente scad rapid în dimensiune, iar câmpul rezultat variază doar puțin cu δ.

Efectul interferenței cu fascicule multiple aici este calitativ același ca și în cazul rețelei. Modelul devine concentrat lângă δ = 2πm. Ecuația (5.25) descrie modelul de interferență cu două fascicule atât pentru iradierea în geometria fantei lui Young, cât și pentru transmisia plăcii de reflectivitate Iow. Pe măsură ce mai multe fascicule intră în determinarea tiparelor de interferență, rezultatele sunt descrise de Eq. (5.44) pentru geometria cu fante multiple și prin Ec. (5.105) pentru placa cu reflectivitate mare.

Straturi parțial arginte

Fig. 5.20 Interferometru Fabry-Perot.

C.   Interferometru Fabry-Perot

Elementele de bază ale unui interferometru Fabry-Perot sunt indicate în Fig. 5.28. Îl folosim adesea în operațiuni vizuale, privind prin el la o sursă difuză. Aceasta produce franjuri destul de asemănătoare cu franjuri circulare Haidinger discutate mai devreme, dar acum transmisia T în franjuri nu este o funcție sinusoidală a lui δ, ci arată maximele ascuțite cu minimele largi din Fig. 5.26. Diferența de fază dintre contribuțiile din reflecțiile multiple succesive este

$\cos\theta - 2y$ (5,112)

unde n, d și θ sunt măsurate în decalajul dintre plăci. Condiția pentru o interferență maximă este

n 4πnd

11 = V"

$4\pi nd \cos\theta = 2\pi m\lambda 0$ (5,113)

unde y în Ec. (5.112) a fost neglijat deoarece este, în cele mai multe cazuri, mult mai mic decât d/λ0.

Selectivitatea lungimii de undă a interferometrului Fabry-Perot poate fi văzută dintr-o examinare a Eq. (5.113). Pentru un ordin dat, m contribuții la lungime de undă mai mare dau naștere la maxime de inel care se găsesc la valori mai mici ale lui θ.

Dacă două lungimi de undă, λi și λj = Zi + ΔZ, sunt prezente, vedem o suprapunere a modelelor de transmisie pentru fiecare lungime de undă separat. Cu condiția ca ΔZ să fie mic, cele două inele sunt separate în ordinea a m-a prin

$\Delta(<5\Lambda) = \Delta(4\pi nd \cos\theta) = 2\pi m\, \Delta Z$ (5.114)

Ca și în tratamentul nostru al grătarului, suntem interesați de dimensiunea minimă a ΔZ care poate fi detectată. Aici adoptăm drept criteriu de rezoluție următorul: Dacă două Componente λl și λj sunt de iradiere egală, atunci le definim ca fiind doar rezolvabile dacă valorile lor de vârf sunt separate de o cantitate egală cu lățimea completă la jumătatea maximă a fiecărui vârf. Separarea vârfurilor corespunde unei schimbări de fază

----------►

V 4πnd cos θ

Rg. 5.22 Ilustrarea criteriului nostru de rezolvare a determinării puterii.

de W. Acest lucru este ilustrat în Fig. 5.29. Ca o funcție a 4πnd cos θ, separarea vârfurilor este

$\Delta(\delta\lambda)=W\lambda$ (5,115)

unde λ este fie λi, fie λj. Prin utilizarea Eq. (5.111) cu Ecs. (5.115) și (5.116), puterea de rezoluție se găsește a fi

1 π /~F

= (5,116)

ΔZ 2

Aceasta trebuie comparată cu puterea de rezoluție a rețelei, Eq. (5.52), care sa dovedit a fi de obicei în jur de 120.000. Cu o reflectivitate, R1, de 0,95 factorul în fața lui m în Eq. (5.116) este aproximativ 63. Marea diferență dintre Ec. (5.52) și (5.116) este că ordinul m care este relevant pentru instrumentul Fabry-Perot este foarte mare. Pentru Z — 600 nm și o separare a plăcilor de 3 mm puterea de rezoluție a interferometrului Fabry-Perot este aproape de 6,1 × 105.

Acum apar complicații. Așa cum este ilustrat în Fig. 5.30, poate fi dificil să teii dacă maximele A și B sunt două vârfuri de ordinul al al-lea sau dacă A aparține ordinului al-lea și B al ordinului (m + l)-lea. Dacă λj depășește λi cu o anumită cantitate, AZfsr, numită domeniul spectral liber, marginea de ordinul al m-lea pentru Zj(A) va cădea deasupra marginii de ordinul al treilea (m + l) pentru Zi(B).

În acest caz avem

(m + l)Zi = mλj

Acum se calculează λj = Zi + AZ și se rezolvă intervalul special liber ΔZfsr:

(m + l)Zi = m(Zi + ΔZfsr); Zi = m ΔZfsr; ΔZfsr = -

m

Astfel, dacă lucrăm în ordine mare (m mare), ceea ce înseamnă de obicei că d separarea plăcilor este mare, trebuie să folosim lungimi de undă destul de apropiate pentru a evita confuzia comenzilor. De fapt, pentru a evita orice confuzie, ar trebui să avem (Z7 — Zi) < ΔZfsr/2. Dispersia preliminară cu o prismă sau un monocromator cu rețea poate fi utilizată pentru a elimina lungimile de undă nedorite.

Raportul ΔZfsr/ΔZ dintre intervalul spectral liber (sau separarea marginilor) la

Fig. 5.S0 Model de transmisie Fabry-Perot când sunt prezente două lungimi de undă aproape egale.

Separarea lungimii de undă minimă rezolvabilă se numește finețe ¡F. Deoarece Δzfsr — λ/m, obținem

πy/F π

2 ≈ 1-F \

(5.117)

unde prima aproximare este valabilă când R1 este aproape de unitate.

5.5 Aplicații ale interferenței

Multe tehnici puternice au fost dezvoltate folosind principiile interferenței pe care le-am acoperit acum. Mai multe exemple sunt discutate în această secțiune. Cu toate acestea, pentru o înțelegere completă a multor aplicații avansate ale interferenței în optica fizică, este necesară o cunoaștere de lucru a analizei Fourier și a teoriei coerenței. Acestea vor fi prezentate în capitolele 6 și 8.

A. Interferometrie

Dispozitivele pot fi construite pentru a măsura mici modificări ale distanței, indicelui de refracție sau lungimii de undă prin compararea diferențelor relative de fază între două sau mai multe fascicule prin modificări ale unui model de interferență. Am văzut deja cum interferența cu mai multe fascicule duce la caracteristicile dispersive în rețea [Eq. (5,49)]

și interferometrul Fabry-Perot [Eq. (5.114)]. Am discutat, de asemenea, despre modul în care interferența Fizeau poate fi utilizată pentru a monitoriza modificările grosimii unui film [Eq. (5.71)].

1. Microtopografie de suprafață. Topografia suprafeței poate fi evaluată folosind interferența Fizeau într-o configurație similară cu Fig. 5.21. Suprafața investigată este elementul inferior al unei pane cu două plăci. Elementul superior trebuie să fie un fiat optic. Pentru o utilizare maximă, trebuie furnizate elemente optice care să focalizeze suprafața de testare în același plan cu franjele de interferență. Dacă caracteristicile apar la scară mică, atunci este necesar un microscop. Un proiect schematic este ilustrat în Fig. 5.31.

De obicei, contrastul este mărit prin acoperirea atât a stratului optic cât și a suprafeței de testare cu straturi metalice parțial transmisibile. O aplicație comună este măsurarea grosimii unui film evaporat. Figura 5.32a prezintă configurația unui eșantion fiat și modelul de interferență rezultat. Dacă jumătate din

Model cu franjuri

Decalaj mic

-••.•^⅛. ,.-,-WHÎS'ÎIÏÏL-.;·,-

Geometrie

Decalaj mare

... .,-,.λ~ .■

(6)

Fig. 5.S2 Determinarea grosimii peliculei prin interferență Fizeau.

eșantionul constă dintr-o peliculă de testare care reduce efectiv decalajul dintre plăci, apoi în imaginea eșantionului franjele corespunzând unui ordin dat de interferență se vor deplasa în regiunea de tranziție pentru a indica contururile grosimii decalajului constant. Acest lucru este prezentat în Fig. 5.32b.

Ecuația (5.71) ne spune că modificarea grosimii golului este asociată cu o separare a franjurilor (adică înălțimea verticală dintre finele de contur)

$h = aw = m$ (5,118)

Decalajul scade cu

$\Delta h = \alpha \Delta w$ (5,119)

pe măsură ce se traversează regiunea de tranziție până treapta până la filmul de testare. În combinarea acestora

două ecuații, ajungem la o expresie calibrată intern pentru grosimea filmului de testare,

$\Delta \frac{1}{8} = (-V$ (5,120)

yw J 2

În aplicația sa cea mai rafinată, microtopografia de suprafață este capabilă să identifice pași de numai câteva straturi atomice groase.

2. Testarea elementelor optice. În timp ce metoda Fizeau este utilă pentru măsurarea neregularităților de suprafață, o evaluare mai adecvată pentru Iense și prisme ar trebui să implice un test al căii optice prin element. Interferometrul Michelson poate fi modificat pentru a fi utilizat cu lumină colimată pentru a efectua un astfel de test. Instrumentul rezultat, interferometrul Twyman-Green, este prezentat în Fig. 5.33. The

Fig. 5.33 Diagrama schematică a interferometrului Twyman-Green utilizat ca instrument de testare a lentilelor.

ramura de referință care se reflectă pe I2 furnizează o undă plană care interferează cu frontul de undă care vine de la ramura de testare. Fasciculul de testare trebuie să treacă prin elementul de testare către o oglindă a cărei lungime focală se potrivește cu cea a elementului de testare (la testarea unei prisme aceasta devine o oglindă pianică).

Dacă elementul este perfect, fasciculul care revine va fi din nou o undă piană după ce a trecut prin elementul de testare a doua oară.

Fasciculele interferente sunt colectate de un Iens și evaluate cu ochi, electronic sau fotografic. Un câmp iluminat uniform este observat în imaginea unui element de testare perfect. Dacă este prezentă o imperfecțiune, lungimea traiectoriei optice a razelor care trec prin acea regiune a elementului va provoca franjuri iocalizate în imagine care reprezintă contururi constante ale lungimii traseului optic.

Pentru a determina dacă contururile înconjoară o regiune groasă optic sau o regiune subțire optic, oglinda sferică din ramura de testare poate fi mișcată ușor astfel încât să mărească lungimea traseului optic în acea ramură. Contururile se vor îndepărta de regiunile din imagine asociate cu întârzierea adăugată de către elementul de testare. Dacă contururile se deschid, atunci regiunea închisă este mai densă optic decât regiunile înconjurătoare.

Această schemă este deosebit de convenabilă în timpul șlefuirii finale a unei suprafețe optice. Vopseaua de identificare poate fi aplicată pe elementul de testare exact în locația care necesită lucrări suplimentare, observând imaginea aplicatorului de vopsea suprapusă pe modelul de interferență și pe imaginea lentilei. O hartă topografică interpretată de computer poate fi produsă dacă modelul de interferență este înregistrat și digitizat fotometric.

3. Măsurarea densității gazului. Pentru a obține Aexibility peste configurația Michelson, căile de întoarcere de la I1 și I2 pot fi separate, așa cum se arată în Fig. 5.34. În acest interferometru Mach-Zehnder, este necesar un divizor suplimentar de fascicul pentru a combina fasciculele. Rotind ușor J1, cele două fascicule interferente pot fi făcute să pară să se încrucișeze într-un punct de-a lungul uneia dintre ramuri. Deoarece fronturile de undă în aceste circumstanțe sunt înclinate unul față de celălalt, modelul de interferență este o serie de franjuri liniare. Modelul este Iocalizat în regiunea în care

Fig. 5.34 Diagrama schematică a interferometrului Mach-Zehnder.

grinzile par să se încrucișeze. Dacă un Iens este configurat astfel încât să producă o imagine a acelei regiuni pe un ecran sau un detector, atunci modelul de interferență va fi, de asemenea, focalizat în același plan cu imaginea.

Interferometrul Mach-Zehnder este folosit în mod obișnuit pentru a studia fluxul în jurul obstacolelor din tunelurile de vânt și în alte aplicații similare. Acest lucru este posibil deoarece indicele de refracție în multe circumstanțe este proporțional cu densitatea gazului. Camera de testare este amplasată în ramura interferometrului din regiunea în care sunt iocalizate franjuri. O cameră de referință este utilizată în cealaltă ramură pentru a egaliza căile optice. Franjele de interferență reprezintă diferența totală în lungimea căii optice dintre cele două ramuri. Când densitatea gazului se modifică ca urmare a compresiei localizate, franjurile sunt modificate astfel încât

să urmeze contururile de lungime constantă a căii optice în jurul obiectului testat.

B. Spectroscopie

Caracteristicile dispersive ale rețelei de difracție sunt cel mai frecvent exploatate pentru a produce lumină monocromatică pentru experimente analitice. Elementele principale ale unui astfel de dispozitiv sunt ilustrate în Fig. 5.35. Acestea constau dintr-o fantă de intrare pe care este focalizată sursa policromatică, o oglindă de colimare care creează un fascicul paralel, grătarul, o oglindă de focalizare care formează o imagine monocromatică a fantei de intrare pe planul fantei de ieșire și fanta de ieșire care permite să treacă doar o parte din spectrul dispersat. Cantitatea de lumină pe care monocromatorul este capabil să o furnizeze depinde de mărimea fantelor și de unghiul solid subtins de grătarul de la fante. În plus, majoritatea grătarelor sunt aprinse pentru a îmbunătăți eficiența într-o ordine dată a modelului de interferență. Blazingul este produs prin controlul conturului profilelor individuale ale canelurilor de grătar. Vom studia acest lucru mai detaliat după ce conceptele de difracție au fost prezentate (Capitolul 6).

1. Gratare plane. Pe lângă dispersia unghiulară și rezoluția, despre care am discutat deja, dispersia liniară este o măsură importantă a performanței unui monocromator cu rețea. Ecuația (5.49) oferă dispersia unghiulară care este legată de dispersia Ilineară prin dx'/dθ' =f unde x' este deplasarea liniară în planul fantei de ieșire și f este lungimea focală a oglinzii de focalizare. Aceasta înseamnă

dx' dx' dθ' fm

dλ = dθ'lλ = a~ (5Л21)

Acest lucru demonstrează avantajul monocromatoarelor cu lungimi focale lungi. Cu toate acestea, un dispozitiv de înaltă rezoluție cu o lungime focală mare este de obicei asociat cu o transmisie scăzută, deoarece unghiul solid subtins de grătarul de la fante este mic.

Cele mai multe tehnici de montare folosesc lungimi de cale egale pentru ramurile de intrare și de ieșire. Un sistem popular este ilustrat în Fig. 5.35, configurația Czerny-Turner. Oglinzile de colimare și de focalizare sunt ambele utilizate pe axa if. The

5.5 Aplicații de interferență 313

π Avansul în lungime de undă

Vedere de sus

Fig. 5.35 Hionocromatorul Czerny-Turner în configurația în afara axei. λ = (const) × sin θg.

unghiurile de pe aceste oglinzi pot fi aranjate astfel încât coma rezultată din cele două reflexii să fie la fanta de ieșire. Aberația sferică și astigmatismul sunt totuși prezente. Aceste defecțiuni pot fi

parțial compensate prin utilizarea fantelor curbate sau a oglinzilor parabolice în afara axei în loc de oglinzi sferice.

De obicei, fantele sunt fixe, iar grătarul se rotește în jurul unei axe paralele cu fante. Putem scrie $\theta' = \alpha/2 + \theta g$ și $\theta = \alpha/2 - \theta g$, așa cum se arată în Fig. 5.35. Când acestea sunt utilizate în Ec. (5.48), găsim relația dintre unghiul rețelei (θg) și lungimea de undă selectată,

$$\lambda = - 2 \cos - \sin \theta g \; m \; 2$$

(5.122)

Acest lucru este convenabil, deoarece este ușor să proiectați un dispozitiv mecanic pentru a schimba sin θg într-un mod liniar.

răzătoare

Fig. 5.56 Geometria grătarului concav. Fanta de intrare este la P0, imaginile fantei disperse apar pe cercul Rowland, adică la P'.

2. Gratare concave. Fiecare dintre elementele optice dintr-un hionocromator introduce o mică atenuare a debitului de radiație al instrumentului. Acest lucru poate fi foarte semnificativ, în special în ultravioletele îndepărtate, unde reflectanțele sunt mici. În plus, dacă elementele au particule de praf pe ele, radiația împrăștiată care rezultă dă naștere la lumină în interiorul monocromatorului care se propagă în direcția greșită. Acest lucru duce la atingerea fantei de ieșire a unei lungimi de undă greșite.

Pentru a reduce aceste probleme, monocromatorul poate fi construit cu un grătar concav care este proiectat să imagineze fanta de intrare pe fanta de ieșire, dispersând în același timp lumina în lungimile de undă componente. Acest lucru elimină mai multe elemente optice și îmbunătățește foarte mult eficiența monocromatorului.

O tehnică comună de montare pentru grătare concave se bazează pe cercul Rowland. Principiul este ilustrat în Fig. 5.36. Aici raza de curbură a rețelei este R cu șanțurile rețelei perpendiculare pe planul figurii. Cercul Rowland identifică locațiile corecte ale fantei de intrare (P0) și ale fantei de ieșire (P'). Dacă P0 este oriunde pe cercul al cărui diametru este egal cu R și care intră în contact cu centrul rețelei la 0 așa cum se arată, atunci fasciculul specular și fasciculul dispersat în toate ordinele vor fi focalizate în alte puncte ale aceluiași cerc.

Pentru a demonstra acest lucru luăm în considerare Fig. 5.37, care se concentrează pe geometria esențială. Vom arăta că P0 și P' satisfac ecuația rețelei dacă se află pe cercul Rowland.

Originea coordonatelor este la 0(0,0), astfel încât P0(x0, z0) și P'(x',z') sunt identificate

de

$$X0 = - r \sin \theta \quad z0 = r \cos \theta$$

X! — r' sin θ'   z' = r, cos θ'

(5.123)

Fig. 5.57 Geometria rețelei concave pentru 0 în centrul rețelei.

De-a lungul rețelei identificăm și poziția P(x, z) prezentată în Fig. 5.38. Arcul OP este necesar să conțină un număr integrat de caneluri care este (dacă lungimea arcului este mică în comparație cu R) aproximativ x/a, unde a este distanța dintre caneluri. Dacă P' trebuie să fie la un maxim de interferență, atunci fiecare canelura contribuie cu un fascicul a cărui lungime a căii optice I, măsurată din P0, diferă de contribuțiile datorate canelurilor adiacente cu un factor de mλ (pentru dispersia în ordinea ni). Diferența totală de lungime a căii optice între contribuțiile de la 0 și P este

P0OP' - PqPP, = mλx/a (5,124)

Fig. 5.5β P o distanță ma de la 0.

Unde

P0 OP' = r + r,

și

P0PP' = [(χ0 - χ)2 + (Z0 - z)2]ιz2 + [(x' - x)2 + (z' - z)2]ιz2 (5.125)

Acum z este foarte mic în comparație cu celelalte dimensiuni din exemplu, deci Eq. (5.125) poate fi aproximat prin

P0PP' ≈ [x¿ + z20 - 2(xx0 + zz0) + X2J1/2 + [x'2 + Zz2 - 2(xx' + zz') + x2J

Acest lucru poate fi simplificat și mai mult prin utilizarea aproximării noastre standard pentru curbura unei suprafețe sferice [vezi discuția înainte de Ec. (5.72)],

$z \approx x^2/2R$

Înlocuind aceasta în Ec. (5.126) împreună cu Eq. (5.123) Înțeleg să

1/2

(5.126)

P0PP'

Γ   χ2 ^

r2 — 2 x(— r sin θ) + — (r cos θ) + X 2R

CΓ vz2ΊΙ

.2

+ \r'2 — 2 x(r' sin θ') + — (r' eos θ') + x2

2R

(5.127)

Folosim acum faptul că x/r și x/r’ sunt mici pentru a simplifica operația cu rădăcina pătrată. Deoarece (1 + ε)ιz2 ≈ 1 + ε/2 — ε2/8 + ... unde în acest caz, de exemplu

/x \ 2 2x sin θ X2 cos θ

ε= I l ^i--------——

XrJ r Rr

primul termen de pe partea righi a Eq. (5.127) este aproximativ

___ (X2

P0P ≈ η1 ÷ ^2 +

X sin θ

X2 cos θ X2 sin2 θ

2Rr ~ 2r2

r + X sin θ +

■ cos2 θ —

X2 cos θ

2R

Am reținut doar acei termeni care sunt de ordinul doi sau de ordinul I inferior în x. Un pas similar conduce la o simplificare a celui de-al doilea termen din partea dreaptă a ecuației. (5,127). Suntem lăsați cu

P0PP' ≈(r + r') + x(sin θ — sin θ,)

2 Γ/∞s2 θ cos θ'

R

cos2 θ' cos &'

(5.128)

2

R

Aceasta poate fi acum înlocuită în Ec. (5.124), care exprimă condițiile pentru un maxim de interferență la P' având în vedere sursa la P0:

----- ------- X

P0OP' — P0PP' ~ x(sin θ' — sin θ) ÷ —

'cos2 θ

r

cos θ`

R

cos θ' \

= mλx/a

(5.129)

R

Primul termen din stânga ecuației. (5.129) cu partea dreaptă este doar forma familiară a ecuației rețelei. Al doilea termen va fi zero (la acest nivel de aproximare) furnizat

r — R cos θ

și

r' = R cos θ'

(5.130a)

(5.130b)

Dar acest lucru implică faptul că OP0C și OP'C definesc triunghiuri dreptunghiulare și, deoarece OC este comun ambelor triunghiuri dreptunghice, atunci punctele P0 și P' trebuie să se afle pe un cerc comun al cărui diametru este OC. Acesta este cercul Rowland.

Recunoaștem că P' este imaginea lui P0 în ordinea m și Lungimea de undă λ deoarece toate căile P0PP' sunt echivalente într-un număr întreg de lungimi de undă. Astfel, contribuțiile de la P' care provin de la P0 sunt toate în fază cu condiția ca unghiurile θ și θ' să satisfacă

α(sin θ' — sin θ') = mλ

3. Spectroscopie Fabry-Perot. Pentru o putere de rezoluție mai mare decât cea furnizată de un monocromator cu rețea, se poate folosi

etalonul Fabry-Perot. Acesta este în esență un interferometru Fabry-Perot având o separare d fixă între plăci. Este folosit în mod convențional cu Iight incident care acoperă un interval continuu de valori ale unghiului θ. Spectrul este observat fotografic în planul focal al obiectivului unei camere. Ecuațiile din secțiunea 5.3B se aplică în acest caz așa cum a fost modificat în secțiunea 5.3C pentru interferometrul Michelson. Ordinea unei franjuri este dată de Ec. (5.70) ca m = Ind cos θ/λ0. Ordinea maximă se găsește în centrul modelului Wimax = 2nd/λ0, care nu trebuie să fie exact un întreg. Raza celei de-a doua franjuri strălucitoare din centru, unde p = ттях — m, este dată de adaptarea ecuației. (5,67):

r∏; ΄I1/2

Xp=fEnd (5Л31)

De asemenea, p nu trebuie să fie un număr întreg.

Să presupunem că doar lumina verde monocromatică este incidentă pe fanta de intrare a unui monocromator cu rețea. Apoi se va forma o imagine verde a fantei de intrare pentru ordinea optimizată a grătarului în locul de pe placa de fotografie etichetat „verde” în Fig. 5.39. Cu etalonul introdus în poziția indicată, imaginea fantei nu va fi continuă, ci va consta din secțiuni ale modelului de interferență produs de etalon, așa cum se arată în insert. Dacă lumina verde nu este cu adevărat

Detaliu al planului imaginii

Z^

Il I √ \\ / / z VO Iif ÿi

/> /! Il \ KK Zz // \V

I-Zz V

— — Intrare «e- lățimea imaginii fantei

Green Violet

Fig. 5.59 Utilizarea unui etalon Fabry-Perot cu gratar. Imaginea este formată din mici secțiuni de arce. Linia verde din acest exemplu este un dublet.

monocromatic, dar conține mai multe lungimi de undă strâns distanțate, apoi modelul de interferență va arăta modelele suprapuse ale fiecărei componente Lungime de undă așa cum este cerut de Ec. (5.131). Funcția rețelei este de a separa grupul verde de alte grupuri care ar putea fi prezente în Spectrul analizat.

O altă modalitate de utilizare a interferometrului Fabry-Perot în spectroscopie este tehnica de scanare a punctului central prezentată în Fig. 5.40. Este aplicabil atunci când sunt prezente doar câteva grupuri de lungimi de undă, astfel încât separarea preliminară poate fi realizată cu un filtru sau un premonocromator. Fie strălucim lumină dintr-o sursă difuză direct în interferometru, fie folosim lumină colimată dintr-o sursă largă. Apoi,

Fig. 5.40 Scanarea punctului central cu un etalon Fabry-Perot: S, sursă; L, Ienses; C camera de vid pentru scanare sub presiune; W, Windows; E etalon; orificiu PH; detector D.

la planul focal al lentilei, observăm modelul circular. Un orificiu este plasat în centrul modelului prin care lumina trece la un detector. Prin urmare, măsurăm densitatea de flux a „punctului central” la 0 = 0. Din Ec. (5,70) $\lambda = 2/m$. Pentru a scana lungimea de undă și astfel pentru a înregistra distribuția spectrală a densității fluxului, trebuie să schimbăm n sau d. Cristalele piezoelectrice pot fi folosite pentru a schimba d, sau cu d fix n poate fi schimbat prin variarea presiunii gazului între plăci.

C. Acoperiri OpticaI

Proprietățile optice ale filmelor subțiri (așa cum sunt descrise de formalismul din Secțiunea 5.4A) pot fi exploatate pentru a îmbunătăți sau reduce reflectanța unui element optic. Acest lucru este util în proiectarea acoperirilor antireflex pentru Ienses și în proiectarea oglinzilor dielectrice. Aceste sisteme sunt de obicei menite să fie utilizate la o incidență normală.

1. Acoperire antireflex. Ideea stratului antireflex este de a produce o interferență distructivă între fasciculele reflectate de pe fața frontală a filmului și de pe partea din spate a filmului. Acest lucru se realizează prin (1) având ambele reflexii la interfețe caracterizate printr-un mediu incident care este mai puțin dens din punct de vedere optic și (2) având o defazare de 180° rezultată din propagarea în al doilea mediu. Astfel alegem grosimea stratului d astfel încât

$$\beta = 2\pi n_2 d/\lambda_0 - \pi/2$$

sau

(Denumirea „strat de sfert de undă”). Adesea, lungimea de undă Jl0 este aleasă să fie aproape de 550 nm, la maximul răspunsului vizual. Apoi alegem materialele astfel încât $n_1 < n_2 < n_3$. Figura 5.41 ilustrează defazajul dintre primele două contribuții din reflexiile multiple. În practică, acestea sunt cele dominante

Fig. 5.41 Ilustrarea modificărilor de fază la reflexie și transmisie în filmul sfert de undă utilizat la incidență normală.

domenii, deși teoria noastră include reflexii multiple. Matricea stivei este dată de Ec. (5,93) cu

ы __LP P^\ . ʃ* θʌ

12 τ12 \0121/2 κ 0

1^1 023

și H23 = — I

τ23 \ 023 ɪ

Coeficientul de reflexie rezultă din elementele lui S,

$12 ~ (e lβP23 T ^βPi2)

τ12τ23

și

S22 = —ɪ— (e iβP12P23 + eiβ)

τ!2τ23

Avem din Ec. (5,94)

_ S12 _ 023 ë iβ + P12 eiβ P S22 eiβ + p12p23 e~iβ

(5.132)

Dar, deoarece β pentru lungimea de undă de proiectare este π/2, aceasta duce la cerința ca Pu = 023· Folosind ecuația (2.62a) pentru coeficientul de reflexie al unui strat dielectric la incidență normală

ni + nj

constatăm că cerința ρl2 = p23 este echivalentă cu

(5.133)

«2 = √^ιH3 (5,134)

Introducerea acestor informații în Ec. (5.132) și presupunând că dominanta

1.5

1.0

0,5

0

400

500 600

lungime de unda (nm)

700

Fig. 5.42 Performanța stratului antireflex în cazul n1 = 1, n2 = 1,22 și n3 = 1,5.

modificările vor avea loc în factorii de fază, putem estima care va fi coeficientul de reflexie pentru lungimile de undă într-un interval apropiat de lungimea de undă de proiectare:

_ P12(e iβ + eiβ) _ Ip12 cos β e iβ P~ el> + pl2e-•> ~ I + pj2e~i2e

De aici rezultă reflexia (presupunând că pelicula este un dielectric) 4R1 cos2/?

ικι 1 + 2R1 cos(2β) + R2i unde R1 = | p1212- Deoarece β ≈ π/2, aceasta este aproximativ

~ 4R1 cos2 β

(5.135)

Figura 5.42 arată cum R rămâne mic pe o regiune de lungimi de undă mare în jurul lungimii de undă de proiectare, 550 nm. Pentru Sistemul ales, reflectanța interfeței dintre primul și al treilea mediu, fără stratul antireflex, ar fi de 4%.

2. Acoperire de îmbunătățire a reflectanței. Putem construi o acoperire multistrat complet dielectrică de îmbunătățire a reflexiei prin alternarea straturilor de materiale cu indice mare (Я) și Iow (L) evaporate pe un substrat, așa cum se arată în Fig. 5.43. Dacă se controlează grosimea straturilor astfel încât

пн^н — nL^L — 4

atunci fazele fasciculelor care contribuie la câmpul optic rezultat vor fi așa cum se arată. Toate contribuțiile reflectate parțial interferează constructiv, dând un coeficient de reflexie net mare.

322 Deducere

Fig. 5.43 Ilustrarea schimbărilor de fază la reflexie și transmisie în interiorul acoperirii de îmbunătățire a reflectanței periodice multiple.

Folosind teoria din Secțiunea 5.4A, putem identifica o unitate care se repetă Constând dintr-o pereche de filme cu indice mare și Iow. Matricea stivei pentru această unitate este

Spair - HlhLhHhlLl

Unde

Hhl =

J/ 1 τHL \PhL

Hlh =

J

xLH

Plh

1

și

astfel încât

c ___________J___/ɪ ÷ Plh

^paɪr   I ɔ

τLHxHL \ ^PLH

(5.136)

Dacă adăugăm o a doua pereche, matricea stivă devine

SS = (S

wjpairwpair \ pereche/

= / -ɪ V/1 + 6P2LH + Plh δ>Plh + 4piн \ \ τLHτHL) \ δ,Plh ÷ δ,Plh ɪ ÷ 6Plh ÷ Plh/

În acest moment, putem simplifica procesul făcând o observație interesantă. Elementele matricei de stivă dublă sunt termeni alternanți în expansiune

(ɪ + Plh)4 = 1 + ⅛Plh + 6Plh + ⅛Plh + Plh   (5,138)

Folosind faptul că

(ɪ — Plh) = ɪ - ^Plh + 6Plh ~ ^Plh + Plh   (5.139)

Ec. (5.137) poate fi rescris ca

/g \ 2 _ ɪ / ~ ɪ A2/(ɪ + Plh)4 + (ɪ ~ Plh)4 (ɪ ÷ Plh)4 ^~ (ɪ - Plh)4 \

2 \ τLHτHL/ \ (1 + Plh)4 ~ (ɪ -^ Plh)4 (ɪ ÷ Plh)4 ÷ (ɪ - Plh)4/

(5.140) Este un exercițiu simplu de a demonstra că matricea generală a stivei pentru N perechi de straturi va fi

fs vv = 1 / -ɪ \ V(1 + Plh)2n + (1- Plh)2n (1 + Plh)2n - (1 - Plh)2n \ I P 2 \τíHτHJ ^(1 + plh)2n - (1 - plh)2n (1 + plh)2n + (1- plh)2nJ

(5.141) Dar pentru că prin Ec. (5.133)

1 + Plh =

(nL ± »¿) + (⅛ + »h) nL + nH

matricea stivă generală devine

(S -4 Y(n2LN + n2HN n2LN-n2N\

Ç paij 2 \rLHxHL(nL + n11)2J [n2N - n2N n2N + n2HN)

prin Ec. (5.89) coeficientul de reflexie datorat perechilor A de straturi este

= niN-n2HN

p +ni”

(5.142)

Acest formalism nu ține cont de faptul că mediul incident este aer cu un indice de refracție puțin mai mare decât unitatea. Cu toate acestea, conceptul este suficient demonstrat cu această dezvoltare. Reflectanța stivei de 2N straturi este

(5.143)

Pe măsură ce N crește, reflectanța se apropie de unitate. Convergența se îmbunătățește pe măsură ce raportul nH/nL crește. Un tip de acoperire de îmbunătățire a reflectanței este cel folosit pentru a construi oglinzi pentru cavitățile laser cu heliu-neon. Constă din 13 straturi de sulfură de zinc (nH — 2,32) și auoriră de magneziu (nL = 1,38) cu o reflexie de vârf de 98,9% la 633 nm.

D. Cavităţi optice şi ghiduri de undă

1. Unde stătătoare. Un tip important de interferență între două fascicule optice de aceeași frecvență care se mișcă în direcții opuse va produce o undă staționară. De exemplu, luați în considerare suprapunerea undelor plane

E1 = A1 eiin«t,T)~(zW)

și

E2 = A2ei2π^m+iz,λn . (5.144)

Dacă amplitudinile celor două componente sunt egale, atunci câmpul optic total devine

E = Ai ei2πwτ \

\ / 2πz \

gi2π(z/Λ) _|_ g-ι2π(z/Λ) 1 _ 2A1 cθS | j gt2π(f/Γ) (5,145)

/ \ A /

Aceasta arată că amplitudinea rezultatului este o funcție sinusoidală a poziției de-a lungul direcției de propagare cu o perioadă spațială egală cu lungimea de undă a luminii.

O undă staționară de acest fel poate fi stabilită între două oglinzi infinite, paralele, la distanță de L, așa cum se arată în Fig. 5.44. Dacă nu există pierderi de reflexie, amplitudinea maximă nu se va modifica în timp. Va exista o schimbare netă de fază într-o călătorie dus-întors între oglinzi de

2π 4π

<5 = – – 2L + 2y –-----------vL + ly

λ c

unde y este schimbarea de fază care are loc la reflectarea fiecărei oglinzi. În acest ciclu sunt create cele două grinzi direcționate opus. Totuși, dacă câmpul optic se va reproduce după o călătorie dus-întors, schimbarea de fază trebuie să fie integrală

Fig. 5.44 Amplitudinea undei staţionare în funcţie de distanţa de-a lungul unei cavităţi care are 52/2 lungime.

multiplu de 2π; adică cu m = întreg frecvența trebuie să satisfacă

δ – V---– 2γ = 2πm

c

mc γc

2L + 2πL

(5.146)

2. Cavități laser. Una dintre cele mai importante aplicații ale interferenței undelor stationare este cavitatea laserului. Dacă un mediu activ este plasat între oglinzile cavității din secțiunea anterioară, atunci de fiecare dată când lumina trece prin cavitate este amplificată prin procesul de emisie stimulată. În general, va exista o gamă de frecvențe care pot fi amplificate într-un mediu activ dat. Cu toate acestea, doar Iight au frecvențe satisfăcătoare Ec. (5.146) va interfera constructiv în interiorul cavității. Prin procesele de amplificare, aceste frecvențe domină rapid. Acestea sunt modurile longitudinale ale cavității. Dacă una dintre oglinzile terminale transmite parțial, procesul de amplificare continuă, dar o parte din radiație este lăsată să iasă, creând astfel ieșirea laser.

Oglinzile de capăt din acest exemplu reprezintă un etalon Fabry-Perot infinit. Ecuația (5.146) este condiția pentru transmiterea de vârf printr-un astfel de etalon. Ne amintim din discuția noastră despre un

astfel de sistem că, pentru coeficienți mari de reflexie a energiei, transmisia prin etalon poate fi foarte puternic în funcție de frecvență. Vedem din Ec. (5.146) că de la un vârf la altul va exista o separare Δv dată de

Av = ¿ (5,147)

În plus, fiecare vârf va fi aproximativ lorentzian cu o lățime completă la jumătatea maximă dată de Ec. (5.111) de către

Aceasta este egală cu lățimea de fază dδ asociată cu o frecvență de lățime completă care respectă dv

dδ = 4πb (dv) = W

c

sau

c I2

dv = /~ /I (5,148)

4πL yj F

Oglinzile laserului He-Ne au valori de R1 de aproximativ 99%. Folosind Eq. (5.106) și (5.148), aceasta duce la o lățime a vârfului în modul longitudinal de 1,7 × IO5 Hz pentru o cavitate de 1 m lungime. Diferența de frecvență între moduri este, din Ec. (5,147), 1,5 ×

IO8 Hz. Acestea sunt fracțiuni foarte mici din frecvența medie a radiației de ieșire la 632,8 nm, 4,74 × 1014 Hz. Originea iesirii laserului este ilustrata schematic in Fig. 5.45.

Măsurile de claritate a rezonanței cavității sunt legate de eficiența interferometrului Fabry-Perot. Astfel, finețea unei cavități laser este definită de

Av

dv

(5.149)

O măsură alternativă a calității este cavitatea Q, care poate fi definită ca

V δ≡<Γv

(5.150)

Pe lângă modurile longitudinale tocmai discutate, câmpurile în picioare dintr-o cavitate laser există și în moduri transversale. Acestea apar atunci când oglinzile plane infinite sunt înlocuite cu oglinzi de

dimensiuni finite. Discuțiile ulterioare despre caracterul transversal al radiației laser vor fi amânate până la. Capitolul 7 unde este prezentată teoria difracției în câmp apropiat.

4 S

Fig. 5.45 Reprezentarea distribuției de frecvență a puterii de ieșire a laserului în termeni de transmisie Caracteristicile cavității laser T și caracterul spectral al liniei de emisie G, care contribuie la câștig.

Fig. 5.46 Geometria opticii cu peliculă subțire! ghid de undă.

3. Opticai Waveguides. Optica integrată este acea ramură a electronicii în care semnalele sunt transportate de fascicule de lumină care sunt prinse de reflexia internă în ghidurile de undă cu film subțire. Interferența joacă un rol important în aceste dispozitive, deoarece numai modurile care sunt consolidate constructiv se pot propaga în film.

Figura 5.46 prezintă o secțiune transversală a unui ghid de undă plan pe care îl considerăm a fi infinită ca întindere în thè yz piane. Unghiul intern $\theta 2$ trebuie să satisfacă

$$\sin \theta 2 \geq noJn2 \quad (5,151)$$

unde nout este mai mare dintre n1 sau n3. Dacă această condiție nu este îndeplinită, atunci modul este radiativ și Iight este Iost la fiecare reflexie internă.

Calea razei prezentată în Fig. 5.46 este doar una dintr-un continuum de raze posibile care ar exista în acest ghid de undă la $\theta 2$. Celelalte sunt generate prin translația punctelor P și 0 de-a lungul direcției z. Normal pentru fiecare dintre aceste raze vor fi planuri de fază constantă a câmpului electric optic. Linia întreruptă PQ reprezintă suprafața pe care ar putea să se afle unul dintre aceste planuri. Această suprafață aparține planului asociat cu fasciculul imediat înainte de reflexie la P și, de asemenea, cu fasciculul la Q. Diferența de fază între câmpurile optice asociate cu aceste puncte este

$$\Phi q \sim \Phi p = ЫP0 + OQ)] + \gamma 12 + \gamma 23 \quad (5,152)$$

c

unde $\gamma 12$ și $\gamma 23$ sunt asociate cu reflexia de la interfețe. Putem evalua PO + OQ notând că PO = <7/cos $\theta 2$ și OQ = PO cos(202). Combinând aceste relații și folosind cos 2Θ — 2 cos2 θ — 1 găsim

$$P\tilde{O} + OQ = 2d \cos \theta 2 \quad (5,153)$$

Pentru interferența constructivă, diferența de fază trebuie să fie un multiplu integral de 2π. Prin urmare

$2\pi v$

----$(2n_2 d \cos \theta_2) - 2\pi \Delta m = 2\pi m$ (5.154) c

unde $\Delta m = (y12 + 7гз)/2л$ ține cont de schimbările de fază ale reflexiilor. Acesta poate fi rescris pentru a identifica unghiurile permise la care radiația se va propaga. În alte unghiuri, interferența distructivă domină.

cosβ2m = i^±^* m = 0,l,2... (5,155)

2,m 2n2dv

Pentru un unghi dat, va exista un mod Caracteristice care este asociat cu o singură valoare a lui m.

Ecuația (5.151) trebuie de asemenea îndeplinită. Acest lucru impune restricții asupra frecvenței pentru un anumit ghid de undă de grosime d și indice n2 și delimitat de nout,

c(m + Am) V = 2n2d cos θ2 mv
Dar cos02,m = (l - sin2 02,m)υ2
iar din Ec. (5.151) / n \112 oI tOUT 1 COS 02,m < 1 - – \ n2 /
Prin urmare c(m + Am) (5156)

Propagarea în ghidul de undă este întreruptă dacă frecvența este I mai mică decât valoarea critică când m = O; Am este o caracteristică a structurii ghidului de undă și, pentru un sistem dat, este fix.

REFERINȚE

Arfken, G. Metode matematice pentru fizicieni. Académie Press. New York, 1970.

Aspnes, David E. „Analiza spectrelor de modulare a mediilor stratificate”. Jurnalul

Optical Society of America, 63:1380, 1973.

Born, Max și Emil Wolf. Principii de optică. Pergamon Press, Oxford, 1980.

Cagnet, Michel, Maurice Françon, Jean Claude Thrierr. Atlasul fenomenelor optice. Springer-Verlag, Berlin, 1962.

Dainty, JC, ed. Speckle laser și fenomene conexe. Springer-Verlag, Berlin, 1984. Driscoll, Walter, G. și William Vaughan. Manual de optică. McGraw-Hill, New York,

1978.

Fowles, Grant R. Introducere în optica modemului. Holt, Rinehart și Winston, New York, 1968.

Françon, Maurice. Formarea și procesarea imaginii optice. Académie Press, New York,

1979.

Heavens, OS Proprietățile optice ale filmelor solide subțiri. Dover, New York, 1955.

James, JF și RS Sternberg. Proiectarea spectrometrelor optice. Chapman and Hall, Ltd., Londra, 1969.

Kline, Morris și Irwin W. Kay. Teoria Electromagnetică și Optica Geometrică. Interscience, New York, 1965.

Lengyel, Bela A. Introducere în fizica laserului. Wiley, New York, 1966

Marcuse, D. Teoria ghidurilor de undă optice dielectrice. Académie Press, New York, 1974. Okoshi, Takanori. Fibre optice. Académie Press, Londra, 1982.

Smith, William V. și Peter P. Sorokin. Laserul. McGraw-Hill, New York, 1966.

Oțel, interferometrie WH. Cambridge University Press, Cambridge, 1967.

Stone, JM Radiation and Optica. McGraw-Hill, New York, 1963.

Tolansky, S. Microstructuri ale suprafețelor utilizând interferometrie. Elsevier, New York, 1968. Tolansky, S. Surface Microtopography. Interscience, New York, 1960.

Probleme

Secțiunea 5.1 Interferență cu două fascicule

1. Două unde plane monocromatice se propagă în aproape aceeași direcție. Unul este înclinat față de celălalt cu 20 mrad. Ca o funcție a direcției medii de propagare, identificați locația maximelor de interferență (spațierea lor). Lungimea de undă comună a luminii este de 532 nm. Să presupunem coerența perfectă pentru fiecare fascicul.

2. Să presupunem că o suprafață reflectorizantă are un coeficient de reflexie de amplitudine complexă $p = p0\ ei\gamma$. Aceasta înseamnă că dacă câmpul electric incident este dat de

câmpul reflectat va fi dat de

E" =

p0 A cos

+ φ + γ

Să presupunem că p0 ≠ 1. Să se arate că câmpul combinat are o parte alcătuită dintr-o undă staționară și o parte alcătuită dintr-o undă care se propagă.

3. Trasează fazorii care reprezintă câmpul electric optic E = A exp (i(ωt – kr)). Aici A = 100 V/cm, ω = 3,77 ж 1015 sec-1, κ = 1,25 × IO6 7 m-1. Determinați fazorul în condițiile foliowing: t = 0,14 x 10-15 sec, r = 0; t = IO-15 sec, r = 0; t = 2,22 x 10-15 sec, r = O;t = O, r = 2 × 10-7 m; t = 10-15 sec, r = 10-7 m; t = 10-15 sec, r - 8,75 × 10-7 m.

4. Determinați grafic și analitic rezultatul adunării fazorice a lui e,πl6 și 3 eιπl3.

5. Determinați analitic suma fazorilor lui E1 = A exp{i[ωt – k(0.3r)]} și E2 = AA exp{i[ωt – k(0.6r)]}.

6. Demonstrați că densitatea de flux integrată spațial este activată

planul de observare din experimentul lui Young satisface

cerința de conservare a energiei, așa cum este menționată în ecuația următoare. 5.25.

7. Trasează forma funcțională a densității fluxului în configurația Young dacă un filtru de densitate neutră care reduce puterea transmisă cu un factor de 3 este plasat peste o fantă.

8. Franjurile din experimentul lui Young nu sunt de fapt constante în separare așa cum sugerează Ec. (5.30). Acea ecuație depinde de x' < D'. Îmbunătățiți acest rezultat prin purtarea aproximărilor la următorul ordin superior și în acest fel calculați abaterea de la lățimea constantă a franjului ca o funcție a poziției în planul de observare.

9. Dacă o placă dielectrică de grosime maximă necunoscută este introdusă peste una dintre fante în configurația lui Young, maximul central deplasează cu 3,4 franjuri într-o parte. (Acest lucru poate fi monitorizat prin introducerea plăcii sub formă de pană, astfel încât să se poată observa o franjă pe măsură ce grosimea se modifică.) Dacă indicele de refracție al materialului este 1,467, găsiți grosimea maximă a plăcii.

10. Este posibilă deplasarea maximului central în configurația lui Young prin introducerea unui material transparent în fața uneia dintre fante. Dacă, în loc de lumină monocromatică, fantele sunt iluminate cu lumină albă, atunci acest maxim „central” reprezintă singura poziție din model care va fi maxim pentru toate lungimile de undă. Cu condiția ca materialul transparent să fie nedispersiv (n nu este o funcție a lungimii de undă), atunci această situație se menține chiar și cu materialul transparent prezent. Dacă materialul este dispersiv, atunci nu viteza de fază, ci viteza de grup trebuie utilizată pentru a determina diferențele de lungime a căii optice. (Vezi dezvoltarea acestui concept în Problema 2.55). În acest caz, maximul care este același pentru toate lungimile de undă poate fi diferit de cel pe care l-am identifica ca fiind maximul „central” pentru orice undă.

lungime. Folosind aceste informații și ecuațiile date în problema 2.55, se determină locația acestei franjuri cu caracter acromatic, cu o placă dielectrică grosimea d și indicele n introduse peste o fantă.

11. Luați în considerare geometria lui Young în care sursa emite Iight de două lungimi de undă λi și λj. Deduceți o relație pentru poziția de pe ecranul de observație la care franjurile dispar datorită suprapunerii complementare a două modele de interferență.

12. În Fig. 5.5, luați în considerare experimentul original al lui Young în care deschiderile din ecran erau găuri în loc de fante. În funcție de Coordonatele x', y' din planul de observare, se derivă o expresie pentru forma franjurilor; adică să se determine locul punctelor din planul de observație care satisfac interferența constructivă.

13. Într-un experiment cu oglindă Lloyd, cu o lumină cu lungimea de undă de 500 nm, se constată că franjurile brighi de pe un ecran la 1 m distanță de sursă sunt distanțate de 1 mm. Calculați înălțimea (perpendiculară) a fantei sursei din oglindă.

14. Într-un experiment cu oglinda lui Lloyd sursa se află la 2 mm deasupra planului oglinzii. Oglinda se află la jumătatea distanței dintre sursă și ecran și are 40 cm lungime. Sursa se află la 1,5 m de ecran și emite radiații cu o lungime de undă de 500 nm. Calculați separarea franjurilor și valorile maxime și minime ale lui x' (coordonata verticală de pe ecranul de observare) pentru care sunt văzute franjuri. Câte franjuri se observă?

15. Să considerăm o biprismă Fresnel cu indice de refracție n, unde unghiul prismei a este mic în comparație cu unitatea (în radiani). Utilizați aproximarea prismei cu unghi mic descrisă în problema 2.35. Să presupunem acum că a <ζb și să presupunem că imaginea L1 și L2 a lui L formată din cele două jumătăți ale biprismei sunt la o distanță a/2 de L. Care este atunci valoarea necesară a lui b? În aceste circumstanțe și pentru o valoare generală de D' > 0, calculați separarea marginilor pe ecran. Câte franjuri se observă? (Vezi fig. 5.7.)

Secțiunea 5.2 Interferență MultipIe-Beain

16. Calculați detaliile pentru algebra interferenței cu fascicule multiple astfel încât să obțineți ecuația. (5.34) Începând cu Ec. (5.32).

17. În locul expresiei de adiție asimetrică a fazorilor din Ec. (5.35), luați în considerare

(¡V-1/2)

E= ∑ Un eiφ"

n=-(Nl/2}

unde N este impar și $\varphi_n = \omega t + n\delta$. Aceasta este o formă simetrică în care Piember central al surri (n = 0) este membrul de referință (adică $\varphi_0 = \omega t$). Pornind de la această expresie derivă o formulă similară cu Eq. (5.38) pentru câmpul electric total datorat sumei N componente. Acum calculați densitatea de putere. Cum se compară acest rezultat cu Eq. (5.39), care a fost derivat din situația asimetrică?

18. O undă plană este incidentă în mod normal pe un ecran care conține cinci fante lungi foarte înguste separate una de cealaltă la distanțe egale.

(a) Reprezentați grafic densitatea fluxului în modelul de interferență în funcție de δ (care este proporțională cu poziția în planul de interferență) de la $\delta = -2\pi$ la $\delta = 2\pi$.

(b) Desenați diagrame fazorice Alustrarea câmpului electric optic în modelul de interferență pentru $\delta = 0$, $\delta = \pi/5$, <5 = 2π/5, $\delta = \pi$.

19. Utilizați o tehnică grafică sau computerizată pentru a rezolva ecuația transcendentală (5.43) pentru a găsi locațiile maximelor minore în cazul celor cinci fante. A determina

. eroarea din calcul și comparați rezultatul cu aproximarea $\delta = 3\pi/5$, π, $7\pi/5$.

Secțiunea 5.3 Interferență cu două fascicule: interfețe paralele

20. Urmează argumente similare celor care preced Ec. (5.58), deduceți o expresie pentru diferența de faze dintre primele două fascicule transmise în mediul final dincolo de placa dielectrică.

21. Luați în considerare franjuri Haidinger observate la incidență normală cu o placă de grosime d și indice n. Fie D diametrul Ienilor și f lungimea sa focală. Se folosește Iight monocromatic cu lungimea de undă λ. Pentru d mult mai mare decât Z, cerințele privind Uniformitatea lui n și asupra Aatnessului și paralelismului suprafețelor plăcii sunt destul de severe dacă trebuie respectate franjurile Haidinger ideale descrise în text. Explicați de ce ar trebui să fie așa și estimați toleranțele pe d și n dacă nu se observă abateri observabile de la comportamentul ideal.

22. Se observă franjuri Haidinger cu o placă cu grosimea de 2,00 mm cu indice n = 1,60000 având suprafețe precise. Lumina folosită are o lungime de undă de 500,0 nm. Calculați ordinea maximă în centrul modelului de franjuri circulare. Câte franjuri luminoase sunt observate într-un con de 1/30 rad din normala la suprafață?

23. Un interferometru Michelson poate fi folosit pentru a măsura lungimea de undă a luminii incidente pe acesta dintr-o sursă monocromatică. Totuși, mai întâi trebuie găsită poziția oglinzii acolo unde ambele brațe au lungimi de cale optică identice. Cum s-ar putea realiza acest lucru? Presupunând că acea sarcină a fost îndeplinită, câte franjuri ar ieși din centrul modelului dacă oglinda s-ar deplasa

cu 0,1 mm sub iluminare de lumină de la o sursă cu lungimea de undă de 492 nm? În ce unghi apare franjuria de ordinul zero după această mișcare a oglinzii?

24. Se folosește un interferometru Michelson cu Iight având o lungime de undă de 600 nm și se fac observații la două valori ale separării efective a plăcii d, și anume 0,5 mm și 5 mm. Care este separarea unghiulară dintre franjuri la cele două valori ale lui d? Dacă oglinzile interferometrului sunt rotunde și au 50 mm în diametru și sunt observate cu ochiul liber la o distanță de 400 mm, cam câte franjuri apar pe câmpul oglinzii pentru cele două valori ale lui d?

25. Derivarea densității fluxului în centrul modelului într-un interferometru Michelson cu o oglindă în mișcare poate fi dezvoltată în domeniul timp, considerând că lumina reflectată de oglinda în mișcare este deplasată Doppler. Urmați acest raționament pentru a determina viteza cu care apar franjuri în centrul modelului atunci când oglinda se mișcă la viteza v.

26. Descrieți cantitativ franjurile observate atunci când o suprafață de sticlă cilindrică este plasată în contact la un capăt cu o fiat optic, așa cum se arată în Fig. 5.47 și observată de sus cu Iight de lungime de undă 450 nm.

27. O peliculă de ulei (n = 1,2) pe apă (n = 1,33) este văzută direct de sus cu o lumină de lungime de undă de 600 nm în

L = 10 cm Λ = 10 cm

Bloc de 0,1 mm grosime

aer. Filmul pare circular și se știe că are o grosime centrală de 1 µm, scăzând până la zero grosimea la margine. Spune dacă marginea va apărea întunecată sau strălucitoare și de ce. Câte inele întunecate apar în modelul de interferență?

28. O peliculă circulară de ulei are un profil de grosime care urmează d = d0 exp(-r2/rQ') unde d0 = 2 µm, r0 = 2 cm, iar indicele de refracție pentru ulei este 1,44. Descrieți cantitativ modelul franjurilor Fizeau dacă sunt privite de sus cu

(a) Lumină de la un Na Iamp (589,3 nm lungime de undă).

(b) Lumină albă într-o bandă de la 450 nm (albastru) la 650 nm (roșu).

Secțiunea 5.4 Interferență cu fascicule multiple: interfețe paralele

29. Deduceți Ec. (5.95) pentru cazul reflexiei multiple prin dezvoltarea explicită a fasciculelor individuale. Primele etape ale acestei metode sunt cuprinse în Tabelul 5.1. În acest fel, puteți ajunge la o expresie care să conducă la o serie geometrică. Evaluând seria se ajunge la Eq. (5,95).

30. Calculați raportul dintre lățimea completă la jumătate de maxim și separarea dintre maxime (în funcție de diferența de fază ó) pentru un etalon Fabry-Perot cu R1 = 0,5, 0,8, 0,9, 0,98.

31. Se folosește un interferometru Fabry-Perot cu lumină galbenă de două lungimi de undă de intensitate egală la 599,4 nm și 600,0 nm. La ce valoare aproximativă a numărului total de comandă m vor fi ele doar rezolvabile conform criteriului nostru dacă R1 = 0,85?

32. Calculați reflectanța și transmitanța unei stive cu configurația prezentată în Fig. 5.48. În ceea ce privește câmpul incident, calculați câmpul din al treilea strat la X. Să presupunem că măsurarea se va face la incidență normală cu Iight având lungimea de undă de 500 nm.

33. Un etalon Fabry-Perot este utilizat cu lumină monocromatică așa cum este descris în text. Lăsați prima margine strălucitoare din centrul modelului să apară la p = q (nu neapărat un număr întreg), prima dincolo de cea la p = q + 1, a doua dincolo de aceea la p = q ÷ 2 și așa mai departe până la a N-a dincolo de franja centrală la p = q + N. Fie xN raza celei de a N-a franjuri strălucitoare dincolo de prima. Arătați că q este dat de

Fig. 5.47

Incident mediu Final mediu
n = 1 n = 1,4n = 1,7n = 2,3
X

i. ,ɪ A

0,2μm 0,2μm

Fig. 5.48

unde Ax2 este diferența în x2 dintre franjuri, care nu depinde de N. Toate mărimile din dreapta acestei ecuații pot fi măsurate. Presupunând că n și λ sunt cunoscute, găsiți separarea plăcii în termeni de Ax2 și f, lungimea focală a lentilei.

34. Determinați reflectanța următoarei configurații folosind metoda matricei: Sticlă substrat cu

n = 1,517, strat de 50 nm gros de sii ver cu n = 0,12 – I3,63, strat de 5 nm de cuarț amorf n = 1,458. Mai întâi va trebui să calculați matricele și apoi să efectuați înmulțirea matricei care implică numere complexe. Această problemă și altele ca ea sunt potrivite ideal pentru computerizare. Să presupunem că măsurarea este făcută la incidență normală, cu Iight având o lungime de undă de 589,2 nm. v

35. Cum se modifică dezvoltarea transmitanței reflexiei multiple cu o singură plăci dacă materialul din care este construită placa demonstrează câștig? Prin aceasta se înțelege că matricea de propagare a stratului ia forma ·

L =

-iβ+β'

0

unde termenul adăugat ⅛ exponențialul se datorează caracterului neliniar al mediului. În practică, amplificarea nonlin-ear de acest tip este întotdeauna limitată de fenomenele de relaxare. Cum se schimbă răspunsul tău dacă β' este negativ?

Secțiunea 5.5 Aplicații ale interferenței

36. Care ar fi Caracteristicile cantitative ale modelului de franjuri în cazul unei pane realizate din două

Fig. 5.49

Probleme ɔɔɔ

Plate optice de 5 cm lungime și ținute depărtate la capătul deschis de o lamă de 2 μm cu iluminare cu lumină de 589,3 nm? Cum se schimbă acest lucru dacă se introduce o mică zonă dreptunghiulară înălțată în mijlocul panei ale cărei dimensiuni sunt de 2 cm lungime (de-a lungul axei panei) și 450 nm grosime? Să presupunem că zona înălțată nu este la fel de largă ca planurile optice.

37. Căile optice printr-un interferometru Mach-Zehnder sunt prezentate în Fig. 5.49. Cele doua brate trec prin identica! celule de gaz care pot fi presurizate sau evacuate independent. Să presupunem că următoarea relație între presiunea p și indicele de refracție n pentru un gaz de testare este valabilă: n = 1 + Ap. Inițial, ambele celule sunt umplute cu un gaz necunoscut la 1 atm de presiune. Pe măsură ce un celi este evacuat, se observă 100 de minime la ieșirea detectorului. Aflați constanta proporționalității, A, în ecuația n(p).

38. În suportul cu grătar Czerny-Turner, oglinzile colimatoare au o lungime focală de 1/4 m într-un exemplu comun. Dacă grătarul are o densitate a canelurii de 800/mm, unghiul fix a este de 20°, iar grătarul este utilizat în primul rând, găsiți dimensiunea împrăștierii liniare pe fanta de ieșire a unei benzi de 0,1 m lățime centrată. în jur de 400 nm. Vezi fig. 5.35.

39. Comparați puterea de rezoluție a unui grătar care are 2 cm pătrați și are linii de 600 linii/mm cu un interferometru Fabry-Perot care are o distanță între plăci de 1 mm și o reflectivitate pe placă de 0,92 atunci când ambele sunt utilizate pentru a rezolva un dublet la 516,9 nm și 516,7 nm.

40. Deduceți un criteriu de rezoluție bazat pe ipoteza că două vârfuri pot fi separate dacă densitatea fluxului în modelul de interferență este „fiat” între valorile lui δλ pentru maximele celor două vârfuri (vezi Fig. 5.50). Utilizați Eq. (5.51) pentru a vă exprima răspunsul într-o formă care poate fi comparată cu criteriul Rayleigh. Efectuați calculul atât pentru rețeaua de interferență, cât și pentru interferometrul Fabry-Perot.

41. În tehnica de scanare a punctului central, se pune adesea problema dimensiunii orificiului din fața detectorului. Dacă este prea mic, pierdem iluminarea inutil; dacă este prea mare, rezoluția scade. Să presupunem că se ajunge la un compromis bun atunci când raza pinhole p corespunde unei schimbări în faza δ a cantității W/2, jumătate din lățimea completă la jumătate maximă. Găsiți o expresie pentru p în termeni de n, d, λ, F și f lungimea focală a lentilei finale.

Fig. S.50

42. O cameră Iens are un strat antireflex din MgF2 (n = 1,38). Dacă Iens trebuie să funcționeze cel mai bine la 520 nm și elementul frontal al Iens este realizat dintr-o sticlă cu un indice de refracție de 1,562, găsiți grosimea acoperirii necesare și îmbunătățirea procentuală a transmitanței prin prima interfață a Iens. când acoperirea este prezentă în comparație cu lentila neacoperită.

43. Luați în considerare o acoperire reducătoare de reflexie realizată cu MgF2 (n = 1,38) pe un pahar cu indice de refracție 1,7. Sistemul este observat cu o incidență aproape normală. Cât de gros ar trebui să fie acoperirea dacă lungimea de undă a luminii este de 550 nm? Calculați reflectanța netă la această lungime de undă, precum și la 400 nm și 750 nm.

(a) Efectuați aceste calcule Luând în considerare numai primele două fascicule reflectate.

(b) Includeți mai multe reflecții în calcul.

44. Aflați reflectanța maximă a unei oglinzi de strat dielectric Construită din straturi alternante (cinci perechi) de materiale cu indici de refracție 1,45 și 1,72. Ce grosime ar trebui să aibă fiecare membru al unei perechi dacă acești indici sunt dați pentru radiația de 550 nm?

45. Un filtru de interferență poate fi construit din conceptul din spatele interferometrului Fabry-Perot. Dacă distanța dintre plăci este suficient de mică, atunci va exista un singur maxim principal permis în intervalul spectral de lumină vizibilă (400 nm până la 700 nm). Folosind această idee, proiectați un filtru de interferență care va avea o transmisie de vârf de 50% la 514 nm și o lățime completă.

la jumătate de maxim 5 nm. Să presupunem că aveți un material dielectric din care se pot face pelicule subțiri extrem de uniforme și că indicele de refracție al materialului este de 1,421 la 514 nm. Va trebui să specificați grosimea filmului și reflectanța stratului care va face sandwich filmul. Cât de mult va trebui să fie înclinat filtrul pentru a schimba lungimea de undă centrală a maximului la 488 nm?

46. Care este diferența de frecvență între modurile longitudinale ale unei cavități laser de 1/4-m? Ignorați schimbarea de fază la reflexia la oglinzile de la capăt. Câte noduri există în cavitate dacă este

folosită pentru a produce radiații la 632,80 nm? Dacă oglinzile de la capete au reflexie de 0,98, care este finețea acestei cavități?

47. Un ghid de undă cu peliculă subțire are 0,8 µm grosime și este construit dintr-un material al cărui indice de refracție este 1,49, acoperit cu un strat de indice 1,35. Dacă pentru această structură Δm este 0,7, găsiți radiația cu cea mai mare lungime de undă care se va propaga în ghidul de undă fără a suferi interferențe distructive.

48. Introducerea unei plăci dielectrice necompensate într-un braț al unui interferometru Michelson modifică natura franjelor de lumină albă, care apar atunci când diferența de cale optică în cele două brațe este foarte aproape de zero. Într-un interferometru compensat, franjele cu lumină albă au raze foarte mari, când plăcile sunt exact paralele. În această problemă vi se cere să găsiți expresii pentru razele franjurilor de lumină albă în cazul Necompensat. Configurarea este ilustrată în Fig. 5.51a. Să presupunem că separatorul de fascicul este un film semireflectant autoportant. Oglinda I1 are o placă dielectrică paralelă în fața ei (un strat antireflex pentru oglindă, de exemplu). Oglinda Γ2 este imaginea oglinzii I2 formată de separatorul fasciculului. Raza 0 de la sursă se împarte în raze 1 și 2 la separatorul de fascicul. Raza 2', imaginea razei 2, este reflectată de Γ2. Situația poate fi analizată așa cum se arată în Fig. 5.5lb. Este util să se raporteze fazele razelor 1 și 2' la raza de referință care ar fi reflectată de suprafața plăcii dacă nu ar exista un strat antireflectant acolo. Discutați ordinea și razele franjurilor în funcție de separarea echivalentă d'. Unde sunt amplasate franjuri de lumină albă? Care sunt razele lor? Veți avea nevoie de un Iens auxiliar de lungime focală f pentru a forma imagini ale franjurilor.

49. Când se folosește o fantă cu un monocromator, așa cum se arată în Fig. 5.52, obținem o serie de fascicule colimate ale căror direcții (paralele cu OP) au o proiect-

(A)

(b)

în planul xz de-a lungul liniei Oz' prin centrul fantei și centrul lentilei. Direcția OP poate fi specificată prin unghiurile ≠x și φy. Alternativ, putem lua unghiul φx0 pe care îl face proiecția lui OP în planul xz cu axa z. Acest unghi φx0 va fi o constantă dacă fanta și Ien-urile sunt folosite așa cum se arată, dar φx nu va fi constant. Arătați că Interrelația este

$$\sin \varphi x = \sin \varphi x0 \cos \varphi y$$

Un rețele de difracție de transmisie cu distanța d și linii paralele cu axa y se află în planul xy. Acesta va difracta Iight monocromatic care se mișcă paralel cu OP într-un fascicul în ordinea m-a deplasându-se paralel cu OP', care va avea o proiecție 0P'c pe planul xz și direcția φ'y = <(P'0P,c) și φ' x0 = <(P'c0z). Găsiți expresii pentru φ'y și φ'x în termeni de φy și φx0 și arătați că pentru φy mic, φ'x0 se modifică pătratic cu Φy

Fig. 5.52

Un alt Iens este folosit în dreapta grătarului pentru a focaliza acest fascicul de ordine al mi-lea. Arătați că imaginea monocromatică rezultată a fantei va fi curbată și obțineți o formulă pentru sageta, adică deviația curbei de la o linie dreaptă. Este acesta un efect important? Comparativ cu ce? Discutați, folosind numere realiste pentru lungimile focale, constantele rețelei, lungimea de undă și înălțimea fantei.

50. Arătați că ecuația pentru transmiterea etalonului Fabry-Perot poate fi scrisă în forma T= C(Sin/S), unde C este o constantă a sistemului particular și S și Sin sunt incidentul și puterea internă. densități, respectiv. Să presupunem acum că indicele de

refracția în regiunea dintre plăci (internă) depinde de densitatea de putere acolo, n = n0 + gSin. Acest lucru poate apărea printr-un fenomen neliniar care ar putea fi supus controlului extern. Utilizați aceasta în ecuația pentru transmisia Eq. (5.105) pe care l-am derivat mai devreme în acest capitol. Aceste două ecuații pot fi rezolvate simultan pentru a elimina Sin. Arătați că rezultatul pentru T(S) demonstrează mai mult de o soluție pentru valori suficient de mari ale S. Acesta se numește etalonul Fabry-Perot dispersiv și este un sistem model pentru bistabilitatea optică. Deoarece transmisia poate lua două forme, în funcție de istoricul trecut al sistemului, aceasta poate fi folosită ca comutator optic și, prin urmare, poate forma baza pentru un computer optic.

6 Difracția I

6.1 Concepte generale de difracție

Conceptul de interferență implică suprapunerea unui număr finit de câmpuri componente. Fiecare câmp poate avea propria sa amplitudine și fază.

În Capitolul 5 aceste Caracteristici au fost legate de diferitele căi optice prin care au parcurs fasciculele de lumină asociate câmpurilor componente. În difracție generalizăm același fenomen pentru a descrie suprapunerea contribuțiilor infinitezimale. Fiecare contribuție este asociată cu propria sa fază și amplitudine. Atunci când sunt suprapuse, aceste componente infinitezimale reprezintă efectul unei variații continue a drumului experimentat de lumina care vine dintr-o regiune extinsă în spațiu.

În exemplul clasic de difracție, o sursă punctiformă iluminează o barieră în care există o deschidere (Fig. 6.1). Soluția problemei implică

Fig. 6.1 Difracția se referă la descrierea comportamentului Iight-ului în timp ce interacționează cu deschiderile și barierele. Aici o sursă punctuală creează unde sferice care întâlnesc o deschidere într-o barieră plană.

descrierea distribuției câmpului optic dincolo de barieră. Din acest rezultat poate fi determinată distribuția spațială a densității de flux medie în timp. Difracția este legată de performanța lenselor și a instrumentelor optice. Este esențial în descrierea opticii fasciculului laser. Îl folosim pentru a personaliza performanța rețelelor de interferență (adică, prin urmare, la termenul mai comun „rețele de difracție") și pentru a crea imagini tridimensionale prin holografie. Rolul difracției în formarea imaginii poate fi exploatat pentru a îmbunătăți calitatea imaginii. Poate fi folosit și în dispozitive analogice capabile de recunoaștere a modelelor.

Deși ar fi de dorit o soluție riguroasă a ecuației undei pentru fiecare situație, multe fenomene de difracție pot fi descrise cantitativ printr-o aplicare matematică a principiului lui Huygens. Principiul lui Huygens poate fi demonstrat a fi o excelentă aproximare a comportamentului soluțiilor la ecuația undelor electromagnetice.

În acest capitol dezvoltăm teoria și apoi o aplicăm în cazul în care sursa și punctele de observare sunt departe de barieră. Situația de aproape observație este tratată în capitolul următor. Aceste concepte sunt justificate de o derivație riguroasă a formalismului Fresnel-Kirchhoff pentru difracție din apendice.

Principiul lui Huygens spune că fiecare parte a suprafeței undei optice din spațiu acționează ca o sursă pentru o undă sferică. Toate waveletele se combină pentru a produce noua suprafață de undă la un punct îndepărtat. In geometrica! optica ne facem griji doar de anvelopa undeletelor secundare. Aici tratăm undeletele secundare în mod explicit ținând evidența fazelor și amplitudinilor lor respective la punctul de observație.

A. Difracția integrală

Efectele de interferență studiate în capitolul 5 au tratat suprapunerea unui număr limitat de fascicule. Pentru ca interferența să apară, acestea trebuiau să aibă aceeași polarizare și frecvență. Sursele grinzilor trebuiau de asemenea să fie coerente. Odată stabilit acest lucru, am dezvoltat teoria folosind fazori pentru a reprezenta partea scalară a câmpului optic. Vom urma aceeași abordare aici. Acum, sursa undeletelor interferente va fi un front de undă primar monocromatic de la sursa punctuală inițială, ceea ce asigură că toate undele secundare vor avea aceeași frecvență și că vor fi coerente.

Această situație este similară cu geometria lui Young pentru interferența cu două fascicule. Perspectiva despre difracție începe cu o înțelegere aprofundată a acestui exemplu. În secțiunea 5.2E (Fig 5.5) am simplificat problema ocupându-ne de fante paralele, infinit lungi. Aceasta a fost la variația unidimensională a modelului de interferență în planul de observație. Aici suntem interesați de modele bidimensionale care sunt corelate mai potrivit cu geometria originală a lui Young, care implică găuri.

Recalia forma unui val sferic.

E = ^e'Φ (6,1)

cu

$\varphi = \omega t - kR$

(6.1a)

Fig. 6.2 O undă sferică de la sursa P este examinată la raza R, punctul P.

Acest lucru este prezentat în Fig. 6.2. Ec. (6.1) este o soluție validă a ecuației undei. Descrie mărimea câmpului optic la P o distanță R de o sursă punctuală la P.

Acum introduceți o barieră perpendiculară și o distanță D de-a lungul unei drepte care se îndreaptă de la P. Fie că această dreaptă reprezintă axa z. Să presupunem că există un singur orificiu la P cu Coordonate în planul barierei (x, y) așa cum se arată în Fig. 6.3. Orificiul servește la izolarea unei singure undă a lui Huygens, așa cum se arată în Fig. 6.4. Câmpul optic asociat cu wavelet la R1 va fi proporțional cu

eiφ' DACA

unde φ' = ωt − kR. De asemenea, va fi proporțional cu terenul de pe partea incidentă a

Fig. 6.5 Axa z este linia perpendiculară pe bariera care duce la P. Aici se găsește un singur orificiu

Fig. 6.4 O singură undă a lui Huygens se propagă spre exterior din gaură.

bariera la P, iar la aria găurii de la P, Δσ Deoarece dependența de timp apare deja în φ', trebuie să înmulțim £ cu e~tωt pentru a izola partea independentă de timp a câmpului incident. Astfel la P avem

~ . eiφ'

E' = C(Ee~ιωv) Δσ-7

R

și

-ikR'

£' = Δσ (6-2)

În acest caz, unde £ este rezultatul unei surse punctuale la P, putem scrie

e->k(R + R')

£' = CAeitat rri Δσ (6.3)

Elementul de zonă Δσ este un ingredient rezonabil deoarece amplitudinea undelei sferice ar trebui să depindă de mărimea câmpului sursă disponibil. Trebuie totuși să cerem ca gaura să rămână suficient de mică pentru a se comporta ca o sursă punctuală. Factorul C din Ec. (6.2) are dimensiunile lungimii inverse și se va dovedi a fi complexă. Vom determina C mai târziu. Cu toate acestea, merită subliniat

Fig. 6.5 Undurile lui Huygen din două găuri sunt suprapuse la P'. Aceasta este similară cu geometria originală folosită de Young.

iată că caracterul său complex este o reflectare a faptului că, pentru a reproduce o undă neobstrucționată, undeletele secundare ale lui Huygens de la barieră trebuie să fie defazate în raport cu frontul de undă incident la barieră. Factorul C se dovedește a fi o funcție care variază lent a unghiurilor care descriu direcțiile de propagare a undei incidente și a undelei secundare la orificiu. În cele mai multe cazuri, aceste unghiuri sunt suficient de mici încât să putem ignora această dependență și să tratăm C ca fiind independent de geometrie. Acest lucru este cu siguranță adevărat în limita de difracție în câmp îndepărtat.

Cu două găuri identice la P1 și P2 prezentate în Fig. 6.5, configurația devine aceeași cu experimentul original al lui Young. Examinăm un punct de observație la P' identificat cu Coordonatele (x,, ÿ) într-un plan perpendicular pe axa z la o distanță D1 de barieră. Suprapunerea conduce la câmpul rezultat

Et = CE

β-ikR'i

R\

. e~ikR'2

2^rT

Δσ

(6,4)

Densitatea fluxului la P' va fi

S' = y |F'|2

(6,5)

Pentru N găuri (Fig. 6.6) fiecare zonă Δσn Ilocată la Pπ(n = 1,2,... N) acest rezultat se generalizează la

g-ikRñ

E- = C ∑ È.

n=l

Δσn

(6,6)

Fiecare En și Rn sunt funcții ale poziției celui de-al n-lea orificiu din barieră.

Acum, numărul de găuri devine atât de mare și pozițiile lor atât de apropiate, încât, în mod colectiv, identifică o deschidere continuă, o deschidere σ0 așa cum se arată în Fig. 6.7. Unul dintre găuri este desenat în mod explicit în această imagine. În limita că numărul de găuri tinde spre infinit, iar dimensiunea fiecărei găuri tinde să

Fig. 6.6 Un număr mare de găuri. Fiecare contribuie cu o undă Huygens la câmpul de la P'.

zero, păstrând fixă dimensiunea lui σ0, suma din Ec. (6.6) devine o integrală

E, = C

(6,7)

Câmpul rezultat de la P' poate fi văzut ca fiind o suprapunere a contribuțiilor de la undele secundare, fiecare asociată cu unul dintre găurile imaginare cuprinzând σ0. Aceasta este esența principiului lui Huygens.

Principiul lui Huygen, așa cum l-am folosit aici, păstrează încă o inconsecvență. Nu există nimic care să prevină propagarea unui wavelet secundar spre sursă. Trebuie să introducem un factor care va elimina această situație nefizică. Când teoria Fresnel-Kirchhoff este rezolvată, constatăm că acest factor este prezent automat. Aici tratăm influența adăugată ca pe o corecție (care poate fi adesea ignorată). Figura 6.8 prezintă o creștere da a deschiderii σ0 cu vectorul unitar normal ή identificat ca pozitiv atunci când este îndreptat departe de sursă.

Fig. 6.7 O deschidere continuă poate fi considerată a fi o combinație de găuri infinitezimale.

Fig. 6.6 Geometria asociată cu factorul de înclinare.

Unghiurile θη și θ'η sunt unghiurile pe care le-ar face raza incidentă și difractată cu ή la dσ. Factorul de înclinare este

$$Q \equiv \tfrac{1}{8}(\cos \theta\eta + \cos \theta,\eta) \qquad (6,8)$$

și este folosit sub integrala din Ec. (6.7) ca factor suplimentar. Q este aproape zero când P' este de aceeași parte a lui dσ cu P și dispare exact în direcția înapoi când θ'η = θη - π. De obicei, atât θη cât și θ,η sunt aproape de zero, în care condiții Q — 1· Deoarece Q este o funcție care variază lent a lui θη și θ,η, putem trata frecvent Q ca o constantă în raport cu variația în σ0 chiar și în cazurile în care Q este diferit de unitate. În această situație, Q depinde numai de locația lui P și P' prin unghiurile medii θη și θ,η la deschidere.

B. Discuție despre difracția integrală

Integrai de difracție în Ec. (6.7) a fost aplicată la o mare varietate de fenomene de difracție cu rezultate în foarte multe cazuri care sunt Surprinzător de bune, Având în vedere că nu este o deducere riguroasă din ecuația undei, ci doar o aproximare. Funcționează cel mai bine atunci când atât sursa, cât și punctele de observare sunt la un număr foarte mare de lungimi de undă distanță de deschidere și când dimensiunea deschiderii este oarecum mai mare decât o lungime de undă. Nu ia în considerare niciun efect de polarizare. Acestea pot fi importante în unele experimente.

1. Alegerea suprafeței. Am presupus în derivarea noastră că diafragma este un plan. Extinderea planului în deschidere pentru a forma suprafața de integrare σ0 este cea mai convenabilă alegere. Cu toate acestea, nu rezultă că aceasta este neapărat cea mai bună alegere. După toate, deschiderea reprezintă absența unei suprafețe fizice. Cum decidem ce va fi σ0? În principiu, putem alege orice suprafață rezonabil de netedă. Uneori putem alege să facem constantă Ë sau R. Acest lucru este ilustrat în Fig. 6.9, unde Iight incident este de la sursa punctuală la P. The

Fig. 6.9 Două opțiuni ale suprafeței de integrare în calculul integralei de difracție.

suprafața σ1 ar face E constantă, în timp ce σ2 ar face constant R'. În aproximarea „parabolică”, în care calculele sunt efectuate la ordinul doi în (x, y), rezultatele cu σ1 sau S2 sau orice suprafață intermediară vor fi toate aceleași. Apoi ni se permite să alegem cea mai convenabilă suprafață pentru σ0.

2. Funcția de transmisie. Dacă deschiderea este acoperită de un film parțial transmisiv cu factor de transmisie de amplitudine τ(x, ÿ), ar trebui să înlocuim Ë în Ec. (6.7) cu τE pentru a reprezenta lumina transmisă la diafragma.

Utilizarea unei astfel de funcții de transmisie poate fi generalizată pentru a descrie locația unei deschideri clare. Fie ca partea deschisă

a suprafeței barierei să fie desemnată cu σ0, iar partea închisă σc. Acum definiți τ ca o funcție pas

dacă (x, y) în σ0 dacă (x, ÿ) în σc

Apoi Eq. (6.7) poate fi scris ca

E' = C

(6,9)

Mai general, orice funcție τ(x, y) care descrie modificarea câmpului incident la barieră poate fi utilizată în Ec. (6,8). Acest lucru este valabil și pentru funcțiile care schimbă faza, adică funcțiile formei

τ = Iτ | e~iδ

cu un unghi de fază diferit de zero de <5 care poate depinde de x și y. Aceasta poate fi produsă de o placă transparentă cu grosime variabilă, așa cum se arată în Fig. 6.10. Pentru aproape

Fig. 6.10 O placă transparentă cu grosime variabilă poate servi ca element modulator în integrala de difracție.

incidență normală și modificări mici ale grosimii plăcii, d, schimbarea de fază produsă de o placă referită la cazul fără placă este

<5=An- l)d

Z0

unde n este indicele de refracție și A0 este lungimea de undă a vidului.

Efectul acestei plăci într-o deschidere de difractare ar fi aproximativ descris de funcția de transmisie

τ = J τIexp

2π

-i^7-(n ʌo

l)d

(6,10)

cu | τ | și d fiind ambele funcții ale lui x și ÿ. Pierderile cauzate de reflexie și absorbție ar fi descrise printr-o valoare de | τ | I mai mică decât unitatea.

3. Principiul lui Babinet. O concluzie importantă și utilă se poate trage din faptul că formula de difracție Eq. (6.7) exprimă câmpul E' ca o integrală peste deschiderea deschisă σ0. Dacă σ0 este împărțit în

două părți, $\sigma 1$ și $\sigma 2$, astfel încât $\sigma 1 + \sigma 2 = \sigma 0$ (Fig. 6.11), câmpul din punctul P' va fi suma intégrais peste $\sigma 1$ și peste $\sigma 2$. Dar integrala peste $\sigma 1$ reprezintă câmpul de la P' dacă $\sigma 1$ este singura deschidere, iar integrala peste $\sigma 2$ reprezintă câmpul de la P' dacă $\sigma 2$ este singura deschidere. Astfel, dacă notăm aceste câmpuri prin

și

Fig. 6.11 Principiul Babinefs. Ultimele două deschideri sunt complementare.

unde (...) denotă integrarea în Eq. (6.7), obținem

E'o = E'1+E,2   (6,11)

Această ecuație exprimă un principiu datorat lui Babinet. Se spune că deschiderile $\sigma 1$ și $\sigma 2$ sunt complementare. Câmpurile observate cu deschideri complementare se adaugă pentru a da câmpul observat cu suprafața deschisă combinată a ambelor.

Ecuația (6.11) poate fi foarte utilă atunci când, de exemplu, $\sigma 1$ este o deschidere relativ complicată compusă din diferența $\sigma 0 – \sigma 2$ a două deschideri simple. Apoi calculăm câmpul la P' rezultat din $\sigma 0$ și $\sigma 2$ Separat și scădem pentru a obține câmpul rezultat din $\sigma 1$.

Principiul Babinef este deosebit de util atunci când câmpul de la P' este zero (sau foarte mic) cu deschiderea $\sigma 0$. Acest lucru se întâmplă din cauza efectelor de anulare cu contribuțiile componente din diferitele părți ale deschiderii. În acest caz obținem

£'i = - E2 (6 12)

Densitatea fluxului va fi proporțională cu pătratul valorii absolute a acestor câmpuri. Am arătat astfel că, în acest caz

S'1 = S12 (6,13)

Prin urmare, un punct din modelul de difracție al lui $\sigma 0$ care ar fi în întuneric are aceeași densitate de flux diferită de zero atunci când deschiderea este schimbată în oricare dintre deschiderile complementare $\sigma 1$ și $\sigma 2$, unde $\sigma 1 + \sigma 2 – \sigma 0$.

6.2 Difracția pentru câmp

Fraunhofer sau difracția în câmp îndepărtat este un caz special al situației generale care apare atunci când calea optică de la punctele din deschiderea de difracție la punctul de observare depinde cel mult Iinear de coordonatele punctului de deschidere. Acest lucru poate fi realizat prin aranjarea pentru a avea sursa și punctele de observare foarte departe de deschidere. Se poate realiza și prin utilizarea corectă a Ienselor. Vom afla mai multe despre difracția Fraunhofer de către Ienses Iater în acest capitol și în Capitolul 7. Aici ne limităm atenția la cazul în care sursa și punctele de observare sunt în regiunea de câmp îndepărtat.

A. Aproximație liniară

Figura 6.12α definește geometria pentru calculul nostru. Deschiderea este pianul xy care este perpendicular pe axa z la Õ. O sursă punctuală la P se află în pianul xy care este paralel cu și la o distanță D de pianul deschiderii. Coordonatele dreptunghiulare& ale lui P sunt (x, y, – D). Aici poziția P cu coordinale (x, y, 0) este un punct tipic în deschidere. Planul de observație este paralel și la o distanță D' de planul deschiderii. Un punct de observație este P' cu coordinale (x', ÿ, Df.

De la originea piane de barieră putem identifica direcțiile în care

Fig. 6.12a Geometrie standard pentru matematica difracției. P(x,y) este punctul sursă; P(x, y) este un punct în planul deschiderii; P'(x', y') este punctul de observare. Perspectiva este comprimată în direcția z.

incident și undele difractate se deplasează. Acest lucru este prezentat în Fig. 6.12&. Unghiurile θ_x, θ_y și θ_z sunt acelea pe care vectorul de propagare incident la Õ le face cu axele x, y și z. Cosinusurile direcției sunt de asemenea utile

a = cos θ_x – X = «o

β = cosθ_y = -- (6.14a)

∧o

y = cos θ_z [redacted] = √l-√-/i2≡^

Fig. 6.12b Unghiuri importante care definesc direcțiile de la sursă și până la punctul de observație măsurate în raport cu originea planului deschiderii.

La fel, ne identificăm

X'

a' = cos θγ =

x R'o

β' = cos θ,y = (6.14b)

Ro

ï' = COS θ'z = χ/l - a'2 - β'2 = ɔ

Aceste definiții urmează convenția stabilită anterior pentru indicații la o interfață. Perspectiva din Fig. 6.12 este distorsionată. În practica reală, D și D ar trebui să fie mult mai mari decât sunt

prezentate aici. Am redus dimensiunea desenului de-a lungul direcției z pentru a sublinia coordonatele transversale.

Punctul nostru de pornire este difracția integrai sub forma ecuației. (6,9). Dacă folosim Eq. (6.1) pentru a exprima forma explicită a lui £, câmpul optic la deschidere, ajungem la rezultatul pentru câmpul de la P':

Í·   e-ik(R + R)

τ — dà   (6.15)

5 RR'

Hcre A este coeficientul de amplitudine al sursei. Suprafața de integrare σ este întregul plan xy. Dar τ(x, y) este funcția de transmisie care descrie Caracteristicile diafragmei și care limitează efectiv integrarea. Atât R, cât și R1 sunt funcții ale lui x și y, dar, pentru o deschidere dată, E, este dependentă doar de locațiile lui P și P'.

În Ec. (6.14) distanţele de propagare R şi R' sunt

R = [(xx)2 + (yy)2 + D2]ız2   (6.16a)

și

R' = [(*' - x)2 + (y' - y)2 + D'2]1/2 (6.16b)

În aproximarea câmpului îndepărtat, aceste distanțe sunt considerate a fi liniare în x și y. Pentru a dezvolta această formă pentru Ec. (6.15) vom extinde R și R' despre R0 și R10, prezentate în Fig. 6.12a și date de

R0 = (x2 + y2 + D2)iz2

și

R0 = (χ'2 + y'2 + P'2)l/2

Aceste distante pana la originea planului de deschidere sunt independente de x si y. Urmand aceasta procedura pentru distanta incidenta, avem

R = [Râ - 2(xx + yy) + x2 + y2]1/2 = R0

1   2 z ~-4 X2 + L2Tz2

1 - n2 + yy) + ~

K0

Acum, cu condiția ca al doilea și al treilea termen să fie mici, putem folosi extinderea

R = R0y/ 1 + ε R0(l ÷ ⅛ε ~ ⅛fi2)

cu

2   y2 + V2

e = -   (** + уу) + R2

și calculați de ordinul doi în x și y,

p ~ p Ti xx+ yÿ.χ2 + ÿ2 ^xx + уу? ɑ   îd4

K0   ^∧('i

(6,17)

Dacă această expansiune va rămâne valabilă, atunci x și y trebuie să fie mici în comparație cu R. Acesta va fi cazul în „câmpul îndepărtat” Iimit unde R este mare și deschiderea mică. Al treilea termen va fi, de asemenea, mult mai mic decât al doilea termen, deoarece depinde de o putere mai mare a lui x și y. Aceste condiții vor fi îndeplinite cu condiția ca ultimul termen să fie mic în comparație cu lungimea de undă optică. Deci trebuie să avem

|x| < √¾Λ

LPI < √K 0 Λ

(6.18a)

(6.18b)

Suntem lăsați cu

(6.19a)

ca formă Iinearizată pentru distanța incidentă. O derivație similară duce la forma Iinearizată pentru distanța de la punctul de deschidere la punctul de observare.

R' ≈ R,o -

(6.19b)

Înainte de a înlocui ecuațiile. (6.19) în integrala de difracție, Ec. (6.14), vom face o aproximare suplimentară. Informațiile despre poziția deschiderii purtate de calea optică totală R + R' sunt esențiale în determinarea factorului de fază, e~ik(R+R,) Totuși, factorul de amplitudine (RR,)-1 este mai puțin sensibil la modificări mici. . Pentru a simplifica integrarea și fără o limitare serioasă, presupunem

(RR')-1 ~ (R0R0)-1

Introducem și modificările variabilelor

/ xx, \ 1 (a – aↄ (cos θx – cos θ'x) 11 = ~ \ R0 + W0)λ~ I“F”

/ y ÿ \1 _(β – β') _ (cos θy - cos θ'y) V= \ R0 + Rr0)λ~ ~λ~λ

(6,20)

(6.21a)

(6.21b)

astfel încât

R + R' = (R0 + R'o) + (иx + vy)λ (6.22)

Factorii de fază în integrai de difracție sunt

eiωt e~ik(R + R') _ βiφo e ~i2π(ux + υy)

Unde

φ0 = cot – k(R0 4^ R'o) (6.23)

este independent de x și ÿ. Coordonatele sursei (x, y) și ale punctului de observare (x', ÿ) sunt acum conținute în (u, v).

Câmpul electric optic observat la P1 datorită unei surse punctiforme la P și a unei deschideri Caracterizat prin τ(x, ÿ) va fi

eiφo Γ C ...

E'(u,v)--------– τ(x,y)e l2πlux + vyi dx dy

RqRo JJ

– 00

(6,24)

Integrala din Ec. (6.24) este transformata Fourier a lui τ(x, y).

T(u, v) ≡

τ(x,y)e l2π<ux + t,5) dx dy

(6,25)

Vedem că: Modelul de difracție Fraunhofer pentru câmpul electric este proporțional cu transformata Fourier a funcției de transmisie. Vom studia caracteristicile transformărilor Fourier puțin mai târziu. Deocamdată, putem trata Ec. (6.25) ca definiție a unei operații care urmează să fie efectuată pe τ(x, ÿ) în procesul de determinare a câmpului difractat.

Dacă, ca în Fig. 6.12c, P, Õ și P' sunt situate pe o dreaptă, atunci (u, v) = (0,0) și

CA eiφo°

R'(0, V = °)

κ00•κ00

(6,26)

unde indicele dublu se referă la orientarea „directă” a lui P, Õ și P'. Putem folosi Eq. (6.26) pentru a normaliza câmpul difractat în orice punct general P' în termeni de câmp pentru P' asociat cu geometria directă,

E,(u, v) = E'(0, 0)

RqqRqo

R0R0

T(u, V) βi(Φo-φoo)

T(0, 0)

(6,27)

Densitatea fluxului de energie optică medie în timp P’ este proporțională cu pătratul valorii absolute a câmpului electric. Astfel, din Ec. (6.27) găsim

S'(u, v) = S,(0, 0)

RqqR'oo

Rq Rq

\ T(u, v) | 2

|T(0, 0) | 2

(6,28)

Raportul (R00R00)Z(R0R0) este o funcție implicită a cosinusurilor direcției α, β, a' și β' și astfel va varia slab cu и și v. În multe cazuri, totuși, acest raport este suficient de apropiat de unitate. ca poate fi ignorat. Aceasta va fi situația ori de câte ori investigăm modelul de difracție relativ aproape de geometria directă. De cele mai multe ori Λ0θ va fi egal cu R0.

B. Diafragma dreptunghiulară

Un caz special important de difracție în câmp îndepărtat este cel pentru care τ(x, y) descrie un dreptunghi. Deoarece acesta este un prototip ideal, îl vom studia în detaliu.

1. Rezultat analitic. Fie funcția de transmisie

1

0

τ(x, y) =

dacă |x| < x0 și |ÿ| < y0

In caz contrar

(6-29)

Aceasta definește o deschidere prezentată în Fig. 6.13 a zonei 4x0y0 — T(0, O). Trebuie să evaluăm transformata Fourier a lui τ conform Ec. (6,25). Acesta este un exemplu de caz în care T(u, v) poate fi factorizat în două integrale.

T(u, v) = T(u)T(v) =

e~i2nu* dx

VO

e-ι2πrv rfy

(6,30)

- VO

Această factorizare corespunde integrării peste benzi. Contribuția din banda identificată în Fig. 6.13 este

e-i2πιlχdχ e~i2πv>dy

J -Í0

Integrările sunt ușor evaluate, de exemplu,

1 - sin(2πυy0) sin(2πι>y0)

T(v) = ----- (e~l2πι'yυ - e + ,2πvyυ) = = 2y0 ɔ √ °

- i2πv πι>Tnvy0

(6,31)

352 Difracția I

Fig. 6.15 Coordonatele în planul deschiderii pentru o deschidere dreptunghiulară.

Prima formă este atât de comună încât identificăm o funcție specială pentru a o descrie deoarece(w) s 5≡W   (6,32)

W

Funcția sinc (w) este reprezentată în fig. 6.14 împreună cu sinc2(w), de care vom avea nevoie. Folosind regula lui L'Hospital, găsim

/sinw∧ /cosw \

hm I-----I = hm I —-— = 1

w→0 \ WJ w→o \ ɪ /

1.0

Fig. 6.14

Aceasta identifică maximul central. Zerourile apar atunci când w este o integra! multiplu al lui π. Asta pentru

$w = \pm \pi, \pm 2\pi, ...$

(6,33)

Extreme suplimentare sunt localizate la valorile lui w pentru care

= O

sau pentru

$\tan w = w$

Din soluția grafică sau numerică a acestei ecuații, găsim w = ± 1,4303π, ±3,4707π ca următoarele două extreme cu (sin w/w) = –0,2172 și, respectiv, +0,09132 în aceste locații.

Ecuația (6.31) devine

$T(v) = 2y_0 \text{ sinc}(2\pi u p_0)$

(6.34a)

De asemenea

$T(u) = 2x_0 \text{ sinc}(2\pi u x_0)$ (6.34b)

La P' câmpul este dat de Ec. (6,27)

£'(u, v) = £'(0, 0)

$2x_0 \text{ sinc}(2\pi u x_0) 2y_0 \text{ sinc}(2\pi y_0)$ ΓR00TT00

4*o У o

£'(0, 0) sinc(2πux0) sinc(2πυy0)

K0R0

*00*00

*o*o

gi(≠o - Ψoo)

gi(φo-φoo)

iar densitatea fluxului prin Ec. (6,28)

S'(u, v) — S,(0, 0) sinc2(2πux0) sinc2(2πυy0)

*00*00

*o*o

(6,35)

2. Phasor Représentation. Integrala pentru T(u) sau T(υ) din Ec. (6.30) poate fi reprezentată ca o curbă în plan complex. O astfel de reprezentare este utilă și pentru alte probleme de difracție. Aceasta este o extensie a metodei de adăugare a fazorilor discreti utilizată în capitolul anterior. Aici scriem

ÍÍO

dT(u)

-ʌθ

Unde

dT(u) = e-i2nu'xdx

poate fi reprezentat ca un fasor în planul complex al Iength dx și al unghiului de fază

Fig. 4.15 Diagrame fazorice care arată reprezentarea grafică a integrai de difracție în limita de distanță. (a) Aproximație discretă, (h) Diagrama fazorilor continue. Pe măsură ce ne rotim în sensul acelor de ceasornic de la capătul din stânga, reprezentăm contribuțiile la integra! Începând de la marginea inferioară a fantei prin centrul fantei până la marginea de sus.

<5 = — 2πux. Integrala reprezintă suma fazorilor tuturor fazorilor infinitezimali dT(u). Putem aproxima dT prin fazorul finit, dar mic, ΔT. Atunci T este aproximat prin suma ∑ Δx elδ- Rezultatul este fazorul care leagă originea ΔT inițială cu sfârșitul ΔT final, așa cum se arată

în Fig. 6.15. Ca $\Delta T \to 0$, poligonul devine o curbă netedă care este un segment de cerc. Integrarea decurge de la $x = - x0$ la $x = x0$. Aceste puncte sunt identificate în Fig. 6.15h. Centrul curbei fazoare reprezentând deschiderea dreptunghiulară simetrică va fi la origine unde x0. Rezultatul este coarda segmentului circular și este egal cu T(u).

Lungimea totală a arcului curbei este dată de

$T(O) = dT(O) = 2x0$

Raza de curbură este dată de

dx

$\tau'' = Ts$ (636)

Fig. 6.16 Curbura diagramei fazoare depinde de valoarea lui u, care este o funcție de geometria asociată cu locația sursei și a punctului de observare.

(vezi Fig. 6.16). Aceasta cedează

r, =__________dx

$R - 2\pi u$ dx

1

$2\pi u$

Semnul minus înseamnă că curba este concavă în jos. Unghiurile de fază inițial și final δi și δf sunt date de

$\delta i = 2\pi u x0$ și $\delta f = - 2\pi u x0$ (6,37)

Unele dintre aceste curbe sunt prezentate în Fig. 6.17.

3. Modelul densității fluxului. Modelele de difracție în câmp îndepărtat pentru două deschideri dreptunghiulare sunt prezentate în Fig. 6.18. Distribuția densității fluxului urmează ecuația. (6,35). Din Ecs. (6.21) recuperăm dependența spațială în planul de observație. Presupunem aici că sursa se află pe axa z, astfel încât $\alpha = \beta = 0$ și $x = y - O$. Apoi coordonatele din planul x’, y’ mapează în u, υ ca

$x' = -R'0\lambda u$

și

$y' = - R,0\lambda v$

Lățimea maximului central poate fi definită ca fiind

I $\Delta x'$ I = $R'0\lambda$ Ли

unde Au se măsoară între primele zerouri adiacente maximului central.

Din Eq. (6.33) Δ(2πuxo) = 2π, deci

Au = ɪ

X0

(6,38)

Fig. 6.17 Diagrame fazorice pentru integrarea de difracție! față de u.

și IA /1 | Δx' | =-√- (6.39a) xo
La fel | Δy, | =-^~ (6.39b) Уo

Alternativ, putem exprima lățimea maximului central în termeni de

cosinus de direcție | Δα' | =4- (6.39c) X0

2⅛

I 12iθ

2j0 _ 2x0

Fig. 6Л8 Diafragmele dreptunghiulare și pătrate și modelele lor de difracție în câmp îndepărtat la două expuneri diferite. Este necesară o expunere mai lungă pentru a scoate la iveală părțile slabe ale modelului.

356 Difracția I

și

| Δ/r | =4- (6.39d)

Уo

Rețineți relația reciprocă dintre lățimea modelului și lățimea fantei. Aceasta, după cum vom vedea, este o Caracteristică generală a difracției care, în cazul câmpului îndepărtat, este reprezentată elegant de proprietățile transformărilor J7Otirier.

Dacă înmulțim ecuațiile. (6.39) prin l/x0 și l/j0, putem genera

și

Δx' R0 λ > ɪ x0 x⅛

Δy, = ɪ

yo   yo

(6.40a)

(6.40b)

Aceste inegalități rezultă din ecuațiile. (6.18), care sunt adevărate în limita câmpului îndepărtat. Vedem din ecuațiile. (6.40) că dimensiunile modelului de difracție Fraunhofer sunt mult mai mari decât cele ale deschiderii de difracție. Acest rezultat este valabil numai pentru difracția care are loc la distanțe mari fără utilizarea unei lentile.

Dacă deschiderea este foarte lungă în direcția y (cu sursa rămânând într-un punct), atunci lățimea modelului în direcția y va fi foarte îngustă. Când y0 > λ putem ignora difracția în această direcție. Apoi v = 0, implicând astfel că y, = 0. Acest lucru ar fi demonstrat la R1 foarte mare sau în planul focal al unui Iens folosit pentru a aduce modelul în dozator la planul deschiderii. În aceste circumstanțe, modelul este doar o funcție a lui и

/ X x' \ 1 α — a' cos θr — cos θ' U = --------1---- - =------=------- i- --------

yΛ0   R'o J λλλ

Dacă, în plus, β = β' = 0, atunci problema poate fi rezolvată în planul xz, iar eos θx = sin θz, eos θ,x = sin θ'2, deci în acest caz

sin θz — sin θrz

(6,41)

Rețineți că, dacă sursa a devenit o linie infinită paralelă cu axa y la coordonatele (x, z) = (x, — D) și fanta ar fi, de asemenea, infinit de lungă, ar trebui să înlocuim factorul de amplitudine

RqqRqo 2   -Rqo^oo

_   _ R0R00

Aceasta provine din Caracteristicile undelor cilindrice. În practică, aproximarea undei sferice este mai bună, chiar și pentru o sursă sub forma unui segment de linie finită. În cazul câmpului îndepărtat, distanțele R00 și R00 sunt suficient de mari încât orice caracteristică a undei cilindrice să fie minime. Fronturile de undă sunt în esență plane.

C. Diafragma circulară

Deschiderile circulare apar în multe instrumente optice, iar difracția Fraunhofer pe care o produc poate juca un rol important în performanța acestor instrumente.

Figura 6.19 arată piatra de deschidere cu coordonatele r și identificate. Deschiderea este caracterizată de funcția de transmisie

r<r0 În caz contrar

(6,42)

Unde

X = f COS

y = r sin $

De asemenea, este util să definiți coordonatele polare circulare care sunt legate de и și v de

и = p cos ϕ'

V = p sin φ,

Apoi

În cele mai multe cazuri vom presupune că sursa se află pe axa optică astfel încât x - y = 0, atunci

_ 1 r'

sin θ'z λ

(6,43)

Fig. 6.19 Coordonatele în planul deschiderii pentru o deschidere circulară.

Fig. 6.20 Definiția coordonatei unghiulare cu care este adnotat modelul de difracție cu deschidere circulară.

Unde

r' = λ/xz2 + y'2

este distanța radială în planul de observație de la axa z până la punctul de observare și θ'z este unghiul care identifică direcția de observare de la centrul deschiderii în raport cu axa z (vezi Fig. 6.20).

Trebuie să calculăm transformata Fourier a lui τ conform ecuației. (6,25). Elementul de zonă diferențială dσ devine

dσ = r dφ df

Acest lucru este identificat în Fig. 6.19. Factorul exponențial în integrând devine

$$\exp[-i2\pi(ux + \hat{u}y)] = \exp[-/2\pi pf(\cos\varphi' \cos\varphi + \sin\varphi' \sin \$)]$$

$$= \exp[-i2\pi pf \cos(\varphi - \varphi'J]$$

Ec. (6.25) este apoi reexprimată în coordonate polare circulare

$$T(p, \varphi') = fff \exp[- i2\pi r \cos(\varphi - \varphi')]\, df\, d\varphi \quad (6.44)\ Jo\ Jo$$

Ec. (6.44) poate fi evaluată cu ajutorul formulei

1 f2π

$$J_0(w) = T'' exP[\sim iw \cos(\varphi - \varphi')]\, d\varphi \qquad (6,45)$$

2 τι Jo

unde $J_0(w)$ este o Bessel Jiinction de ordin zero. Funcțiile Bessel apar în multe domenii ale științei și ingineriei ca soluții la ecuații diferențiale, în special în probleme în care condițiile la limită au simetrie circulară. Valorile numerice pentru funcțiile Bessel sunt tabulate în matematică! carti de referinta. Există, de asemenea, funcții Bessel de ordin superior $J_n(w)$ date de

dJn

$$w\sim + nJ_n = wJ_{n.l} \qquad (6,46)$$

sau alternativ de către

$$\Lambda = (-w)''\hat{}1\hat{}(w\sim<,,\sim\upsilon\ J_n\sim1) \quad (6,47)$$

Câteva valori utile ale funcțiilor Bessel cu n = 1 și 2 sunt date în Tabelul 6.1.

Tabi· 6.1 Valori utile ale funcției Bessel

W	Ji(w)	J2(W)	[2J1(w/w)]2
3,83171	0		0
5,13562	-0,33967	0	0,0175
7,01559	0		0
8.41724	+ 0.27138	0	0.00416
10,17347	0		0
11,61984	-0,23244	0	0,00160
13,32369	0		0
14,79595	+ 0,20654	0	0,00078

Cu Eq. (6.45) în Ec. (6.44), transformata Fcurier a funcției de găuri circulare, Eq. (6.41), devine

$$T(p) = 2\pi$$

$$rJ_0(2\pi pr)\, dr$$

(6,48)

care este independent de unghiul azimutal φ'. Acesta este rezultatul independenței unghiulare a funcției de transmisie a ecuației. (6,41). Schimbați variabila de integrare în w' — 2πpf pentru a obține

ɪ /•2πpr0

∏p) = 4—2 w'J0(w,)dw'

2πpz J0

(6,49)

Acest lucru poate fi evaluat prin manipularea Eq. (6.46) cu n = 1.

dJ1 r

w — + J1 =WJ0 dw

sau

d(wJ1)

A· =wj»

(6,50)

Ultima relație este ușor de integrat pentru a da

Í'W

w'J0(wr) dw' o

(6,51)

Aceasta este aceeași formă ca Eq. (6.49), astfel

∏P) = ^p2πpf0Jl(2πpr0)

sau

, J1(2πpf0)

τ^ = 2*r°^Γ

(6,52)

În centrul modelului de difracție p — 0. Din proprietățile funcțiilor Bessel găsim

Iim

w→0

1

2

Asa de

T(O) = τιr2

Prin urmare, din Ec. (6.27), câmpul electric în modelul de difracție este

E'(p) = F(O)

2Jι(2πpf0) ~P'
2πpr0 |_*'oj

gi(Φθ ~ ⅛>oo)

(6,53)

iar densitatea fluxului de energie medie în timp va fi

S'(p) = F(O)

2J1(2πpr0)TΓ P'Ύ

2πpf0 J |_K'0_

(6,54)

Unde

p = (sin θ'z)/λ = —Ц-

Factorii funcției Bessel din ecuațiile. (6.48) și (6.49) sunt reprezentate în Fig. 6.21. Comportamentul general este similar cu cel al sinusului și (sinusului)2, dar „picioarele” dincolo de prima

Fig. 6.21 Model de difracție în câmp îndepărtat pentru o deschidere circulară.

zero sunt mai slabe. Optzeci și patru la sută din suprafața totală sub (2J1(w)/w)2 se află în primul maxim. Celelalte maxime sunt considerabil mai slabe. Maximul principal dă un model circular numit disc Airy. Raza sa corespunde valorii lui w la primul zero al lui J1(w), care este

w ≡ 3,83171 =2π⅛S

Raza discului este

, _ 0,6 W0 7" disc ~

r0

(6,55)

Observați din nou relația inversă dintre dimensiunea deschiderii și dimensiunea modelului de difracție. Măsura unghiulară a maximului central este

Δθ'z ~ Δ(sin θɔ = θ'αɪ^   (6,56)

ro

Celelalte zerouri pot fi evaluate cu ajutorul tabelului 6.1. Pentru a calcula razele maximelor avem nevoie

d / Jι(⅜v) \= θ dw \ w J

d /J 1(w) \= _ /J2(W)' dw \ w)   \ w

(6,57)

Prin urmare, Jɪ(w) va avea o extremă unde J2(w) este zero. Aceste valori ale lui w se găsesc și în Tabelul 6.1.

6.3 Analiză Fourier

Matematica difracției în câmp îndepărtat sau Fraunhofer este cel mai convenabil tratată în cadrul analizei Fourier. Anterior, am definit doar transformata Fourier bidimensională ca integrală care trebuie evaluată atunci când aplicăm aproximarea liniară la termenul de fază în integrarea. Am văzut în secțiunea 6.2B2 cum transformata Fourier a unei funcții „cutie” de amplitudine unitară poate fi privită ca rezultatul unei curbe fazoare. Acest concept poate fi generalizat pentru a descrie orice funcție de transmisie printr-o sumă fazorială de piese incrementale, fiecare cu unghiul de fază adecvat și lungimea incrementală.

Aceasta este esența analizei Fourier. Considerăm transformarea ca o sumă ponderată. Fiecare componentă care reprezintă contribuția asociată cu factorul de fază e-i2π<ux + ,•v) este ponderată de factorul de amplitudine τ(x, y) (care poate, de asemenea, deplasa faza dacă τ este complex).

În Ec. (6.25) factorii de fază reprezintă diferențe între undele plane. Pentru a vedea asta scrie

exp[-i2π(ux + vÿ)] = exp{ — /A[(α

«')* + (/3 - β')y]}

Dar k<xx + kβy = k•r și ka,'x + kβ,y = k' · f, unde r este un vector de poziție în planul X y. Prin urmare, faza în integrând este

■ .; ι ^i(k' - k) - f _ z>'Δkf

Raportat la centrul deschiderii (f = 0), aflăm că faza undei difractate (în direcția lui k') în punctul r din deschidere diferă de faza undei incidente (în direcția lui k).) prin $\Delta k \cdot fv$

Datorită importanței sale în acest capitol și în următoarele capitole, prezentăm aici câteva dintre trăsăturile formale ale analizei Fourier. Cu detaliile matematice adunate într-un singur loc, va fi mai ușor, de acum înainte, să cităm rezultate din această secțiune. Am derivat în mod explicit forma transformării Fourier pentru două cazuri simple. Acum vrem să generalizăm procedura.

A. Definiții de bază în analiza Fourier

În această secțiune folosim forma/(x, y) pentru a sublinia generalitatea analizei Fourier. Când este aplicată la difracția în câmp îndepărtat, funcția adecvată este τ(x, ÿ).

1. Funcția Delta. Una dintre cele mai importante funcții ale căror caracteristici de transformare Fourier vom avea nevoie este aceea care reprezintă un singur punct, să spunem $X = x_0$, $y = y_0$, definit într-o zonă foarte mică (infinitesimală) $\sigma_0(x_0, y_0)$

dacă X, y este în $\sigma_0(x_0, y_0)$

In caz contrar

(6,58)

Transformarea Fourier bidimensională a acesteia este

F(u, v) —

J/(χ, y)e-i2Mux + vy) dχ dy =

p-i2π(uxo + vyo)

(6,59)

Deși nu este o funcție adevărată în sensul riguros al cuvântului, definim ceea ce se numește funcție delta pentru a descrie acest comportament prin setarea

/(x, y) = $\sigma_0\, \delta(x - x_0)$ <5$(y - y_0)$ (6,60)

Scriem <5$(x - x_0)$ și $\delta(y - y_0)$ ca funcții delta pentru o dimensiune. Ele reprezintă un „impuls” situat unde argumentul este egal cu zero. Funcția delta are câteva proprietăți speciale pe care trebuie să le prezentăm acum.

A. Caracteristicile filtrului. Funcția delta acționează ca un filtru care selectează o singură valoare dintre cele posibile în intervalul de integrare. Strict vorbind, funcția delta nu are semnificație matematică decât dacă este utilizată împreună cu o integrare. Cu condiția ca intervalul de integrare să includă x_0, avem

/(x) δ(x - x0) dx =f(x0)

(6,61)

Dacă x0 este în afara intervalului de integrare, atunci integrai este zero.

,,   , /(0)

<5(x)dx = — \b\

b.   Relația de scalare. Pentru valorile reale ale constantei b putem demonstra că

δ(bx) =   (6,62)

ll

Aceasta urmează direct în fața definiției din Ec. (6,61)

J'X2 1 (,X2 | b /χ |

f (x)δ(bx) dx = -   f -

Xi   bJχ1/b \b

Un caz special în vol ves b — — 1. Atunci δ(- x) = <5(x).

c.   Reprezentări. Deoarece funcția delta nu este o funcție adevărată, trebuie să fim atenți când scriem o formă analitică care ar putea să o înlocuiască în calcule. Putem identifica familii de funcții care se apropie de comportamentul unei funcții delta într-o anumită limită. O astfel de familie de funcții se numește reprezentare a funcției delta. Acestea trebuie să aibă vârfuri puternice, tinzând spre înălțime infinită și Lățimea zero pe măsură ce se apropie de Iimit. De asemenea, trebuie să se integreze la unitate, deoarece din Ec. (6,61)

∫ ¿(%) dx — 1

Un exemplu în acest sens este o secvență de funcții gaussiene (Fig. 6.22)

<5(x) = Iim -ʌ= exp(— b2x2)   (6,63)

b→∞ ʌ/71

Asb → ce, această funcție este zero peste tot, cu excepția lângă x — O. Acolo se apropie de oo. Putem arăta și noi

exp(— b2x2) dx — 1   (6,64)

dacă integrarea include x = 0.

<5(x) dx = —=

■J π

Fig. 6.22 Reprezentarea funcţiei delta printr-o succesiune de profile gaussiene cu înălţime crescătoare şi lăţime descrescătoare.

Un alt exemplu pe care l-am întâlnit deja [Eq. (6.31)] este

Îb

e-ι2πux Jχ (6,65)

-b

Oscilațiile, cu perioada 1/b, se atenuează rapid, pierzându-și semnificația ca b → oo.

De asemenea, va fi convenabil să aveți o reprezentare care este exprimată ca integrală peste o variabilă pozitivă

Îb

cos(2πux) du = Iim b sinc(2πhx) (6,66)

O b→ oo

2. Fourier Intégrais. Înarmați cu reprezentările funcției delta, suntem acum gata să examinăm transformata Fourier mai îndeaproape.

A. Integrală Fourier complexă. Acesta este forni pe care le-am definit deja în Eq. (6,25). Să oficializăm această definiție.

Luați în considerare o funcție/(x), care poate fi complexă, cu proprietățile următoare:

1. Este „integrabil pătrat”, adică limita integrală

*o

| /(x) | 2dx (6,67)

-ɪo

există asxo→oo.

2. Funcția este continuă și df/dx există la toate, dar un număr finit de puncte în orice domeniu finit al variabilei x.

În practică, aceste condiții sunt îndeplinite de orice funcție care reprezintă o mărime fizică. Frecvent, însă, folosim funcții nefizice din cauza simplității lor. Exemple în acest sens sunt funcția delta, funcțiile sinus și cosinus infinit și o constantă care există la toate valorile bf x. În aceste cazuri, așa cum am făcut pentru reprezentarea

funcției delta, putem defini o familie de funcții care se apropie de funcția dorită pe măsură ce se atinge un Iimit. Dacă definiția este aleasă astfel încât fiecare membru al familiei să îndeplinească condițiile (1) și (2), atunci Iimit-ul poate fi luat după ce integrala Fourier a fost evaluată.

În aceste condiții, transformata Fourier generalizată

F(u) =

l• ∞

/(x) e~l2πux dx

(6,68)

există și este continuă la toate, dar un număr finit de puncte în orice domeniu finit al variabilei reale u. În punctele de discontinuitate, integrala converge către media dintre mâna dreaptă și mâna stângă Iimits.

Pentru a determina/(x) din F(u), înmulțiți ambele părți ale ecuației. (6.68) prin ei2πux' și integrează ambele părți în raport cu u.

F(u) ei2πux' du =

, ∞   /* 00

f(x) el2πux' e~l2πux dx du

~ 00 J — ∞

Schimbarea ordinii integrărilor din partea dreaptă înseamnă

F(u) el2πux' du =

f(x)

ei2πu(x'-χ) du

dx

Din Eq. (6.65) vedem că factorul dintre paranteze este o reprezentare a lui δ(x' — x). Astfel, partea dreaptă devine/(x') și (prin eliminarea primului) avem

f(x) =

F(u) ei2nux du

(6,69)

Variabilele x și и se numesc perechi de variabile Fourier. Ele trebuie să fie în unități care sunt inverse una față de cealaltă. Rețineți că

dacă/(x) este fără unitate, atunci F(ü) trebuie să aibă aceleași unități ca x.

Este adesea convenabil să adoptați o notație care să ia locul integralei în Ec. (6.68) pentru a indica operația de transformare Fourier

De asemenea

F(u) ≡ ^[/(x)] ≡

f(x)e

— i2πux

dx

(6,70)

f(χ) ≡ & 1[F(u)] ≡ f F(u)el2πtixdu

J-OO

(6,71)

denotă operația de transformare inversă.

b. Formă bidimensională. În difracție avem de-a face cu funcții bidimensionale. Acestea au fost condițiile în care am definit prima dată transformata Fourier în Ec. (6,25). Pentru completitudine, trecem în revistă aici formele bidimensionale ale ecuațiilor de transformare și transformare inversă.

^^Lf(x, y)] = F(u, v) =

OD

∫ f(x, y) e^l2π<ux+vv) dx dy

— ∞

(6,72)

Jr 1[F(u, t?)] =f(x,y) =

F(u, y) et2π<ujc+vy) du ¿v

(6,73)

Dacă/(x, y) poate fi scris ca fi(x)f2(y), spunem că fis „separabil”. În acest caz, ca și pentru funcția de transmisie dreptunghiulară cu care ne-am ocupat deja, transformata Fourier va fi, de asemenea, separabilă. Cu alte cuvinte, F(u, v) devine F1(u)F2(v). Pentru Simplitate, vom dezvolta Caracteristicile transformării Fourier în cazul unidimensional. Aceste rezultate pot fi aplicate direct problemelor bidimensionale separabile.

În general, forma lui/(x, y) nu permite independența integrărilor x și y. Așa a fost cazul deschiderii circulare. Acest lucru a dus la un rezultat destul de complicat. Din fericire, acesta este de departe cel mai comun exemplu. Alte cazuri trebuie să fie calculate sau deduse în mod explicit utilizând principiul lui Babinet.

Analogi bidimensionali există pentru toate caracteristicile transformatei Fourier pe care le vom examina în detaliu pentru o dimensiune. Acestea vor fi colectate la final în formă tabelară.

c. Integrală Fourier reală. Dacă f(x) este real, atunci putem stabili o transformare Fourier echivalentă care se bazează mai degrabă pe suprapunerea sinusurilor și cosinusurilor decât pe exponențiale complexe. Presupunev

/*ω =/ω

Apoi luăm conjugatul complex al Eq. (6,70)

Í00

f(x).e,2*ux dx = F(— u)

— 00

Acum scrieți F(u) în termeni de valoare absolută și factor de fază:

F(u) = |F(u)| eieM

Ecuația (6.74) implică faptul că

|F(-u)| = |F(u)|

și

0(— u) - — 0(u)

Atunci putem scrie

/(x) = Re /(x) = Re i F(u) ei2πux du

J — 00

= Re| |F(u)| eii2πux+θ<undu

= I IF(u) I cos[2πux + 0(u)] du

= 2 f |F(u)| cos[2πux ÷ 0(u)J du Jo

Acesta poate fi rescris sub formă

Í'00

$[2|F(u)| \cos \theta(u)] \cos(2\pi ux)$ du o

J'oo

$[-21\ F(u)\ I \sin \theta(u)] \sin(2\pi ux)$ o

Acum definiți

$F_c(u) \equiv 21\ F(u)\ I \cos \theta(u) = 2\mathrm{Re}\, F(u)$

(6,74)

(6,75)

(6,76)

(6,77)

(6,78)

(6-79)

(6.80a)

și

$F_s(u) \equiv -2|F(u)| \sin \theta(u) = -2\mathrm{Im}\, F(ù)$

Din ecuația (6.68) acestea sunt

i∞

$f(x) \cos(2\pi ux)\, dx$

$-\infty$

(6.80b)

(6.81a) ɪ

și

Í00

$f(x) \sin(2\pi ux)\, dx$

$-\infty$

(6.81b)

Acestea sunt cunoscute ca transformata Fourier cosinus și sinus a lui /(x). Ec. (6.79) devine

$/(x) = F_c(u) \cos(2\pi ux)\, du + F_s(u) \sin(2\pi ux)\, du$ J0 Jo

(6,82)

3. Caracteristicile transformatei Fourier. Mai târziu va trebui să aplicăm unele dintre proprietățile fundamentale ale transformării Fourier. Le colectăm aici pentru comoditate.

A. Liniaritate. Această proprietate decurge din conceptul de suprapunere liniară pe care au fost definite integralele Fourier. Prin urmare,

^r[a1f1(x) + «2 fi Wl = αiʃ'i(") + ^2f2(u)   (6•83)

Unde

Fι(u) = ^[f1(x)] și F2(u) = ^[f2(x)].

b. Relație reciprocă. Această caracteristică importantă se manifestă în multe fenomene fizice. Aceasta implică o interpretare a operațiilor de scalare pentru perechile de variabile Fourier.

^[f(ax)J = Rax) e^i2πux dx

Cu o schimbare a variabilei în integrarea la x' = ax avem

Ifto /и \

^Lf(ax)l = π-rf(x') exP ~ j2π - x' dx'

MJ-oo   \   aJ

care poate fi scris ca

W(∞)] = Λf |

|α |'

и

A

(6,84)

Aceasta arată că schimbarea de scară apare sub formă reciprocă în transformarea Fourier. Dacă extindem funcția/(x) cu factorul de mărire a, atunci

Transformarea Fourier apare la fel, cu excepția faptului că va fi redusă în amplitudine și va fi comprimată cu factorul 1/a.

Un caz special este atunci când a = – 1. Atunci

W(-χ)] = nu)

c Conjugarea. Prin aplicarea directă a operației complexe de Conjugare putem demonstra că

i∞

/*(x)e-i2πux dx =

~ CO

'oo "eu*

f(x)ei2πux dx ≈F*(-u) (6,85)

– CC

d. Schimbare. Această proprietate foarte importantă ne permite să calculăm transformarea lui/(x – x0) sau transformarea inversă a lui F(u – u0) unde x0 și U0 sunt constante. Acestea sunt exprimate în termeni de trânsforma sau transformarea inversă a funcției respective nedeplasate.

_ ^~i2πu×o

Í00

f(x - x0)e~i2πux.dx

ffx – χ0)β_,2π“(χ“χo) dx

– CC

Acum Iet x' – X – X0 în integrală, care devine

f(x')e~i2πux

dx' = F(ü)

Prin urmare5

– X0)] = e l2πuxo F(u)

(6,86)

Într-o manieră similară putem dovedi că

1[F(u – u0)] = e,2πu°x ffx)

(6,87)

e. Aplicație repetată. Să presupunem că am calculat transformata Fourier a lui /(x) ca fiind F(u). Acum calculați transformata Fourier a lui F(u). Aceasta trebuie să aducă o funcție care depinde de o variabilă cu aceleași unități ca x, să spunem x'.

J^[F(u)] =

12πux dx du

e-i2π(x + x')u du

dx

* CC

f (x) ¿(x + x') dx

= /(-x')   (6,88)

Pe de altă parte, operația de transformare inversă dă funcția originală.

/• ∞

^~1[F(u)] = e

2πux dx du

dx

f(x) <5(x — x') dx

= f(χ')   (6,89)

f Conservare. Ecuația (6.69) arată că f (x) poate fi descompusă într-o integrală în „spațiul u”. Coeficienții F(w) sunt factorii de ponderare. În modelul de difracție, mărimea măsurată, densitatea de putere a radiației, este proporțională cu | F | 2. Densitatea de putere incidentă trebuie să fie proporțională cu | / | 2. Dacă integrăm aceste două funcții peste variabilele lor respective, и pentru F și x pentru/, ar trebui să obținem același rezultat. Acest lucru este cerut de conservarea energiei. Să demonstrăm acest lucru Hiatematic.

1 00 Λ 00

IF(u)|2 du =

- 00 J - 00

f(χ)f*(χ') δ(x, — x) dx dx'

du

dx dx'

| /(x) | 2 dx

(6,90)

Această afirmație de conservare este frecvent numită teorema ParsevaPs.

4. Convoluție. Frecvent, în optică și în alte domenii ale științei fizice, trebuie să combinăm influența a două funcții. Aceasta poate lua forma, de exemplu, a unui rețele de interferență care constă dintr-o serie de deschideri cu lățime finită. Știm deja cum să descriem efectele interferenței cu fascicul multiplu în cazul în care fantele de Infinitesimally mici și știm cum să descriem modelul de difracție pentru o singură fante cu lățime finită. Modelul care va fi produs de grătarul realist este rezultatul acțiunii celor două fenomene împreună.

Acest exemplu, ca și multe altele, pot fi tratate prin conceptul de convoluție. Când întorc două funcții, rezultatul este o a treia funcție care poate fi definită formal ca

$g(\chi) \equiv$

$f_1(\chi,)f_2(x - x')\, dx' = f_1 \circledR f_1$

(6,91)

Acest proces este ilustrat în Fig. 6.23. Funcția rezultată g are Caracteristici ale

/2

Fig. 6.2S Convoluția a două funcții prezintă o asemănare cu fiecare dintre funcțiile componente.

ambele funcții de intrare, /1 și f2. La o valoare specificată a lui x, Convoluția reprezintă aria produsului dintre /1(x') și/2(x – x'). Pe măsură ce x se modifică, deplasarea relativă a celor două funcții de intrare se modifică, modificând astfel produsul și aria produsului.

În două dimensiuni, Convoluția ia forma

$f_i \circledR f_2 \equiv$ j $f_1(x', y')f_2(\times - < y - \int') ¿x'\, dy'$

– 00

(6,92)

(iii)

A. Caracteristici de convoluție. Operația de convoluție pentru funcții reale afișează câteva proprietăți fundamentale pe care le enumeram aici fără dovezi. Demonstrarea acestor declarații sunt exerciții directe.

Иfı(×) an<i f2(χ) sltq funcții cu valori reale și dacă/1(x)(*)/2(.x) = g(x), atunci

(ɪ) $f_2(x) \circledR f_i(x) = g(\chi)$ (6,93)

(iɪ) fι(x - xo)®f2(x) = 9<x - ×o)(6,94)

/ι(αx)θ/2(αx) = ɪg(αɪ)

(6,95)

b. Teorema de convoluție. Operația de convoluție este adesea complicată, chiar și pentru funcții componente simple. Cu toate acestea, când se examinează transformata Fourier a unei convoluții, se dovedește a fi foarte simplă.

Să presupunem că ^[/i®/2] = ^Lgl = G(u).

Apoi prin substituție explicită găsim

fi(χ')f2(χ ~ *') dχ' e l2πux dx

Acum putem aplica Ec. (6.86) la aceasta.

Í0O

/1(x') [e^i2π"x'F2(u)] dx'

Dar F2(u) poate fi eliminat din integrala Ieaving

= F 1(u)F2(u) = G(u)

(6,96)

Rezultatul este doar produsul transformărilor Fourier ale funcțiilor componente. Aceasta se dovedește a fi un rezultat foarte util.

O relație complementară poate fi derivată luând în considerare transformarea inversă a convoluției a două transformări Fourier.

Defini

/• 00

G(u) ≡   F1(u')F2(u - u,) du, = Fi ®F2

astfel încât

& 1[F1(*)F2] = Jsr 1[G] = g(x),

apoi

^~1[F1®F2] =fl(x)f2(x)

sau echivalent,

^Lfι(χ)f2(x)l = F,® F2

(6,97)

Această formă a teoremei de convoluție este la fel de utilă.

5. Corelație. O altă cantitate utilă poate fi dezvoltată pentru a descrie gradul în care două funcții „se potrivesc”, deoarece sunt deplasate una față de cealaltă. Acest lucru este strâns legat de Convoluție, dar prezintă câteva diferențe importante. Pentru două funcții, în general complexe, definim corelația încrucișată ca

fi ®fi ≡

fι(χ')fι(χ, - χ) dx'

(6.98a)

Cu substituția x" = x' — x, aceasta poate fi scrisă și ca

f,   Sf2 ≡ f1(x + x")f‰") dx"(6.98b)

J — OO

Trebuie să fim atenți la ordinea în care sunt scrise funcțiile și la care dintre cele două funcții intră în integrarea în forma conjugată complexă.

În două dimensiuni, integrala de corelație încrucișată are forma

∞

/1   ≡ ∫∫ fi(χ', yn)f*(χ' -x,y' - y) dx' dy'(6,99)

- 00

Când fi și J2 sunt aceeași funcție, atunci avem integrala de corelare automată. Aceasta o notăm prin

y≡fφf

(6.100)

Autocorelația va fi întotdeauna cea mai mare la x — O.'. Aceasta reprezintă condiția în care funcția nu este deplasată față de ea însăși. Aici produsul în integrare este cât se poate de mare pentru toate valorile intervalului de integrare. Pe măsură ce deplasarea relativă crește, autocorelația va scădea în funcție de amploarea și forma funcției inițiale.

Transformata Fourier a corelației poate fi evaluată Pornind de la Ec. (6.98b)

Wi ®/2] = Γ Γ Λ(x + x")/!(x") dx"e~i2πux dx

J „ 00 J-OO

f2(x")e~i2πux" dx"T

= F1(u)F*(u)

(6.101)

Un caz special al acestei relații implică autocorelația unde Ec. (6.101) devine

Wl = ® Л = | F(u) | 2 (6.102)

Această relație este cunoscută sub numele de teorema Wiener-Khintchine. Importanța autocorelației este evidentă din aceasta. Putem vedea prin comparație cu Ec. (6.28) că densitatea de putere în diagrama de difracție în câmp îndepărtat este proporțională cu IFp, unde atât F, cât și y se referă la funcția de transmisie în planul deschiderii. Aceste concepte își asumă un rol și mai important atunci când discutăm teoria coerenței în capitolul 8.

6.4 Exemple de analiză Fourier în difracție

Am văzut că analiza difracției în câmp îndepărtat se referă în principal la specificarea funcției de transmisie la deschidere și la calculul transformării sale Fourier. Aici colectăm rezultatele analizei Fourier din secțiunile anterioare, oferim câteva extensii utile și discutăm despre aplicarea acestor concepte în câteva probleme importante de difracție.

A. Fourier Rezumat

Un rezumat al proprietăților transformării Fourier în una și două dimensiuni, împreună cu perechile de transformate pentru mai multe funcții utile, este prezentat în Tabelul 6.2.

Rezultatele tabelului 6.2 pot fi extinse folosind teorema de convoluție pentru a găsi transformarea funcțiilor mai complicate. De exemplu, luați în considerare Convoluția a două funcții de casetă identice, așa cum se arată în Fig. 6.24. Rezultatul este o funcție triunghiulară. Scriem acest lucru în formă adimensională ca

g(χ) = ɪ∫(*) ®/W

ZX0

(6.103)

Fig. 6.24 Convoluția a două funcții „cutie” identice este o funcție triunghiulară.

Tabelul 6.2. Proprietățile transformării Fourier

One Dimensiune

/(x) = IF(u)ei2*uxdtι F(U) = J" J \ x)e-,2^xdx
/(UX) i'.i fCO
/*U) F*(-u)
ʃ(ʌ' - ʌ'o) C-i21tuvoF(U)
Oi2ltuoV(X) F(u - u0)
Λ ® J2 FiF2
Af2 F1 ®) F2
A ® A. FlF↑
Două dimensiuni
f(xy) = Ij F(u, v)ei2*{ux + ry}du dy F(u, v) = ʃʃ /(x. y)c^i2,tlu•v + ,'v'i/x dy
f(ax, cy) 11V ή I<1 | I<- | (o e)
f*(χ, y) F*(-и. -г)
f(x - x0, y - y0) t, - i 2 π(u.xo + rvo) J2(u rj
cι2π(uox + ιly)^^γ y) F(u - u0, г - ι•0)
Šɪ ® f2 FiF2
Af2 F și ® F2
fl ® f2 F1F?

Exemple unidimensionale

<5(x)

1

cos(2πu0x)

sin(2πu0x)

gilmtox

exp(— πb2x2)

'e~xb X ≥ 01

O x < OJ

1

<5(u)

1

- [<Xu - u0) + b(u + U0)]

1

~ [<5(u - u0) - δ(u + u0)]

¿(u - U0)

2x0 sinc(2πux0)

(b + i2πu) 1

Tabelul 6.2 (continuare!)

Exemple bidimensionale

$4x_0y_0$ sinc($2\pi ux_0$) sinc($2\pi t \cdot y_0$)

exp[- πb^2r^2]

$2J_1(2\pi pr_0)$

πrח - _ ------

'O ɔ

$2\pi pr_0$

Când se aplică difracției în câmp îndepărtat, atunci f → τ, F → T1 și x → x. Ecuația (6.103) ar prezenta forma funcțională, de exemplu, a amplitudinii câmpului electric pe o fante lungă de lățime $2x_0$ care a fost acoperită cu un filtru de transmisie cu densitate variabilă. Utilizarea teoremei de convoluție ne permite să notăm imediat transformata Fourier

o

(6.104)

Aceasta ar fi legată de intensitatea câmpului în modelul de difracție în câmp îndepărtat prin Ec. (6.41) – sin θ'2 = λu – sin θ2. Densitatea de putere rezultă din Ec.

(6,28).

2

K_0K_0

sinc4($2\pi ux_0$)

Un alt exemplu este prezentat în Fig. 6.25, unda cosinus trunchiată. Acest lucru este de fapt de o utilizare mai practică în analiza Fourier a dependenței de timp a semnalelor optice. Acesta se formează ca produs al unei unde cosinus infinit și al funcției casetei. Aici f_1 = cos(2πx/xo). Transformarea Fourier a acesteia este

Transformarea unui produs este convoluția transformărilor astfel,

G(tι) =

1

1

= XfJ sinus 2π[и — — Ì \ ¼

+ sinus 2π(ul-----

V ¼

(6.105)

Fig. 6.25 Produsul funcției „cutie” de înălțime a unității și a unui cosinus infinit Funcția este un cosinus trunchiat.

Vedem că rezultatul trunchierii este de a „unta” comportamentul singular al funcțiilor delta, înlocuindu-le cu funcții sinus. Acest lucru este ilustrat în Fig. 6.26. Acest efect este o urmare a Incertitudinii fundamentale implicate în Specificarea perioadei unui val trunchiat.

Fig. 6.26 Transformata Fourier a celor trei funcții din Fig. 6.25. Rezultatul este convoluția transformării cu două componente.

B. Teorema matricei

1. Rezultat general. Una dintre cele mai utile aplicații ale teoremei de convoluție

se găsește atunci când unul dintre membrii aceștia este o sumă de funcții delta. Pentru a vedea asta scrie

i∞

fι(x') ∑ δ(x -x, - xm) dx,

— ∞   m

≈∑fJl×-×.'>   (6.106),

m

Aceasta reprezintă o adăugare liniară de funcții, fiecare dintre acestea având forma locai /1(x), dar mutată la noi origini care sunt identificate prin xm. Acest lucru este prezentat în Fig. 6.27 pentru m — 1, 2, 3.

Printr-o aplicare a teoremei de convoluție, transformata Fourier a lui 0(x) este

G(u) - ^rEΛ(x)]Js^ ∑ δ(x - xm)

= Fl(u) ^e~i2πux"' m

(6.107)

Rezultatul transformat al funcției de locație deplasată spațial este doar produsul

*2

Fig. 6.27 Convoluția unei funcții locai /1 cu o colecție de funcții delta este o colecție de funcții locai centrate pe pozițiile funcțiilor delta. Aceasta ilustrează conceptul din spatele teoremei Array.

transformarea funcției locale și a unui factor de fază. Acest rezultat se numește teorema Array. În două dimensiuni

G(u⅛= F1(u, v)∑e~i2n<uxm+vy'">   (6.108)

m

Unde

g(χ, y) = ∑fι(χ - χm,y- y^)

m

se formează prin translația /1(x, y) în (xm, ym) pentru fiecare m.

2. Fata dublă a lui Young. Teorema Array ne permite să găsim transformata Fourier și, prin urmare, modelul de difracție în câmp îndepărtat, asociat cu funcții de transmisie care reprezintă o combinație de găuri identice. De exemplu, luați în considerare

τ(x) = τ1^x -   + τ1(x +(6,109)

unde τ1 este funcția casetă cu lățimea b,

. .. I>· '«'I

În acest exemplu, τ(x) prezentat în Fig. 6.28 ar fi funcția de transmisie pentru o pereche de fante care au fost separate prin distanța de la centru la centru a și care aveau fiecare lățime b. Aceasta este situația realistă în geometria experimentului de interferență al lui Young. În capitolul 5 am ignorat lățimea finită a fantelor, presupunând că doar o undă Huygens a provenit la fiecare. Acest lucru ar fi echivalent, în situația actuală, cu setarea τ(x) oc <5(x). Acum suntem echipați pentru a investiga influența difracției asupra experimentului lui Young.

Conform Eq. (6.107)

T(u) — b sinc(πuh)[e+,πuo + e-iπuα]

T(u) — b sinc(πuh) 2 cos(πuα)   (6.110)

Fig. 6.28 Funcția de transmisie adecvată pentru experimentul cu dublă fante a lui Young unde lățimea fantelor este finită.

Densitatea fluxului va fi

S'(μ) = S(O)

*oo*oo

R0Ro

\ T(u) \ 2

| T(0) | 2

5'(0)

, RooRoo

RoR'o

sinc2(πuh) cos2(πwa)

(6.111)

Acesta este reprezentat grafic în Fig. 6.29. Vedem că termenul cos2(πwα) este identic cu Eq. (5.30) în care a fost luată în considerare interferența de la fante infinit înguste. Aici avem

πα . n

= T (sm θz ~sın

-δ

2

unde <5 a fost introdus în Capitolul 5. Maximele se găsesc pentru cos2(πuα) = 1 sau la

Ttua — π (întreg), apoi, în concordanță cu convenția noastră stabilită

Z · Π,   - Z1 ч

(sin θz - sin θz) = — (6,112)

Interferență

Fig. 6.29 Modularea modelului de interferență în experimentul lui Young în cazul în care fantele au lățime finită.

Acest factor este modulat printr-o Funcție de anvelopă sinc2(πufi) care se datorează difracției. Lățimea maximului central al plicului este invers proporțională cu lățimea fantelor. Plicul este zero unde sinc2(πufi) — 0 sau at

Ml Λ ZZ 1 1 ɔ \

(sin θ'z — sin θz) = -y   (6• 113)

Pentru fante mici, maximul central este suficient de mare încât multe franjuri de interferență să se potrivească în limitele sale. Acest efect a fost implicat în capitolul 5. Fără difracție în acea dezvoltare, nu ar exista nicio modalitate de a se suprapune contribuțiile celor două fante. Înțelegem acum originea ipotezei de suprapunere care a fost făcută în capitolul 5.

Lățimea b a fantelor trebuie să fie I mai mică decât separarea a dintre fante. Henee, după cum se poate observa prin stabilirea nï = m = 1, primul zero în factorul de difracție trebuie să apară la o valoare mai mare de (sin θ'z — sin 0z) decât primul maxim al factorului de interferență. Cel puțin trei franjuri de interferență vor apărea sub plicul central. Zerourile din modelul de difracție pot coincide cu maximele din modelul de interferență. Acest lucru determină fenomenul comenzilor lipsă. Acestea vor fi găsite la

• zi ■ ZI \   m'λ

(sin θz — sin θ2) = — — l

ab

sau pentru

A

m = -m   (6,114)

b

unde atât m cât și m' sunt numere întregi.

3. Funcții periodice. O clasă importantă de funcții reprezintă deschiderile comune care implică periodicitate. Acesta este un caz special cu care teorema Array poate fi de ajutor. Fie /1 conturul definit local al unei funcții periodice unidimensionale astfel încât /1(x) este definit pe intervalul -a|2 până la α/2. Apoi, prin deplasarea acestei funcții prin N multipli integrali ai lui a, generăm un comportament periodic în intervalul Na.

N

f(*)= ∑ fi(x - xД unde χn = (∏- l)α   (6.115)

n= 1

Câteva exemple de funcții periodice sunt prezentate în Fig. 6.30. Ar trebui să fie evident că f(x) = f(x + ma), cu m un întreg.

A. Periodicitate finită. Aceasta este situația practică, căci nicio funcție care reprezintă o mărime fizică nu poate fi cu adevărat infinită. Cel mai important exemplu este grătarul. Am studiat deja acest lucru în capitolul 5. Totuși acolo, așa cum a fost cazul geometriei lui Young, lățimea unei singure fante a fost presupusă a fi zero. Aici vor fi explorate proprietățile diferitelor contururi de fante.

repara)

Л_..П _П_П_∏→,

Fig. 6.50 Exemple de funcții periodice.

Aplicarea teoremei Array la o funcție de transmisie cum ar fi Eq. (6.115) găsim

v

T(u) = T1(U) X e-^u(nl)a   (6.116)

n — 1

Schimbând indicele de însumare și reintroducând <5 = — 2πua, aceasta devine

T(u) = T1(U)^eim0

m = 0

Această sumă a fost deja evaluată în Ec. (5.37c), unde am derivat

N-1

X e'm 15 = ei(Ni)δ/2

m = 0

(6.117)

Acum presupuneți că N este un întreg impar. Acest lucru va fi necesar atunci când studiem cazul unei Funcții infinit periodice. Acum ne putem deplasa originea la x = (N — l)a/2 ≡ Δx. În mod echivalent, ne putem imagina că modelul reprezentat de τ(x) este deplasat cu — Δx. Acum problema este simetrică. Realizăm acest lucru în sensul Formei prin modificarea τ(x) → τ(x + Δx). Din proprietățile transformării Fourier din Tabelul 6.2 vedem cum această modificare afectează transformarea Fourier: T(u) → T(u)ei2πu ∧ɪ = T(u)e~lδ^xla \ Cu această informație și Ec . (6.116) găsim

sau

T(u) = T1(u)eiw~1W2

ei(N-l)<5/2

T(U) = T1(u)

(6.118)

cu <5 = -2πua.

Recunoaștem cel de-al doilea factor din capitolul 5, unde a fost discutat rețeaua de interferență. Primul factor se datorează difracției și va modula modelul de interferență.

b. Periodicitate infinită. În cazul Iimitării Iictive când numărul de elemente repetate într-o funcție periodică ajunge la infinit, maximele la δ = 2πm sau I ua I = m în Ec. (6.118) devin „tepi” infinit de înalte, infinit de înguste.

→ ∑ δ(ua – m)   (6.119)

ш = - ɔo

Ecuațiile de tipul (6.118) iau forma

F(u) = F1(u) ∑ δ(ua-m)   (6.120)

Astfel transformata Fourier a unei funcții infinit periodice este nenulă numai pentru valorile lui и egale cu multipli integrali ai inversului periodicității spațiale a.

Semnificația acestui rezultat poate fi văzută atunci când scriem f (x) în termenii transformării sale Fourier și folosim Ec. (6.120).

f(x) = Fi(u) Σ

F1(u) δí и – - je,2πux du

\ A

im\ (x\ – exp i2πm -

\ fl/ \   aJ

Acest lucru poate fi scris sub forma seriei Fourier

/W ~ ∑ Fm exp

m =–ao

cu coeficientul Fourier dat de

_ 1   fm \ 1 Cal2[χ \

rm - Γ7 F1 — = —-   f \ χ) exp i2πm - dx

IflI \ aJ | αl Ja/2   \a)

(6.121)

(6.122)

C.   Rețeaua de difracție

1. Grătul general Revenim acum la Ec. (6.118) pentru transformata Fourier a unei funcții periodice finite. Fie ca aceasta să reprezinte funcția de transmisie pentru o rețea de interferență care constă dintr-o matrice de fante cu lățime finită. Câmpul îndepărtat

modelul de difracție va fi dat de Ec. (6.28) cu T(ù) determinat din Ec.

(6.118). Aici avem

T(O) = T1(O)N.

S'(u) = S'(0)

^00^00

K0K0

B(u)

(6.123a)

Unde

r, ∧ ! ɪi(w)l2

β°,,≡7W   (6123b)

este funcția blaze care descrie influența difracției asupra modelului. Dacă $\tau_1(x)$ = <5(x), atunci $T_1(u)$ = 1 și B(u) = 1. Aceasta ne întoarce la cazul special tratat în Capitolul 5. Comportamentul ecuației. (6.123) este atunci exact aceeași cu Eq. (5,44). Toate argumentele privind dispersia și rezoluția pentru rețele sunt asociate cu comportamentul acestui factor. Deoarece aceasta este reținută în forma generală a Eq. (6.123), putem trece aceste argumente direct în discuția curentă.

Expresia completă a densității fluxului de radiație include funcția de ardere pentru o singură fante din șirul de deschideri. Pentru o funcție cutie simplă de lățime b, Ti(u) = b sinc(πuh) și

B(u) = sinc2(πub)

(6.124)

Efectul său asupra modelului general este indicat în Fig. 6.31, care ar trebui comparat cu Fig. 6.29. Deoarece b trebuie să fie mai mic decât a, maximul principal al modelului va acoperi cel puțin trei maxime de interferență, inclusiv cel de la zero, ceea ce este inutil

Fig. 6.51 Model de densitate de flux pentru rețeaua de interferență modulată prin difracție datorată fantelor de dimensiuni finite.

pentru Spectroscopie și care primește cea mai mare cantitate de energie difractată. Rețineți, de asemenea, că cantități egale de energie de radiație sunt difractate atât în ordine pozitivă, cât și în ordine negativă, ceea ce este din nou o risipă de energie.

Această stare de fapt face ca acest tip simplu de rețea să fie ineficient pentru spectroscopie practică. Eficiența poate fi mult îmbunătățită prin arderea grătarului.

2. Blazed-Gretar de transmisie. Tehnica de ardere implică crearea unui grătar cu o funcție de transmisie prin fante care va deplasa focul astfel încât maximul său să coincidă cu unul dintre ordinele diferite de zero în modelul de interferență. Pentru Simplitate presupunem că $\theta_z = 0$ și că θ'_z rămâne mic. Dacă șirul de fante este înlocuit cu o serie de pene dielectrice transparente, atunci Iight-ul din fiecare pană va fi deviat. Luați în considerare geometria! optica Iimit pentru rețeaua pană prezentată în Fig. 6.32. O rază este deviată conform SnelFs Iaw de θ,z, unde $\theta'_z = \theta'' - \theta_b$. Aici θ_b este unghiul de ardere reprezentând înclinarea unei fațete față de planul rețelei, iar θ'' este refracta unghi care intră în legea lui SnelF. Trebuie sa avem

$$n \sin \theta_b = \sin \theta''$$

$$= \sin \theta_b \cos \theta,_z + \cos \theta_b \sin \theta_z$$

Dacă θ_b este mic, atunci $\cos \theta_b$ 1. Deoarece θ' ar trebui să fie mic, aproximăm $\cos \theta'_2 \sim 1$. Prin urmare,

$$\sin \theta'_z \sim \sin \theta\beta(n - 1) \qquad (6.125)$$

Fig. 6.32 O rețea de transmisie care modulează lumina incidentă prin introducerea unui defazaj periodic.

Acum introduceți interferența. Maxime apar pentru

$\sin \theta'_z =$ тв~ (6.126)

unde λB este lungimea de undă și mB ordinea pentru care rețeaua trebuie optimizată. O alegere rezonabilă pentru parametrii rețelei noastre cu pană ar necesita ca unghiul de deviație calculat în Eq. (6.125) se potrivesc cu interferența maximă dorită în Eq. (6.126) astfel,

A

$= \sin \theta_B(n - 1)$

(6.127)

Acest lucru ar trebui să trimită centrul funcției de ardere la cea de-a mi-a ordine pentru λB aleasă. Pentru a vedea acest lucru mai clar, să modelăm funcția blaze prin transformarea Fourier a unei funcții de transmisie complexe. Din Eq. (6.10) știm cum să facem asta. Avem nevoie de d(x), variația spațială a grosimii grătarului. Aici avem $d(x) - d_0 + x \sin \theta_B$ pentru x pe intervalul $- \alpha/2$ la $+ a|2$. Apoi

Unde

$\tau_1(x) - \tau_0(x)$ exp

2π

1T

l)x sin θb

(6.128)

$\tau_0(x)$ = exp - iy (n - 1) d_0

este definit pentru $|x| \leq a/2$ numai. Aceasta este echivalentă cu produsul unei funcții casete (de amplitudine și lățime complexe constante a) și o funcție extinsă de defazare.

Lăsa

~(n - ŋ · л ub ≡-------sin θb

(6.129)

atunci funcția de defazare este e+'2π"'<x. Teorema de convoluție ne spune că T | (u) va fi convoluția transformării funcției casete, un sinc(πuα) și transformarea fazei. -funcția de deplasare, $\delta(u - u_B)$ sau

$T_1(u)$ =

a sinc(πu'α) δ(μ – u' – uB) du'

(6.130)

(6.131)

$= a \operatorname{sinc}[\pi(u - u_B)a]$

Funcția de ardere devine atunci

sinc2[π(u - ⅝)α]

B(u) = —-ȝ-----------C~

sinc (— πι⅛α)

Aceasta are aceeași formă ca Eq. (6.124) pentru grătarul neaprins, cu excepția faptului că modelul este deplasat pentru a plasa maximul în funcția de ardere la

U = Ub

(6.132)

3ÔÔ

Difracția I

Din Eq. (6.126) amintește că interferența maximă apar pentru sin θ'2 = mλ/a. Dacă dorim ca funcția blaze să fie cea mai mare pe un maxim dat pentru λ = λB, atunci uB trebuie să fie

Prin substituire de la definiția uB, aceasta devine

care este la fel cu Eq. (6.127), care a fost dezvoltat folosind concepte din geometrica! optica. Lungimea de undă optimă va fi

(n - l)a sin θb λb —

mB

(6 133)

Folosind Eq. (6.131) în Ec. (6.123) în loc de Ec. (6.124) produce un model asimetric cu mult mai multă energie utilă disponibilă în regiunea de dispersie. Pentru a vedea acest lucru mai clar, identificați

_ _ 2π(n — 1)îz sin θb

0b≡ -2uBa =------------

apoi

2

2p5 ợ

sinus

B(<5) =-----

sine2

2

Unde

sin θ'z = δ

2πa

(6.134)

(6.135)

(6 136)

Primul factor este constant pentru δB fix. Al doilea factor variază încet cu <5. Al treilea și al patrulea sunt schițați ca funcții ale sin θ'2 = λδ/2πa în Fig 6.33. Când λ = λB, Xb | 2, Aβ/3 și așa mai departe, vârful modelului de difracție coincide cu un maxim de interferență. Toate celelalte maxime de interferență sunt eliminate prin zerouri în modelul de difracție. Acest lucru este ilustrat în Fig. 6.33 pentru diferite valori λ la sau aproape de λB și λB/2.

Fig. 6.53 Model de densitate de flux pentru rețeaua de interferență care arată efectul de ardere, produs de un profil de fante care schimbă faza fasciculului incident.

La vârful maximului de interferență de ordinul al m-lea unde δ = 2πm, densitatea fluxului este determinată de

Dar putem rescrie <5β folosind Eq. (6.133)

Apoi obținem

— 27if∏β λ

B(δ) OC sinus2

(6.137)

Putem folosi Eq. (6.137) pentru a prezice energia relativă în varioni de ordine m în funcție de λ. De obicei, lucrăm în ordinea mB din interval

I = 7~(^B - ⅛) până la Ț = γ(fnB + ⅛) Λ Λβ   Ă Ag

La capetele extreme ale acestui interval pentru mB = 1 factorul de difracție este redus de la valoarea sa maximă de unitate la

• 2

Sincz

D. Performanță limitată de difracție

1. Difracția Fraunhofer cu lentile. Dimensiunea finită a discului Airy sau modelele de difracție similare vor pune un ultim limită asupra performanței instrumentelor optice. Înainte de a discuta câteva exemple

specifice, vom arăta cum poate apărea difracția Fraun-hofer în planul imaginii unui instrument optic cu o sursă punctuală. În cazurile examinate până acum, distanța R'o wa. \ atât de mare încât toate razele de lumină de la deschiderea de difracție până la punctul de observație P' viqtq sunt esențial paralele, așa cum se arată în Fig. 6.34α. S-a găsit o variație liniară a fazei proporționale cu α'x + β,y (adică liniară în direcția cosinusurilor acestor raze).

Aceste raze paralele care se propagă în direcție (α', β', γ') pot fi de asemenea reunite pe o distanță finită cu ajutorul unui Iens L2, așa cum se arată în Fig. 6.34h. Punctul P' având coordonatele (x', y',f2) în raport cu al doilea punct principal al lentilei, unde f2 este lungimea focală, va fi un geometric! focar pentru toate razele cu cosinus de direcție α' = x'/R'0, β = y' | R,Q, cu Rr0 — yJf^2 + x'2 + y'2. Dacă diafragma este dozată către obiectiv, modelul rezultat este matematic același cu cel

produs fără lentilă, dar acum implică această valoare mult mai mică de R0 care ; nu trebuie să satisfacă condiția Iensless Fraunhofer, Ecs. (6.18).

O discuție mai detaliată a acestui tip de problemă va fi dată în capitolul 7, unde afirmațiile precedente vor fi dovedite mai riguros. Se dovedește că remarcile despre efectul Iens se aplică la fel de bine dacă deschiderea este plasată chiar la dreapta Iens ca și cum ar fi plasată chiar la stânga. Difracția are loc deoarece frontul de undă care iese din Sistem este în esență parte a unei suprafețe sferice.

Un alt Iens L1 poate fi folosit în mod similar pentru a aduce sursa punctuală P din ceea ce este în esență infinit, păstrând în același timp matematica precedentă! rezultate. Frontul de undă emergent este aceeași sferă parțială. Variabilele adecvate aici sunt cosinusurile direcției α = -x/R0, β = -y/R0 și distanța R0 = y/fì ÷ У2 + χ2• ɪsursa la P este plasată în planul focal al lui L1, așa cum se arată. în fig. 6.34c. Aici L1 și L2 sunt ambele foarte dozate față de deschiderea de difracție. După trecerea prin L1, lumina de la P este colimată paralel cu direcția vectorului PH1 = (-X, -y,/1) = K0(α, β, y).

Efectul de combinare a două Iens este de a produce o „imagine” a lui P la P'. (Rețineți că PH și H'P' sunt paralele dacă indicele de refracție este același pe ambele părți ale sistemului.) Dar în loc de o imagine punctuală adevărată, ceea ce se observă lângă P' este Fraunhofer sau modelul de difracție în câmp îndepărtat. a deschiderii, de exemplu, discul Airy cu inele, dacă deschiderea este un cerc. Efectul este același dacă cele două Iens sunt combinate într-un singur Iens de fiecare parte a deschiderii, așa cum se arată în Fig. 6.34d și e.

2. Deplasarea longitudinală a diafragmei. Diafragma despre care discutăm este oprirea diafragmei a sistemului. Pe lângă geometria sa! În limitarea răspândirii unghiulare a razelor din punctul sursă care pot trece prin sistem, acum se vede că joacă un rol dominant în proprietățile de difracție a sistemului, rol care este menținut în sistemele complexe cu lentile multiple.

Citām acum o parte dintr-un rezultat general care descrie efectele deplasării diafragmei de la Iens către imaginea P', așa cum se arată în Fig. 6.35. Dacă dimensiunea diafragmei este modificată astfel încât să aibă aceeași formă unghiulară ca cea văzută din P' (adică, astfel încât

Al doilea plan principal

Fig. 6.55 Pozițiile 1, 2, 3, 4, 5 etichetează locațiile posibile pentru deschiderea de difracție. 5' este imaginea lui 5.

Fig. 6.56 Două forme care s-ar putea aplica pupilei de ieșire.

are o proiecție constantă de la P' pe orice plan convenabil, să zicem al doilea plan principal la H' al lentilei), atunci distribuția intensității în modelul de difracție al diafragmei va rămâne neschimbată. (Totuși, fazele din diferite părți ale modelului se vor schimba pe măsură ce diafragma este mutată.) Această rezultat este valabil și dacă deschiderea se află în partea stângă a Ienilor în poziția 4 sau 5. Apoi, imaginea sa în spațiul imaginii, adică , pupila de ieșire, trebuie să aibă proiecția corespunzătoare pe planul H'. În toate cazurile, atunci putem spune că: Dacă proiecția pupilei de ieșire prin punctul P în al doilea plan principal rămâne aceeași, distribuția intensității lângă P va rămâne neschimbată.

Astfel, dimensiunea și forma acestei pupile de ieșire proiectate determină distribuția intensității în „imaginea” lui P la P. Pupilele proiectate sunt prezentate explicit în Fig. 6.36 pentru două forme de deschidere. Geometrica! imaginea punctuală este la o distanță D’ de al doilea plan principal. Aici am presupus $\theta z = 0$. În jurul acestui punct este un model de difracție caracteristic formei pupilei. Densitatea fluxului la P", lângă P' datorată pupilei (a) va fi

S"(P") oc sinc2(2πwx0) sinc2(2πυy0)

cu

X0 x"

FT

și

y Уo vy°=~D'I

ÿ din D' λ

(6.138)

Aici (x"/D') și (y"/D'} reprezintă coordonatele unghiulare ale punctului de observație P" așa cum se vede din punctul principal H'. Pe de altă parte, observăm că pentru x0 și y0 mici, (x0/Dj și (y0/D')

reprezintă jumătatea lățimii unghiulare a deschiderii așa cum se vede din P'. Pentru pupila circulară (b) avem

s"(p") oc [W

W

Cu

w =

2πf0 sin θ"

=2π--=2πβ

„Γo -' λ

(6.139)

Aici θ" este coordonata unghiulară a lui P' așa cum este văzută din punctul principal, iar din celălalt punct de vedere pentru r0 mic putem interpreta (f0/D') ca raza unghiulară a deschiderii așa cum este văzută din P'.

Cu acest context general ne întoarcem acum la o discuție despre sisteme specifice.

3. Putere de rezoluție telescopică. Dimensiunea finită a discului Airy va pune un ultim limită asupra puterii de rezoluție unghiulară a telescopului. Să presupunem, de exemplu, că privim o stea dublă printr-un telescop având un obiectiv cu lungimea focală/și diametrul deschiderii d. Se vor presupune că cele două componente ale stelei duble sunt la fel de intense și au o separare unghiulară Δφ așa cum se arată în Fig. 6.37α. Modelul de difracție care apare în planul focal al obiectivului va consta în suprapunerea a două discuri Airy având o separare unghiulară Δφ împreună cu inelele lor înconjurătoare.

Pentru observarea vizuală normală, aceste modele de difracție vor fi mărite fără difracție suplimentară apreciabilă de către ocular, deoarece oprirea diafragmei a întregului sistem este obiectivul telescopului.

Ele vor fi rezolvate ca două modele dacă Δφ este mult mai mare decât Lățimea unghiulară a discului și nu se rezolvă dacă Δφ este mult mai mică. Valoarea critică a Δφ pentru care rezoluția este doar posibilă este de obicei considerată a fi cea dată de Lord Rayleigh. Apare atunci când Δφ este egal cu raza unghiulară a discului Airy, care din Ec. (6.56) dă

À,   0,6U 1,22Λ

Δ</>mi∏ - — = „Γ-

d

(6.140)

O fotografie a acestui model de difracție dublă la Rayleigh Iimit este prezentată în

Fig. 6.57 Model de difracție produs în planul imaginii ca urmare a două stele îndepărtate: (a) indici egali de refracție pe ambele părți ale lentilei; (b) indici inegali de refracție.

Fig. 6.30 Imaginea unei stele duble la limita Rayleigh.

Fig. 6.38. Multe telescoape nu sunt de o calitate optică suficient de înaltă pentru a produce această rezoluție „limitată de difracție”. Chiar dacă sunt, fluctuațiile atmosferice pot face ca imaginea să se miște ușor într-un mod aleatoriu, astfel încât valoarea practică a Δ</>min poate fi mai mare decât cea a ecuației. (6.140)

Dacă indicele de refracție n diferă de unitate, λ în Ec. (6.140) se presupune că este lungimea de undă redusă $\lambda = \lambda_0/n$. Astfel, pentru situația din fig. 6.37b, înaintea lentilei, unghiul ar fi

$$\Delta\varphi = \frac{1,22\lambda_0}{n}$$

pe când după Ieni ar fi

$$\Delta\varphi' - \frac{1,22\lambda_0}{n'}$$

4. Putere telescopică de adunare a luminii. Pentru observarea vizuală folosind atât telescopul, cât și ochiul, pupila de ieșire a telescopului are aceeași dimensiune ca și pupila ochiului observatorului (Fig. 6.39). Pentru sistemul combinat de telescop și ochi, oprirea diafragmei poate fi considerată fie obiectivul Iens, fie pupila ochiului - nu face nicio diferență - și modelul de difracție de pe retina ochiului va fi același disc Airy care ar fi obtinut fara telescop.

Astfel, telescopul nu poate schimba dimensiunea modelului de difracție retiniană de la un obiect punct îndepărtat. Ceea ce poate face este să crească densitatea fluxului radiant sau iradierea (în W/mm2) sau densitatea sau iluminarea Iluminoasă în lm/mm2 care cade pe retina din discul Airy. Cu ochiul liber, fluxul care trece prin pupilă este concentrat pe disc, în timp ce cu telescopul fluxul care trece prin obiectivul său este concentrat pe disc, iar acest lucru este mai mare

prin raportul dintre aria obiectivului și aria de pupila, adică prin raportul dintre pătratele diametrelor,

(^obj p _ m2 í I raa ^pupil/

unde mx = –f/f este Hiagnificarea telescopului. Telescopul are de 2 ori mai multă putere de adunare a luminii decât cu ochiul liber.

Putem spune că utilizarea unui telescop pentru astronomică vizuală! observațiile prezintă două avantaje importante: (1) crește separarea modelelor de difracție ale stelelor individuale de pe retină cu raportul mx; și (2) crește fluxul în fiecare model cu raportul m2. Dacă stelele sunt văzute pe un fundal Continuu, cum ar fi cerul în timpul zilei, atunci iradierea în imaginea retiniană a acestui fundal va fi independentă de mărirea mα (m2 ori mai mult flux este incident pe m2 ori mai multă zonă retiniană). Astfel, utilizarea unui telescop va crește contrastul iradierii din discul Airy al stelei față de cel al fundalului cu raportul m2. Stele strălucitoare devin apoi vizibile în timpul zilei.

5. Spectrograf. Difracția În cele din urmă, limitează puterea de rezoluție a unei prisme Spectrograf, monocromator sau instrument similar de tipul prezentat în Fig. 6.40. Datorită costului său ridicat, prisma însăși formează de obicei opritorul de deschidere al unor astfel de instrumente. Lumina de la fanta de intrare este colimată de colimatorul Iens L1, dispersată de prismă și apoi focalizată pe piata de fotografie sau detector de fotoni multicanal de către o cameră Iens L2 sau, într-un monocromator, lumina este focalizată pe o fantă de ieșire de către a Iens ca în fig. 6.40.

Dacă fanta de intrare ar fi înlocuită cu un orificiu, iar dacă lumina ar fi cu adevărat monocromatică, lumina ar fi exact colimată și deviată printr-un unghi bine definit θd care depinde de lungimea de undă λ. În planul focal al lui Iens L2 am observa modelul de difracție Fraunhofer al prismei dreptunghiulare ca

Fig. 6.40 Elemente esențiale ale unui spectrograf cu prismă.

proiectat pe un plan prin H12 normal la direcția finală de propagare. Acest model ar fi ceva asemănător cu cel din Fig. 6.18.

Cu o fantă îngustă în loc de un orificiu la intrare, obținem o suprapunere a infinitate de astfel de modele deplasate de-a lungul direcției fantei care iese din hârtie din Fig. 6.40. Modelul rezultat al densității fluxului va varia în direcția normală cu fanta exact așa cum face modelul „o singură fantă” din Fig. 6.14. „Lățimea fantei” efectivă a acestui model este înălțimea proiectată a prismei indicată cu W în Fig. 6.40. Astfel, distanța unghiulară Δθz = Δx'/2S' de la centrul modelului de difracție la primul zero, care este, de asemenea, unghiul minim rezolvabil după criteriul Rayleigh, este dată de Ec. (6.39) cu R'o = S', 2x0 = ITa fi

Δθ2 = ~

2 W

(6.141)

(6.142)

Să presupunem că prisma este operată aproape de deviația minimă, astfel încât unghiul de deviație θd este apropiat de valoarea minimă θθ min, care este dată în termeni de unghiul prismei A și indicele de refracție n de Ec. (2,98)

n = si∏[(^4 + ^o,min)/2]

păcat(Λ/2)

Răspândirea unghiulară Δθd implică o incertitudine în determinarea lungimii de undă a unei linii spectrale date de o cantitate Δλ = \ dλ/dθo \ Δθo, unde dλ/dθj3 este reciproca dispersiei unghiulare a instrumentului. Puterea de rezoluție în spectroscopie λ/Δλ este apoi dată de

λ

— = W

Δλ

dθp dλ

Dependența de lungime de undă a unghiului de deviație θd este dată implicit pentru θd lângă θd,mɪn de dependența n(2) prin Ec. (6.142). De fapt, putem scrie dθoldλ ~ t/0Dmin/dz și obținem

• M dn1(A + θn \
sin — ■ —cosi 1
2 dλ2 42/

dλ

Prin urmare,

— = W ^D,min

ΔA dλ

2 W sin

2 dn

A + ^P,min \ dλ

2 /

Din fig. 6.41 vedem că înălțimea înclinată h a prismei este dată de

W

h =

A + ^P,min

2

Astfel avem A/ΔA = 2h(sin A/2) (dn/dλ). Dar /ı(sin A/2) poate fi văzut din Fig. 6.41 ca fiind egal cu b/2, unde b este Lungimea bazei prismei. Astfel, puterea de rezoluție aproape de deviația minimă este simplă

λ dn

Δλ = bdλ

(6.143)

6. Microscop cu iluminare incoerentă. Până acum am presupus că ideea din cele două surse punctuale de rezolvat este incoerentă. Acesta va fi cazul surselor auto-luminoase. Într-un microscop, obiectul este iluminat de un sistem de condensare și, de obicei, nu este auto-luminos. Coerența transversală Lungimea luminii care iluminează obiectul este de obicei mai mare decât separația dintre cele două puncte pe care dorim să le rezolvăm. Atunci trebuie să tratăm lumina dintr-un astfel de obiect ca fiind coerentă. Discuția despre puterea de rezolvare se schimbă oarecum în acest caz și va fi amânată până când vom discuta teoria Abbe a formării imaginii.

Dar pentru un microscop cu iluminare incoerentă putem găsi separarea minimă rezolvabilă după cum urmează. Luați în considerare Fig. 6.42, care arată lentila obiectivului. Obiectele Pi și Pii sunt separate la o distanță x și sunt încorporate într-un mediu cu indice de refracție n (într-un microscop cu imersie în ulei n va fi mai mare decât 1).

Fig. 6.42 Geometrie relevantă pentru calculul puterii de rezoluție a unui microscop.

Imaginile P'l si P1ll se gasesc in aer. Diafragma unghiulară limită este θ'm, așa cum se vede din imagine. Condiția Abbe sinus (secțiunea 4.3A4) dă

nx sin θm = x' sin θ'm   (6.144)

Acum rezoluția unghiulară Iimitatoare este dată de Ec. (6.140) ca

∧, *min   0-61Â/A1zlCΛ

Δ≠min == –r–   (6,145)

ɔ r0

Din cauza măririi mari produse de obiectiv, avem S' > S; henee, θ,m va fi mic chiar dacă θm nu este. Astfel putem scrie.

θ'm≈jl (6,146)

Astfel, din Ecs. (6.145) și (6.146) obținem

χf . ʌmɪn 0,612 = „(6,147) ɑm

Apoi Eq. (6.144) devine

„*min sin θm = xjnin sin θ,m ≈ x'raiχ = 0,61 λ

sau

0,612

ɔɑmin • n(6.148) n sin θm

Mărimea n sin θm care apare aici [ca în Ec. (2.100) în discuția ghidurilor de undă dielectrice] se numește deschidere numerică. Se poate face cat de mare

1.6 pentru un obiectiv de imersiune. Cu λ = 560 nm, aceasta va da xmin = 210 nm.

REFERINȚE

Arfken, G. Metode matematice pentru fizicieni. Académie Press, New York, 1970.

Baker, BB și EJ Copson. Teoria matematică a principiilor lui Huygens. Oxford-University Press, Londra. 1969.

Born, Max și Emil Wolf. Principii de optică. Pergamon Press, Oxford, 1980.

Cagnet, Michel, Maurice Françon și Jean Claude Thrierr. Atlasul fenomenelor optice. Springer-Verlag, Berlin, 1962.

Duffieux, PM Transformarea Fourier și aplicarea ei în optică. Wiley, New York, 1983. Fowles, Grant R. Introduction to Modem Optics. Holt, Rinehart și Winston, New York, 1968.

Françon, Maurice. Difracție: coerență în optică. Pergamon Press, Oxford, 1966. Goodman, Joseph W. Introduction to Fourier Optics. McGraw-Hill, New York, 1968.

Jackson, John D. Electrodinamică clasică. Wiley, New York, 1975.

James, JF și RS Sternberg. Proiectarea spectrometrelor optice. Chapman and Hall, Ltd. Londra, 1969.

Kline, Morris și Irwin W Kay. Teoria Electromagnetică și Optica Geometrică. Interscience, New York, 1965.

LighthiIl, MJ Introducere în analiza Fourier și funcțiile generalizate. Cambridge University Press, Cambridge, 1958.

Mertz, Lawrence. Transformări în optică. Wiley, New York, 1965.

Stone, JM Radiation and Optica. McGraw-Hill, New York, 1963.

Watson, GN Teoria funcţiilor Bessel. Cambridge University Press, Cambridge, 1956.

Probleme

Secțiunea 6.1 Concepte generale de difracție

1. În difracția în câmp îndepărtat factorul de înclinare este setat egal cu unitatea. Dacă aceasta este pentru a introduce erori nu mai mari de 10%, găsiți limitarea corespunzătoare a geometriei de difracție. În practică, putem neglija acest factor chiar și în afara acestui interval în multe cazuri, deoarece variația unghiulară a factorului de înclinare este slabă.

2. Care este funcția de transmisie adecvată care trebuie utilizată pentru o deschidere care este acoperită de un filtru care reduce densitatea fluxului conform următoarei forme

S(r) = S(O)exp(- πb2 3r2)

3. Ieșirea dintr-o sursă idealizată la o lungime de undă de 488 nm formează un fascicul colimat uniform cu diametrul de 6 cm. Este focalizat de un Ien bine corectat către un „punct” de difracție. Un opritor circular cu diametrul de 4 cm se află chiar în spatele lentilei. Dacă factorul C din Ec. (6.2) este i/λ (vom demonstra acest lucru în capitolul 7), găsiți densitatea fluxului la punctul focal paraxial. Care este intensitatea în acel moment?

Secțiunea 6.2 Difracția cu câmp îndepărtat

4. Un experimentator studiază difracția Fraunhofer printr-o fantă. Înălțimea fantei este de 2x0 = 1 mm. Lungimea de undă este de 500 nm. Cât de mare trebuie să fie distanța până la planul de observație dacă valoarea maximă a termenilor neglijați în forma Iinearizată a fazei din integrala de difracție trebuie să fie de 0,01 rad?

5. Ecuația (5.44) a descris modelul densității fluxului datorat interferenței prin N fante paralele foarte înguste în planul deschiderii. Pornind de la această expresie pentru o regiune cu lățimea totală b = (N – l)d = constantă, Iet N merge la infinit în timp ce necesită ca d să se apropie de zero. În acest fel, regiunea cu lățimea b devine în cele din urmă complet deschisă. Arătați că aceasta conduce la o expresie pentru densitatea fluxului în modelul de difracție datorită unei fante largi de lățime b. Această abordare este echivalentă cu luarea în considerare a waveletelor lui Huygen

cilindrice în descrierea difracției pentru o deschidere care variază într-o dimensiune.

6. Arătați că maximele din densitatea fluxului modelului de difracție Fraunhofer al unei fante apar la valori

dintre u care sunt aproximativ aceleași cu maximele din $\sin^2(2\pi u x_0)$ când u este mare.

7. Arătați că densitatea de flux a celui de-al Z-lea maxim minor în modelul de difracție pentru o fantă îngustă în câmpul îndepărtat Iimit poate fi evaluată aproximativ prin

S, = S_0[(Z + ⅛)π]"2

8. Luați în considerare difracția printr-o fante lungă și îngustă de lățime $2x_0$. Construiți diagrame fazori care ilustrează integrarea difracției în câmp îndepărtat pentru următoarele valori ale mx_0: 0,

1,5. Asigurați-vă construcția precisă în unități de x || . Din diagramă determinați raportul intensității câmpului electric $E(u)/E(0)$.

9. Luați în considerare modelul de difracție în câmp îndepărtat printr-o deschidere pătrată cu laturile $2x_0$. Care este expresia pentru densitatea fluxului de-a lungul liniei x' = y"ì

10. Densitatea de flux în centrul modelului de difracție produsă de o fantă lungă de 0,1 mm lățime pe un ecran la 5 m distanță de Iight cu lungimea de undă de 500 nm este de 15 μW/cm2. Găsiți densitatea fluxului în următoarele poziții, departe de centrul modelului: 6,25 mm, 12,5 mm, 25 mm.

11. O deschidere dreptunghiulară este iluminată la incidență normală cu o lumină paralelă cu lungimea de undă de 500 nm. Dimensiunile deschiderii sunt de 1 × 3 mm. Care sunt dimensiunile maximului principal al modelului de difracție format pe un ecran la 50 m distanță, orientat paralel cu deschiderea?

12. O sursă punctiformă care emite lumină albă de la 400 nm la 700 nm se află la 2 m de o deschidere de 2 mm pătrată. Descrieți caracteristicile majore ale modelului de difracție, acordând o atenție deosebită dependenței de lungime de undă.

13. O altă modalitate de a face integrai pentru difracția în câmp îndepărtat de la o deschidere circulară este să rămâneți în Coordonate dreptunghiulare. Arătați că, împărțind integrarea în benzi paralele, câmpul de la punctul de observare este proporțional cu

1 — t2 cos(fw) dt

unde $w = 2\pi p r_0/(\lambda R'_0)$. Comparați rezultatul dvs. cu Eq.

(6.51) pentru a determina o altă reprezentare a funcției Bessel de ordinul întâi.

14. Discutați variația locală a modelului de difracție

în câmpul îndepărtat Iimit la unghiuri mari de difracție. Ca sistem model, luați în considerare o fantă infinit de lungă paralelă cu axa y care este iluminată de lumină colimată la incidență normală. Luați în considerare regiunea de pe planul de observare care se află în vecinătatea lui $x' = R'o$, unde $jR'0$ este și distanța dintre planul fantei și planul de observare. Acesta este la un unghi de 45°. Arătați că problema poate fi analizată H luând în considerare difracția printr-o fantă efectivă care are o lățime egală cu proiecția fantei reale pe direcția de observație.

15. O undă plană cu lungimea de undă de 600 nm iluminează o fantă lungă și îngustă, cu lățimea de 10"4 m, producând un model de difracție în câmp îndepărtat care este descris de

$$S(u) = S(O)\ \mathrm{sinc}^2(2\pi u x_0)$$

unde $2x_0$ este lățimea fantei și $и = (a - a')/\lambda$.

Fig. 6.43

Probleme 401

Fig. 6.44

(a) Găsiți $\Delta\theta'z$ (în radiani), unghiul la fantă care subtinde primele trei maxime (identificate prin al doilea minim de fiecare parte a maximului central).

(b) Cum se schimbă acest unghi dacă lățimea fantei este mărită de 10 ori?

(c) Care este efectul acoperirii jumătate a deschiderii cu un filtru de densitate neutră care reduce puterea prin acea jumătate cu un factor de 4. Filtrul are lățimea x_0 și împarte deschiderea în două segmente cu două caracteristici de transmisie diferite (Fig. 6.43).

La următoarele probleme se poate răspunde cu ajutorul principiului lui Babinet:

16. Descrieți analitic densitatea fluxului în modelul de difracție Fraun-hofer a unui dreptunghi deschis cu o obstrucție dreptunghiulară centrată. Schițați calitativ rezultatele. Vezi fig. 6.44.

Fig. 6.46

17. Descrieți analitic densitatea fluxului în modelul de difracție Fraun-hofer al deschiderii inelare prezentate în Fig. 6.45. Discutați efectul calitativ asupra înălțimii și lățimii maximului principal atunci când $F1 <\xi f2$-

18. Descrieți cantitativ densitatea fluxului în modelul de difracție în câmp îndepărtat al deschiderii din Fig. 6.46 în regiunile

îndepărtate de centrul modelului în care fără bară densitatea fluxului ar fi esențial zero. Schițați aspectul modelului bidimensional.

19. La fel ca problema 18, dar cu deschiderea din Fig. 6.47.

Fig. 6.45

Fig. 6.47

/Secțiunea 6.3 Analiza Fourier

20. Proiectați o secvență de funcții „triunghiulară” care formează o reprezentare a funcției delta.

21. Demonstrați prin calcul direct teorema deplasării Pentru transformarea inversă, Ec. (6,87).

22. Evaluați transformarea Fourier a unei derivate

df(x)

dx

în ceea ce privește transformarea funcției originale

F(u) = ^[/(x)]

23. Determinați transformarea cosinusului Fourier a funcției pasului

∫w={i

X

X

>ol

<0∫

24. Calculați transformarea Fourier a F

exp(-πb2r2)

Veți avea nevoie de integrala definită

Care este relația dintre lățimea completă la jumătatea maximă pentru funcție și pentru transformarea acesteia?

25. Calculați transformarea Fourier a F

f(x) =

X > Oi

x < Oj

26. Aflați reprezentarea seriei Fourier Pentru funcția Sawtooth infinit periodică pentru care funcția locală este

Ш =J0

aa

27. Aflați reprezentarea seriei Fourier Pentru funcția de undă pătrată infinit periodică pentru care funcția locală este

∫ɪw =

Arătați că termenii asociați cu valori impare ale lui F n dispar. Arată cum se poate ajunge la o formă pentru/(x) care este scrisă ca o serie de funcții cosinus.

28. Deduceți o formă explicită pentru teorema ParsevaEs în cazul unei Funcții/(x) infinit periodice.

29. Folosiți teorema de convoluție pentru a evalua transformarea cu patru straturi a F sin(2πu0^) • cos(2πu0x).

30. Determinați transformarea Fourier a funcției

/(x) = U(x) cos

unde U(x) este „caseta” de amplitudine a unității.

Secțiunea 6.4 Exemple de analiză Fourier în difracție

31. Demonstrați că modelele de difracție în câmp îndepărtat care sunt produse prin transmisie Funcțiile care nu introduc schimbări de fază vor afișa întotdeauna simetria inversă în planul de observație. Acest lucru este adevărat independent de forma sau densitatea diafragmei.

32. Densitatea de flux în centrul modelului de difracție în câmpul îndepărtat Iimit datorată unei deschideri circulare cu raza r0 este S0. DACĂ două astfel de deschideri sunt introduse în deschidere cu separare a > 2r0, găsiți noua densitate de flux în centrul modelului.

33. Utilizați abordarea de analiză Fourier a diF-Fraction în câmp îndepărtat pentru a găsi densitatea relativă a fluxului într-un model cu două fante produse de fante de lățime 2x0 separate prin distanță de la centru la centru de 8x0 atunci când o fantă este acoperită de o sticlă subțire. placa de grosime d și indice de refracție n. Exprimați rezultatul în coordonate adecvate planului de interferență și raportate la bisectoarea perpendiculară a deschiderii fantei. Să presupunem că orice parametri nu sunt furnizați.

34. Să considerăm un grătar alcătuit dintr-o serie de fante de lățime d/4 separate de o distanță d.

(a) Discutați modelul de densitate de flux observat pe planul focal al F a Iens chiar dincolo de rețea cu lungimea de undă Iight de F λ

Pentru un total de F 2 fante, 4 fante și 100 fante. Includeți o discuție despre pozițiile și lățimile maxime principale și maxime subsidiare. Lipsesc comenzi?

Probleme 403

(b) Care este efectul asupra modelului observat de variație a unghiului de incidență a luminii?

(c) Discutați semicantitativ efectul asupra modelelor din (a) dacă lumina incidentă, în loc să fie colimată cu precizie, a fost colimată într-un fascicul de lățime unghiulară totală $\Delta 0 = A/lOd$.

35. Modelul de difracție Fraunhofer format din trei fante lungi paralele constă din maxime principale și maxime subsidiare. Dacă distanța dintre centrele fantelor este egală cu dublul lățimii fantei (toate fantele fiind de aceeași lățime), găsiți densitatea fluxului la maximul secundar cel mai apropiat de maximul central în ceea ce privește densitatea fluxului în centrul modelului.

36. Găsiți distribuția densității fluxului în modelul de difracție în câmp îndepărtat format dintr-un rețele cu fante de 4N în care este acoperită fiecare a patra fante (inclusiv ultima fante). Să presupunem că fantele sunt infinit înguste și sunt separate prin distanța d.

37. Găsiți densitatea de flux relativă în ordinul al treilea și al patrulea pentru Iight având o lungime de undă de 500 nm difractată de un rețele a cărui lățime a fantei și separare sunt de 2 μm și, respectiv, 3 μm.

38. Folosiți teorema de convoluție pentru a găsi formele analitice ale modelului de difracție al deschiderii din imagine (Fig. 6.48). Presupuneți geometria câmpului îndepărtat și orice parametri care sunt necesari.

39. Descrieți cantitativ modelul de difracție în câmp îndepărtat observat cu o deschidere alcătuită din două fante înguste de lățime egală orientate la unghiuri drepte ca în Fig. 6.49.

Fig. 6.49

40. Descrieți cantitativ câmpul în modelul de difracție Fraunhofer al diafragmei prezentat în Fig. 6.50. Fantele sunt identice. Faceți o schiță aproximativă a distribuției bidimensionale a densității fluxului. Să presupunem că diafragma este chiar în fața unui Iens cu lungimea focală IO6A.

41. Dacă vă focalizați ochiul la o sursă punctuală de lumină care emite radiații monocromatice (să zicem la o lungime de undă de 500 nm, la 100 m distanță) și țineți o batistă întinsă într-un plan în fața ochiului perpendicular pe razele de lumină cu fire care rulează orizontal și vertical, veți vedea o matrice dreptunghiulară de puncte brighi în loc de o singură sursă punctuală. Dacă separarea aparentă a punctelor de brighi este de 0,3 m orizontală și 0,25 m verticală, determinați:

(a) Separările orizontale și verticale ale firelor batistei (ochii tăi vor fi concentrați în esență la infinit).

(b) Numărul de puncte care pot fi văzute.

42. Luați în considerare un grătar cu distanța d pentru care zona riglată este circulară cu o rază mult mai mare decât distanța dintre șanțuri. Discutați comportamentul cantitativ al

Fig. 6.48

Fig. 6.50

modelul de interferență pentru o astfel de rețea pentru Iight incident de-a lungul axei z în funcție de unghiul θ'z (vezi Fig. 6.51).

43. Calculați unghiul de ardere al unui grătar de 600 linie/mm care urmează să fie utilizat în primul rând la 750 nm. Care ar fi puterea teoretică de rezoluție a unui grătar de 52 mm lățime de acest tip?

44. Găsiți modelul de difracție Fraunhofer la o distanță R' > a, b la lungimea de undă λ într-un plan paralel cu un plan de deschidere care conținemg o deschidere triunghiulară definită de Iines ÿ = a, x = bÿ/a, x = 0.

45. Un „rețele cosinus” este unul cu o transmisie constantă în funcție de ÿ și o transmisie care depinde de x ca

A

$\tau(x) = -\ (1 + B \cos \gamma x)$, |Λ|<1, |B|<1

Lăsați grătarul să se extindă pe o distanță $2x_0$ în direcția x x0y

iar Iet N = – să fie numărul integral total al repeti-n

elemente ale modelului cosinus. Pentru Iight cu lungimea de undă λ, calculați densitatea de flux relativă în funcție de unghiul de difracție θ'2. Câte comenzi se văd?

46. O fantă îngustă este acoperită cu un filtru de atenuare cu profil de transmisie a puterii de

T(x) = sin2 |

'πx

pe lățimea de la – x_0 la x_0. Determinați modelul de difracție în câmp îndepărtat la care ar duce o astfel de fantă.

47. Densitatea de flux în planul focarului paraxial în centrul modelului de difracție produs de un Iens subțire pozitiv cu raza a și lungimea focală f care este iluminată de o undă plană cu lungimea de undă λ este S_0. Acum o obstrucție circulară este plasată peste centrul

Iens astfel încât să blocheze porțiunea centrală din interiorul razei b. Deduceți o expresie pentru noua densitate de flux în centrul modelului de difracție.

48. Un filtru de densitate neutră cu profil gaussian atenuează fasciculul peste o deschidere circulară conform Problemei 24. Calculați modelul de difracție în câmp îndepărtat datorită acestei configurații. Rețineți că densitatea fluxului, nu câmpul electric, este Gaussian.

49. Dacă diametrul pupilei de intrare a ochiului este de 5 mm, determinați distanța la care cele două lumini de cap ale unei mașini care se apropie pot fi rezolvate de către observator. Să presupunem o lungime de undă medie de 550 nm și că farurile sunt separate la o distanță de 4 ft.

50. Obiectivul unui telescop are un diametru de 12 cm. La ce distanță două obiecte verzi (lungime de undă de 540 nm) ar fi abia rezolvate folosind criteriul Rayleigh dacă sunt separate la 30 cm?

51. Care este rezoluția unghiulară teoretică a 200-in. diametrul telescopului Palomar? Luați o valoare efectivă a lungimii de undă ca 550 nm. (Fluctuațiile atmosferice împiedică telescoapele mari să atingă rezoluția lor teoretică.)

52. Estimați rezoluția în linii/mm necesară unei plăci de fotografie care să fie utilizată la focalizarea unui obiectiv al telescopului cu difracție limitată de 6 inci în diametru, dacă urmează să dezvăluie orice structură în modelul de difracție la „imagine” a unei stele.

53. În text am susținut că, pentru observarea vizuală cu un telescop la mărire normală, contrastul densității fluxului în discul Airy al unei imagini de stea față de cel al unui fundal continuu este proporțional cu m2 oc dθbj. Arătați că această proporționalitate cu d2bj este valabilă și pentru un telescop de fotografie.

54. Într-un spectrograf precum cel prezentat în fig. 6.40, lățimea efectivă W a prismei este de 40 mm, iar focalele L1 și L2 sunt de 300 și, respectiv, 150 mm. Estimați un Iimit superior pe lățimea

fantă de intrare care nu va reduce în mod apreciabil rezoluția finală a instrumentului.

55. Dispersia mediilor transparente poate fi adesea aproximată cu formula „Cauchy”, așa cum este prezentată în problema 2.54. Pentru sticla cu silex de bariu, η = 1,59825 la 486,1 nm și η = 1,60870 la 298,8 nm. Din aceste date puteți determina constantele din formula de dispersie. Calculați puterea de rezoluție la 400 nm de a

Probleme 405

Spectrograf care folosește o prismă din acest sticla cu o bază de 50 mm lungime.

56. Un obiectiv de imersie în ulei este conceput pentru a fi utilizat cu Iight având o lungime de undă de 400 nm, astfel încât să permită rezoluția obiectelor care sunt separate de 200 nm. Este . acest lucru

este posibil? Dacă da, găsiți deschiderea numerică a obiectivului. Dacă nu, explicați de ce.

7 Difracția II

Condițiile pentru difracția în câmp îndepărtat fără ajutorul lui Ienses sunt severe. Cerem ca R0 și R0 să fie mult mai mari decât x2/λ sau y2/λ. Am raționalizat în Capitolul 6 că acest formalism ar putea fi făcut practic prin utilizarea Ienses pentru a aduce sursa și planurile de observare din dozator la deschidere, menținând în același timp condițiile de câmp îndepărtat la deschidere (Fig. 6.34). Prin următoarele dezvoltări vom justifica această idee prin includerea explicită a Ienilor în procesul de difracție. Făcând acest lucru, dobândim capacitatea de a discuta o varietate mult mai largă de aplicații de difracție.

Înainte de a continua cu efectul Ienses, dorim să îmbunătățim integrarea noastră de difracție de fază linearizată, deoarece vom avea nevoie de o aproximare mai precisă a fazei adevărate. Acest lucru ne va permite să tratăm difracția câmpului apropiat (fără Ienses) în care sursa și planurile de observare nu trebuie să fie extrem de departe de deschidere.

7.1 Fresnel TrQnsformations

Metoda de bază în această discuție va fi aplicarea repetată a unei forme a integralei de difracție Fresnel-Kirchhoff. Aceasta ne spune cum distribuția câmpului electric într-un anumit plan transversal este legată de cea dintr-un alt plan. Presupunem că Iight are coerență transversală și longitudinală perfectă. Acest lucru poate fi realizat prin utilizarea Iight de la un laser care funcționează într-un singur mod transversal.

Mai degrabă decât aproximarea liniară din Capitolul 6, vom folosi aici aproximarea parabolică în care undele sferice sunt înlocuite cu paraboloizi. Când este aplicată la acțiunea lui Iens, această aproximare dă echivalentul de undă al teoriei paraxiale în optica geometrică. Trebuie extins pentru a include teoria difracției aberațiilor, dar poate fi generalizat destul de ușor la sistemele cu deschidere mare care satisfac condiția sinusului Abbe Eq. (4.103).

Rg. 7.1 Geometrie care se aplică propagării din planul deschiderii către planul de observare.

Continuăm să tratăm problema ignorând proprietățile de polarizare ale luminii. Cu toate acestea, ar trebui să subliniem că aceste efecte nu pot fi ignorate dacă se vor face calcule mai precise cu sisteme cu deschidere mare.

A. Transformare generală

Considerăm mai întâi geometria ilustrată în Fig. 7.1. După cum s-a stabilit în Capitolul 6, P(x, y) este un punct tipic în planul deschiderii, iar punctul de observație este P'(x', y'). Deși am ales din nou ca diafragma să fie un avion, această alegere este una de confort. Există anumite cazuri speciale în care o alegere la fel de convenabilă ar fi o suprafață care a făcut parte din suprafața undei incidente care, pentru o sursă punctuală, ar fi o secțiune a unei sfere. Vom rămâne cu avionul pentru că se termină la un tratament mai general.

Câmpul electric la P pe partea incidentă a deschiderii este E(P). După deschiderea la P, acest câmp este modificat de funcția de transmisie a diafragmei pentru a produce E(P)τ(P). Funcția de transmisie descrie întinderea părții deschise a deschiderii și include, de asemenea, influența porțiunilor semitransparente și a contribuțiilor dielectrice de grosime variabilă (Ienses). Figura 7.2 ilustrează mai multe tipuri de deschideri care pot fi descrise cu acest tip de funcție de transmisie.

Considerăm că câmpul electric modificat în planul deschiderii este o sursă de undele Huygens secundare. Apoi Eq. (6.7), integrala de difracție Fresnel-Kirchhoff (fără factorul de înclinare) ne va oferi câmpul aproximativ la P'

~ ~ - e~ikR

E(P)τ(P) — dx dy (7.1)

Aceasta poate fi scrisă ca o transformare integrală prin definirea „nucleului” h(P1 → P2)

e -ikR ɪ 2 h(P1→P2)≡C----------

E'(P') = C

R12 = P1P2 (7,2)

Fig. ΊΛ Configurații tipice de deschidere cu diferite funcții de transmisie. (a) Deschidere dreptunghiulară. (h) Lentila circulară. (c) Deschidere ovală. (d) Matrice de deschideri circulare.

Apoi Eq. 7.1 ia forma

Er (Pf) =

∫∫ E(P)τ(P)h(P → P') dx dÿ

(7,3)

Figura 7.3 prezintă funcționarea transformării integrale în cazul general în care propagarea este între două plane arbitrare. Transformarea acţionează asupra

//[E(P1)JMP1 → P2) dx1dy1 = E(P2)

Fig. 7.5 Ilustrarea nucleului care descrie propagarea de la primul plan la al doilea plan. Integrarea se realizează pe suprafața primului plan. Aceasta implică faptul că câmpul din toate punctele de pe primul plan contribuie la câmpul dintr-un punct dat de pe al doilea plan.

câmp în primul plan, schimbându-l în câmp într-un punct din al doilea plan. În cazul general avem

$E(P2) = J \mid E(P1)\lambda(P1 \to P2)\, dx1\, dyi$ (7-4)

Ecuația (7.1) este valabilă și dacă P1 și P2 sunt schimbate. Aceasta descrie situația de propagare inversă. Acesta este,

- + ikR 12 h(P2→P1)-~C^- (7,5)

este nucleul adecvat pentru utilizare într-o transformare care ne-ar spune ce câmp a fost necesar la primul plan pentru ca o anumită distribuție a câmpului să fie găsită în al doilea plan.

$E(P1) = \iint E(P2)h(P2 \to P1)\, dx2\, dx1$ (7.6)

Revenind acum la cazul special de interes pentru difracție, putem aplica o transformare pe câmpul din planul sursă pentru a genera câmpul pe partea incidentă a planului deschiderii. Situația este prezentată în Fig. 7.4. Distribuția noastră sursă la P(x, y) poate fi descrisă printr-un câmp sursă E(P) și o funcție de transmisie sursă τ(P). Apoi, conform Eq. (7,4)

$P(P) = \iint E(P)\tau(P)h(P \to P)\, dx\, dy$ (7.7)

Putem înlocui Ec. (7.7) în Ec. (7.3) pentru a produce o expresie pentru câmpul de la P' în termenii câmpului de la P.

$E'(P') =$

$\iint \iint E(P)\tau(P)h(P \to P)\, dx\, dy\, \tau(P)h(P$

$P')\, dx\, dy$

$E(P)\tau(P)$

$h(P \to P)\tau(P)h(P \to P')\, dx\, dy\, dx\, dy$

(7,8)

Ecuația (7.8) are aceeași formă ca transformarea integrală generală

$E'(P') = E(P)\tau(P)h\tau(P \to P')\, dx\, dy$

(7-9)

Acest lucru va fi adevărat dacă definim nucleul general de propagare

$h\tau(P \to P') \equiv \iint h(P \to P)\tau(P)h(P \to P')\, dx\, d\ddot{y}$

He~ik(R + R)

τ(P) RRI— dx dy

(7,10)

Fig. 7.4 Geometria de difracție care arată planul sursă, planul deschiderii și planul de observație.

Unde

R = PP și R' = PP'

Ecuația (7.9) include efectul funcției de transmisie la deschiderea τ(P). Acest formalism poate fi folosit pentru a descrie transformarea unui câmp general în planul xy de către teoria Fresnel-Kirchhoff într-un punct din planul de observație. Dacă sursa este un punct monocromatic al Forței A la $P_0(x_0, y_0)$, atunci fieɪð din planul deschiderii trebuie să fie

л   ____x.

Ê(P) = — ei((Ot~kR), R = P0P R

(7,11)

(7,12)

Deoarece Eq. (7.7) ar trebui să dea același rezultat, trebuie să identificăm o funcție pentru E(P)τ(P) care se comportă ca o sursă punctuală. Dacă definim

$E(P)\tau(P) = e^{i\omega t}\delta(x - x_0)\delta(y - y_0)$

și înlocuiți aceasta în Ec. (7.7), atunci ajungem la expresia corectă la P. Prin urmare vom folosi Ec. (7.12) când trebuie să reprezentăm o problemă care implică o sursă punctuală.

Când combinăm Ec. (7.12) cu nucleul general de propagare al Eq. (7.10) în transformarea integrală a Eq. (7.9), găsim

$e^{i\omega t}\delta(x - x_0)\delta(y - y_0)C^2$

$e^{-ik(R + R')}$

τ(P)------;— dx dÿ dx dy

RR

E(P) =

= CA $e^{i\omega t}$

e-ik(R + R') τ(P) —RR'— d*

(7,13)

care este același rezultat cu care am început în capitolul 6, Ec. (6.15), formula Fresnel-Kirchhoff pentru difracția Iight de la o sursă punctuală printr-o deschidere.

B. Aproximații de fază

Informația de propagare și difracție este purtată de nucleul hτ(P → P') definit în Ec. (7.10). Factorul

e-ik(R + R')

RR1

(7,14)

în integrând în Eq. (7.10) este rezultatul aplicării principiului lui Huygens. Acest comportament de fază și amplitudine rezultă din produsul a două unde sferice, una din planul sursă și cealaltă din planul deschiderii. Pentru a face progrese analitice cu aceasta, trebuie să aproximăm acest factor printr-o formă simplă.

1. Aproximație liniară. În capitolul 6 am cerut ca P să fie foarte aproape de Ő în comparație cu distanțele D și Dr. Nu am cerut, totuși, ca punctul sursă P și punctul de observație P' să fie aproape de originile respective 0 și O'. Acesta a fost un avantaj pentru că deseori suntem departe de geometria „Directă” atunci când folosim un grătar. Referindu-ne la Fig. 6.12α, am identificat R0 și R0, obținând, de exemplu

√2, *2

xx + yy X2 + y2 (xx + yy)2

î\ — / \ ∩------------H-------------------------

R0 2R0   2R30

(7,15)

Deoarece x și y rămân mici în comparație cu R0, am renunțat la ultimii doi termeni. Acest lucru ne-a lăsat cu o fază care a fost liniară în coordonatele planului de deschidere. Am arătat cum această fază liniară a fost o caracteristică a undelor plane. Astfel, Iinearizarea echivalează cu tratarea undelor sferice în expresia (7.14) ca undele plane.

2. Aproximare parabolica. Pentru a îmbunătăți aproximarea, ar trebui să păstrăm termeni de ordin superior în Ec. (7.15). Acest lucru duce la un rezultat greoi din cauza termenului încrucișat xy obținut prin înmulțire

(xx + yy)2

2R0

Termenul încrucișat poate fi eliminat doar presupunând că x și y sunt mici. Când facem acest lucru, ar trebui să extindem și R0 despre D. Acest lucru este echivalent cu tratarea x, y, x și y pe picior de egalitate și extinderea R despre D. Astfel,

Я = ʌ/ɪ>2 + (x - x)2 + (y - y)2

D (x - x)2 (y - y)2 _ 1 [(x - x)2 + (y - y)2]2

2D 2D 8D3

(7,16)

Intenționăm să renunțăm la ultimul termen din Ec. (7.16). Prin urmare, trebuie să fie mult mai mică decât λ și aproape întotdeauna este în cazurile de interes. Avem atunci

R +

(x — x)2

2D

2D

(7,17I

În factorul de amplitudine înlocuim R cu D deoarece numitorul variază încet.

Inserarea acestor aceleași aproximări „parabolice” în Ec. (7.2) pentru general . în cazul în care primim

/ι(Pι → P2) = ʃ- exp(-ikP12) exP<j^p Kx2 - *1)2 + (y2 ~ Fi)2]| (7,18)

Când este utilizat în integrai ale Eq. (7.4) aceasta conduce la ceea ce noi numim transformarea Fresnel.

C ΓC C — ik.1

E(P2) = TT" e~ikDi2 E(P1) exp^ —— [(x2 - x1)2 + (y2 - y1)2J У dx1 dx2 (7.19)

υ12 JJ lfυι2J

Este adesea mai convenabil să înmulțiți și să combinați factorii în exponențialul ecuației. (7.18),

- ik D12

χ2 + y21 χ22 + y22

ID12 2D12

(x1x2 + y1y2)

I>12

Referindu-ne la Fig. 7.5, putem vedea că

^12,0 - (^12 + X2 + Уг)1,/2

Fig. 7.5 Geometrie generală pentru transformarea Fresnel între planul 1 și pianul 2.

La același nivel de aproximare pe care îl folosim deja, acesta este

X2 + У2

Prin urmare argumentul exponenţialelor devine

— ik R12,0

r21 _ XjX2 + У1У2 + 2D12 D12 \

unde r1=x1+ y1.

Forma alternativă pentru Ec. (7.18) este

h(P1

C

P2) = ^xp(-ikR12,0) exP |

D12

' — iπ г

IdT2t \

sau

h(P1

× exp

— i2π

-XtX2 ~ M2

AD12

(7.20a)

ɑ   /

→ P2) = n exp(-IkD12) exp ——k

U12   sau Zlyt2

/ — ikr2 exp⅛r

× exp — i2π |

×1×2 - У1У2

^D12

(7.20b)

Este ușor de văzut din aceasta ce a adăugat aproximarea parabolică la factorul de fază. Ecuația (7.20) este în esență aceeași cu nucleul de propagare care ar da forma liniară în situația de câmp îndepărtat, cu condiția ca r1 < AD12. În situația de față, în care această condiție nu este îndeplinită, trebuie să includem factorul de corecție al

Pentru cazul particular din Fig. (7.4) trebuie să facem aceeași aproximare pentru ambii factori în expresia (7.14). Astfel avem nevoie

R, ~ D' +

(x' — x)2

2D,

(У - y)2

2D,

în factorul de fază şi R' ~ D' în factorul de amplitudine.

În aproximarea parabolică, atunci, putem rescrie Ec. (7.10) ca

C2

hτ(P→P,)~—e-ik(D+D')

A   > DD>

∫∫τ(P)

X cxpi J~Kx~χ)2 + (y~y)2l , K≤-x)2 + (/- y)2]

2D

2D'

dx dy

(7,21)

pentru nucleul adecvat în transformarea generală Fresnel.

3. Formular standard. Integrala pentru nucleul general de transformare Fresnel din Eq. (7.21) este greu de evaluat în forma sa actuală. Dorim să manipulăm această ecuație, conform practicii obișnuite, într-una dintre cele două forme alternative, în funcție de natura funcției de transmisie τ(P). Dacă funcția de transmisie include acțiunea unei lentile, atunci va fi cel mai util să urmați o procedură similară cu cea care a rezultat în Ec. (7.20). Vom face asta mai târziu în acest capitol. Dacă funcția de transmisie descrie o deschidere simplă prin stabilirea limitelor numai pentru integrare, atunci o formă diferită va fi mai convenabilă.

Având în vedere acest scop, colectăm factori de lungime în argumentele exponențialelor din Ec. (7.21). Acestea sunt o aproximare pentru R + R'.

r, r,l r∧ ΓЧ/ ɪ Γ(χ- χ2) (χ - χ')2I ɪ Γ(y- y)2 (ÿ ~ y')2 zr n^> x

λ + ^d + zx + 2 | ½H + ½^J + 2 | . D + D _| (7-22)

Este convenabil să folosiți conexiunea de linie P cu P' ca referință (vezi Fig. 7.6). Această linie întâlnește planul de deschidere la Pu (u pentru nedeviat). Putem scrie ecuația acestei linii în termenii coordinalelor sale „x” și z în două moduri diferite, primul folosește P și Pu

= (d' + d)(x' ~x> + x (7.23a)

al doilea folosește Pu și P'

(7.23b)

/ D, \ χu = tp + d,)(χ - x') + X

Se procedează prin formarea (x - xll) din Eq. (7.23a) și la pătrat

, , (x — x')2 ,^(x — x)(× — X,)D

(x - Xu)2 = (x - x)2 + D2 + 2(/+c/(7,24>

Fig. 7.6 Punctele din planul deschiderii sunt cel mai convenabil referite în ceea ce privește interceptarea liniei care leagă punctul sursă cu punctul de observare în cazul în care diafragma conține o deschidere (spre deosebire de o lentilă, de exemplu).

De asemenea, putem forma (x – xu) din Ec. (7.23b) și calculați pătratul acesteia

(x - xu)2 = (x - x')2 +

(x - x')2 ,2 _ 2 (x ~ χ,×x ~ x'^d' (D' + D)2 U   (D' + D)

(7,25)

Acum împărțiți Ec. (7.24) prin D și Ec. (7.25) prin D' și se adună cele două ecuații

(x - Xu)2 (x - Xu)2 = (x ^ x)2 , (x - x')2 , ⅛ -χ')2 _ 2 (x ~x')2

D + D'   D D' D+ DD + D'

Acesta poate fi rescris ca

(x – x)2 _ (x – x')2 ɪ + Dr~

ri i ^^

D + ~D'

(x - xu)2 +

(x - x')2

D + D'

(7,26)

Partea stângă a Ec. (7.26) este același cu primul termen din paranteze din Ec. (7.22). Acum repetăm această procedură pentru ecuațiile dreptei de la P la P' în termenii coordinalelor sale „y” și z.

Cu definiția

1

d

Γ1 1Ί

(7,27)

putem scrie R + R' ca

Я + ≡ D + D' + i + ⅜=-≤] + ɪ [(i - ,y + σ - ,∫] (7.28)

Ultimul termen din Ec. (7.28) este exprimată în termeni de coordonate în planul deschiderii referitor la punctul Pu. Termenii rămași din Ec. (7.28) poate fi văzută ca fiind, la același nivel de aproximare, egală cu lungimea dreptei PP'·

(PP') = [(D + D')2 + (x' - x)2 + (y' - y)2]1'2

= (D + D') 1

, (x - x')2 (y - y')2 ~ (D + D')2 (D + D')2

~D + D' + ɪ

2

(X - x')2

(D + D')2

(aa')2'

(D + D')2

(7,29)

Prin urmare

R + R - (rr') + ⅛ [(x - Xu)2 + (y - ÿu)2]

În numitorul Eq. (7.21) mai facem o aproximare

J = (Π + £>')   1~ 1 1

DD DD (D + D) d (PP')

(7,30)

(7,31)

Cu aceste modificări Ec. (7.21) ia o formă simplă

e-ik(PP') q2 ÇÇ hτ(P → P') ≈   — τ(x, y)

(PP') d JJ

Í — ik   sau

× exp¿-2d[(*-Xu)2+(У-K)2] [dxdy(7,32)

Aceasta poate fi folosită în Ec. (7.9) în loc de Ec. (7.10), pe care o aproximează. Asta da

S.U.A

F(P') = EUP')

∫τ(x, y) e-W2d)[(x-xu)2+cy-^2i dχ d~

(7,33)

Unde

л ei(ωt-k{P0P')}

este câmpul la P' datorat sursei punctuale în absența deschiderii. Vom cali the integrai în Eq. (7.33) the Fresnel integrai.

Este convenabil și convențional să definiți coordonatele adimensionale η_x și η_y unde

(* - xu)

ηy≡

(У - Уи)

(7,35a)

(7.35b)

Apoi Eq. (7.33) devine

E(P) = — E,na(P') τ{ηx, ηy) e-^2^ + ⅛ dηx dηy

(7,36)

Funcția de deschidere este acum exprimată în termeni de η_x și η_y. Acesta servește la limitarea intervalului de integrare determinat de ecuațiile (7.35).

7.1

Difracția Fresnel

Vom discuta acum câteva cazuri speciale în care integrala Fresnel poate fi ușor evaluată. Situația generală este mult mai complexă. Cu toate acestea, exemplele pe care le studiem formează o clasă importantă de probleme. Exemplele diferă doar în forma pe care o ia funcția de transmisie.

În fiecare caz, sursa este un punct la $P = P_0$ în planul x, y. Diafragma, în pianele x, y este cel puțin parțial deschisă și, deocamdată, nu conține lens sau filtre de transmisie. Avem nevoie de câmpul electric E_1 și densitatea de flux S' la punctul

P' în x,, ÿ sau pian de observație. Punctul nostru de plecare va fi de obicei Eq. (7.36), forma standard a integralei Fresnel.

În cazul în care deschiderea devine foarte mare sau este eliminată în întregime, τ = 1. Apoi putem evalua imediat integrala din Ec. (7,36)

e (tπ/2M, | x + '/J) dηx dηy =

e dηy

(7,37)

Aceasta ne spune ce trebuie să alegem pentru constanta C pe care am realizat-o de la începutul capitolului 6.

C = -   (7,38)

De acum înainte vom folosi această substituție în loc de C. Integrala Fresnel poate fi apoi exprimată în termeni de câmp „fără deschidere”.

E'(i”) = ɪ ⅛,(P') f Í ́I,) e-<w2>l⅛+⅛ dηx dη,

(7,39)

A. Diafragma dreptunghiulară

Deoarece funcția de transmisie în acest caz poate fi factorizată

τ(f1x, ηy) = τx(ηx)τy(ηy)

putem discuta despre dependența „x” și „y” separat. Integrai Fresnel devine un produs al integrais unidimensional.

E(P) = J E1na(P1)IxIx(7,40)
unde 1X= f τ,⅛)e-,l'm,'⅛(7.41a)
și J-OO Λ≡ Í τftly) e~w2>η* dηy J ~ ∞(7.41b)

Dacă S'na(P') reprezintă densitatea de flux fără deschidere, atunci densitatea de flux la P' în prezenţa deschiderii va fi

I/ l2l/ I2

S(P') = ⅛(P') l *l4l   (7,42)

1. Limite normalizate. Figura 7.7 ilustrează două deschideri dreptunghiulare tipice care se conformează ecuațiilor

1,   Xi ≤ X ≤ X2

O,   altfel

ai

T,

0,

$y1 \leq y \leq y2$

In caz contrar

În Figura 7.Ib, muchiile identificate la x2, yl și y2 au fost considerate a fi – ∞ și, respectiv, oo. Aceasta reprezintă situația de difracție pentru o deschidere care este un plan parțial, deschis pentru $x \geq x1$.

Adesea, cea mai convenabilă metodă de descriere a difracției Fresnel se referă

Fig. 7.7 (a) Coordonate deschidere dreptunghiulară. (b) Obstrucție în semiplan.

Fig. 7Λ Coordonatele proiectate au o relație unu-la-unu cu punctele din planul deschiderii.

totul în planul de observație, mai degrabă decât în planul diafragmei. Deci, în loc de P, trecem la P'(x', y') unde prin analogie cu Eq. (7,23),

, D' + DX=X DD, -χ°~D(7.43a)

și

, D +DD'

y - y D~ Уo D(7.43b)

Dacă Pr, care este specificat de Ecs. (7.43), este punctul de observație, atunci (x, ÿ) în acele ecuații este același cu (xu, yu). În loc de punctul Iimit P1 în planul deschiderii, considerăm acum proiecția sa P¡ având coordonatele (x'l, ÿt) în planul de observație. Acest lucru este prezentat în Fig. 7.8. Coordonatele lui P'l se găsesc prin înlocuirea coordonatelor lui P1 în ecuațiile. (7,43). Aici P'l este la marginea umbrei geometrice a deschiderii produse de Iight de la sursa punctuală la P0. Atunci putem scrie

z , ,4 D' + D

(*/-*) = - d (X1 - Xu)

și

D+D

(Уi-У) = - d (x1 - xu)

unde x', y' se referă la punctul de observație P'.

În ceea ce privește coordonatele adimensionale ηx și ηy, acestea devin

1

Ίχ, = J; (x'i ~ x') (7.44a)

4yl = j(y'ι- y) (7.44b)

Unde

λD,(D + D')T/2

2D

(7.44c)

este un factor de scară având unități de lungime.

Regiunile brighi ale umbrei din planul de observare (Fig. 7.9) vor fi definite prin x'1 < x' < x'2, y'i ≤ ÿ ≤ y,2, unde, de exemplu,

x'i = Xi

D' + D   D'

—   — x —

D   D

cu expresii similare pentru x'2, y'1 și y'2. Prin urmare, prin Ecs. (7.42) și (7.44), stabilim Iimits pe integrais în ecuațiile. (7.41) în ceea ce privește coordonatele de observație.

r | χi

F

(7.45a)

rix2

(7.45b)

tu - tu

F

(745c)

tIy2

y±~Jl

F

(7,45d)

Aici P'(x', /) este punctul de observație luat în considerare.

2. Fresnel Integrais. Integrale Ix și Iy din ecuațiile. (7.41) poate fi evaluat mai ușor între limitele impuse de ecuațiile. (7.45) dacă le scriem după cum urmează:

422 Difracția II

Λ = Itf2) - Itfl) Iy = itf2) - Itf i) cu

e-<iπ'2>u2 du

0

(7.46a)

(7.46b)

(7.46c)

Integrai din Ec. (7.46c) se numește integrală complexă Frbsnel. Poate fi împărțit

(7.47a)

în părți reale și imaginare, după cum urmează:

∫θ?) = Vtf + i<Vtf

Unde

^) =

'r | / ц \

cos(-U2 I du 0 V 7

(7.47b)

și

'η   iπ V

sin(-U2] du o \ 2 J

π

^tf = -

2

(7.47c)

Acestea sunt evaluate în Tabelul 7.1 pentru un interval selectat de η. Cu aceste informații, intensitatea câmpului electric și densitatea fluxului pot fi calculate pentru difracția Fresnel printr-o simplă deschidere sau obstrucție.

3. Spirala Cornu. Integrala din Ecs. (7.46) are o interpretare grafică în termeni de curbă fazorială în plan complex. Acesta este același concept care a fost prezentat în secțiunea 6.1B2. Aproximăm Eq. (7.46c) de către

NI

Itf) ~ X Au e'0,m•

m = 0

Unde

— π(mΔu)2

=------------

După cum se arată în Fig. 7.10, aceasta va fi suma fazorilor a N fazori incrementali, fiecare dintre

Fig. 7Л0 Fazorii incrementali care reprezintă componente ale integralei complexe Fresnel.

7.2 Difracția Fresnel

423

Tabelul 7.1. Valorile Integralei Fresnel complexe

r	4Vtf^(Z7)
0.00	0.0000-0.00004.500.5261-0.4342
O.IO	0.1000-0.00054.600.5673-0.5162
0.20	0.1999-0.00424.700.4914-0.5672
0.30	0.2994-0.01414.800.4338-0.4968
0,40	0,3975-0,03344,900,5002-0,4350
0,50	0,4923-0,06475,000,5637-0,4992
0,60	0,5811-0,11055,050,5450-0,5442
0.70	0.6597-0.17215.100.4998-0.5624
0,80	0,7230-0,24935,150,4553-0,5427
0.90	0.7648-0.33985.200.4389-0.4969
1,00	0,7799-0,43835,250,4610-0,4536
1.10	0.7638-0.53655.300.5078-0.4405
1,20	0,7154-0,62345,350,5490-0,4662
1.30	0.6386-0.68635.400.5573-0.5140
1,40	0,5431-0,71355,450,5269-0,5519
1,50	0,4453-0,69755,500,4784-0,5537
1,60	0,3655-0,63895,550,4456-0,5181
1,70	0,3238-0,54925,600,4517-0,4700
1,80	0,3336-0,45085,650,4926-0,4441
1.90	0.3944-0.37345.700.5385-0.4595
2.00	0.4882-0.34345.750.5551-0.5049
2.10	0.5815-0.37435.800.5298-0.5461
2,20	0,6363-0,45575,850,4819-0,5513
2.30	0.6266-0.55315.900.4486-0.5163
2,40	0,5550-0,61975,950,4566-0,4688
2,50	0,4574-0,61926,000,4995-0,4470

2,60	0,3890-0,55006,050,5424-0,4689
2,70	0,3925-0,45296,100,5495-0,5165
2,80	0,4675-0,39156,150,5146-0,5496
2.90	0.5624-0.41016.200.4676-0.5398
3.00	0.6058-0.49636.250.4493-0.4954
3.10	0.5616-0.58186.300.4760-0.4555
3,20	0,4664-0,59336,350,5240-0,4560
3.30	0.4058-0.51926.400.5496-0.4965
3,40	0,4385-0,42966,450,5292-0,5398
3,50	0,5326-0,41526,500,4816-0,5454
3,60	0,5880-0,49236,550,4520-0,5078
3.70	0.5420-0.57506.600.4690-0.4631
3,80	0,4481-0,56566,650,5161-0,4549
3.90	0.4223-0.47526.700.5467-0.4915
4.00	0.4984-0.42046.750.5302-0.5362
4.10	0.5738-0.47586.800.4831-0.5436
4,20	0,5418-0,56336,850,4539-0,5060
4.30	0.4494-0.55406.900.4732-0.4624
4.40	0.4383-0.46226.950.5207-0.4591

amplitudinea Δu și unghiul de fază $\delta(m)$. Aici aranjam suma astfel încât Δu — η/N. Apoi, integrala reprezintă suprapunerea câmpurilor în punctul de observație datorită contribuțiilor porțiunii diafragmei dintre origine și Iimitarea η corespunzătoare. În cazul în care N merge la infinit, suma fazorilor devine o curbă continuă. Lungimea totală a curbei este dată de

Dependența pătratică a <5 de variabila Lungimea arcului u, care este caracteristică difracției Fresnel, este originar din dependența pătratică a diferenței de lungime a căii optice (R + R) — (PPr) pe

$(x - xu)2 + (\ddot{y} - yu)2$

Acest lucru este evident din Ec. (7.30). În cazul câmpului îndepărtat, unghiul de fază depinde în mod liniar de lungimea arcului, iar curba fazorilor era un cerc. Aici curba are o curbură mai mare decât un cerc, ceea ce duce la un comportament „încolăcit”. Rezultatul este spirala Cornu din Fig. 7.11.

Pentru o valoare dată a lui η, $I(\eta)$ se obține din spirală așa cum se arată în Fig. 7.12. Lungimea totală a arcului spiralei Pornind de la origine este etichetată cu numere

Fig. 7.11 Cornu spirală.

-1,0

1.0

Rg. 7.H Exemple de aplicare a spiralei Cornu pentru a determina soluția la integrala Fresnel complexă.

pe curba. Convenția semnelor este astfel încât η este pozitivă în cadranul din dreapta jos și negativ în cadranul din stânga sus. Atunci I(η) este numărul complex reprezentat de un vector cu coada la origine și capul în locul de pe spirale marcat „η”, ale cărui totaluri sunt la distanța de la origine se ridică la η unități.

Atunci I(η2) ~ I(rIi) este un vector complex al cărui cap se află la η2 cu coada la η1 pe spirai. Dacă η2 > 0 și ηl < 0, capul vectorului se află în al patrulea cadran, iar coada este în al doilea cadran. Dacă η2 > 0 și η 1 > 0, atât capul, cât și coada se află în al patrulea cadran. Dacă η2 < 0 și ηl < 0, ambele se află în al doilea cadran.

Valorile limită ale integrării ca η → + ∞ pot fi arătate a fi

și

(7,48)

Astfel, „ochiul” spiralei din al patrulea cadran este la

/(— co) = $(+ oo) + i<y7(+ ∞) = ɪ(l — i)

(7.49a)

426

Difracția II

Fig. 7.13 Reprezentarea undei neobstrucţionate.

iar ochiul din al doilea cadran este la

/(— oo) = #(— oo) + /У1(— 00) = - 2 ɑ - ʊ (7.49b)

Ne întoarcem acum la câteva cazuri limitative ale deschiderii dreptunghiulare.

4. Fără deschidere. Deschiderea fără deschidere poate fi gestionată setând τx și τy ambele egale cu unitatea așa cum sa făcut înainte. Apoi, Iimit-urile ambelor integrai x și y se extind de la — oo la oo. Din Ecs. (7.46) și (7.49) obținem

Zx = Zy = Z(+oo)-/(-∞) = (l -i)

Fazorul care reprezintă Ix sau Iy merge de la ochi la ochi al spiralei Cornu, așa cum se arată în Fig. 7.13. Ecuația (7.40) dă apoi câmpul la P'

E'(P,) = ɪ e;,(P')(1 - O2 = ЕЦP')

Un rezultat deloc neașteptat!

Valorile ecuațiilor. (7.49) implică următorul rezultat important care a fost deja obținut ca Eq. (7,37):

00

dacă (-iπ~. ì

λd exP½/ K* - *ɔ ÷(y-Jιu) Hdxdy = 1 (7,50)

Fig. 7.14 Barieră cu margine dreaptă.

5. Straight Edge. Bariera de margine dreaptă merge de la x — — oo la x = x1. De la X = x1 la x = oo nu există nicio barieră. Acest lucru este prezentat în Fig. 7.14. Geometrica! regiunea brighi în planul de observare se extinde de la x' = x'1 la x' = oo. Deoarece vom avea — y'1 = y'2 = + oo, integrala Iy este stili (1 — i). Pentru Ix Iimit-ul superior rămâne + oo, dar Iimit-ul inferior este

x'1 — x' f^χι ~ I7

Capul fazorului reprezentând pe Ix rămâne în ochiul inferior al spiralei Cornu. Poziția cozii fazorului depinde de Iimit ηxi inferior. Dacă x este mai pozitiv decât X1 cu o sumă care este mulți multipli ai factorului de scară

λD \ D + Ώ')Ί1/2

2D

atunci ηx, este suficient de negativ pentru a fi practic — oo, iar Ix ~ (1 — i), dând

E'(P') E'na(P')

Aceasta este reprezentată de punctul A din Fig. 7.15.

Pe măsură ce x' scade spre x1, Iimit-ul geometriei! umbră, ηxι rămâne

Fig. 7.15 Detalii ale modelului de difracție produs de o barieră drepte în limita câmpului apropiat.

negativ dar și scade. Coada fazorului pentru Ix iese din ochi în partea superioară a spiralei Cornu și traversează un arc mai mare și mai mare. Procedând astfel, mărimea lui Ix crește și scade deasupra și sub valoarea |(1 — i)| = y/l. Acest lucru provoacă franjuri în regiune care, prin geometrica! optica, ar trebui sa fie uniform brighi. Acest lucru devine proeminent la valorile ηxt aproape de —5. Un punct tipic corespunde comportamentului de lângă B din Fig. 7.15.

Când ηx. = 0, apoi Ix = (1/2)(1 — i), Corespunzător punctului C. Această valoare este doar jumătate din cea obținută fără deschidere, ceea ce înseamnă densitatea fluxului la C a

S (xi) = д Sna

Punctul C corespunde exact marginii umbrei geometrice.

Pentru x' < x'1, ηxi este pozitiv și coada fazorului pentru Ix se află pe jumătatea inferioară a spiralei. Pe măsură ce x' continuă să scadă, ηxi crește, iar coada se îndreaptă spre ochi. Aceasta este regiunea D. Mărimea lui Ix scade monoton și pentru ηxi > +5, să zicem, Ix este destul de mică. Aceasta este bine în regiunea umbrei geometrice.

6. Fante largi. Fie ca marginile fantelor să fie la x = + x0. Atunci marginile de umbră din planul de observare sunt la x, = x'l și x' — x,2, unde

, D + D' D'

χ1=------

, D + D' _ D'

x2=D~x^τx

iar regiunea umbră are Lățimea

AZ z , D + D'

Δx -X2 x1- p. 2x0 (7,51)

Integrala pentru Iy are infinite Iimiti și dă Iy = (1 — i).

O fantă „largă” este una care are o lungime totală a arcului pe spirala Cornu

Δη = nX2 - nXi

care este foarte mare în comparație cu unitatea. Această condiție poate fi rescrisă folosind ecuația (7.45) sau (7.35).

1 / x x'2 - X1 „ ~/ 2

1 « - ‰,) = ~f = 2x0 /—(7,52)

Când x' se află în zona centrală a regiunii geometrice strălucitoare, avem

x'2 - x' > F sau ηxι > 1, adică ηx2½ + ∞

și

x' — x'1 > F sau ηxι < — 1, adică η

— ∞

Fig. 7.16 Densitatea fluxului în modelul de difracție Fresnel pentru o fantă. Regiunea din partea de sus a figurii arată întinderea geometriei! umbră.

Atunci Ix este în esență egal cu valoarea sa pentru nicio deschidere (1 – i), cu fazorul său mergând practic de la ochi la ochi pe spirala Cornu.

Pe măsură ce X se mișcă spre marginea din stânga a umbrei la x1, tot în regiunea brighi, ηx2 devine și mai mare, iar capul fazorului rămâne în ochiul drept inferior. Apoi nx¡ devine Iess negativ și coada fazorului începe să se desprindă din ochiul stâng sus, exact ca și cum nu ar exista marginea dreaptă a fantei. În mod similar, pe măsură ce x' se apropie de marginea dreaptă a umbrei la x'2, coada fazorului pentru Ix rămâne foarte aproape de ochiul stâng superior, iar capul său începe să iasă în spirală din ramura I inferioară dreaptă, la fel cum am face noi. așteptați-vă dacă nu ar exista marginea stângă a fantei. Modelul de difracție rezultat este în esență o suprapunere a două modele drepte, așa cum este indicat în Fig. 7.16.

7. Fantă îngustă. Dacă lățimea fantei 2x0 este de ordinul ʌ/'λd/2, astfel încât Arç este de ordinul unității sau poate puțin Iar, atunci un capăt al fazorului pentru Ix va ieși dintr-un ochi al spiralei Cornu înainte ca celălalt capăt să aibă o șansă de a ajunge în celălalt ochi. Forma modelului de difracție este destul de sensibilă la dimensiunea lui Δη, așa cum se arată în Fig. 7.17.

În cazul Iimiting în care Arç < 1, trecem la difracția Fraunhofer. Lungimea arcului este atât de mică încât trebuie să fie înfășurată într-un ochi al spiralei Cornu înainte ca acordul reprezentând Ix să treacă printr-un minim. Amploarea modelului de difracție este mult mai mare decât cea a umbrei. Putem arăta că în Iimit ca Δ//→0 Fresnel intégrais dau expresia Fraunhofer sau difracția în câmp îndepărtat.

8. „Limita” opticii Geometrica. Luați în considerare o fantă care este foarte largă. Cerința este [Eq. (7,52)]

/2\1/2

1 Δη = ηx2 - ηxι = 2x0i I

Fig. 7.17 Densitatea fluxului în modelul de difracție Fresnel pentru o fantă ca funcție a lățimii fantei. Bara de jos indică geometria! umbră.

Indiferent cât de mare este Δη, există întotdeauna abateri de la predicțiile opticii geometrice lângă marginea umbrei geometrice. Aceasta se întâmplă pentru |rçX11 sau | t/xJ de ordinul 10, pentru că atunci au loc oscilațiile în regiunea B și intensitatea nenulă din regiunea D din Fig. 7.15. Aceste efecte de difracție au loc atunci când x’ se află la o distanță Δx’ de marginea umbrei dată de

Γ λD'(D + D)I1z2

Δx, ≤ IOF = 10 --------V2£) j (7,53)

Henee, pentru D și D' fix, Δx' poate fi făcut arbitrar mic prin scăderea suficientă a lungimii de undă, deși dimensiunea oscilațiilor în E' nu se va diminua. În acest sens, optica geometrică poate fi obținută din optică fizică sau ondulată, în limita Iimit ca $\lambda \to 0$.

9. Modele dreptunghiulare. O expresie pentru densitatea fluxului din Eq. (7,42)

\I l2 | / I2

S \ P') s'na(P'Γ yl

Când Iimit-urile integrării nu sunt infinite, integrala Iy se va comporta exact ca Ix discutat anterior, iar difracția bidimensională poate fi obținută din produsul |IxIy \ 2.

Fig. 7.1 β Demonstrarea principiului Babinefs în difracția FresneI.

10. Obstacole. Cazul unui obstacol dreptunghiular și configurația sa limită a unui ac pot fi tratate printr-o generalizare evidentă a metodelor precedente. Uneori este convenabil să folosiți principiul lui Babinef, Eq. (6.11), care poate fi scris sub forma

E'na(P') = ^apertura(ʃ") + Obstrucție(^')   (7-54)

Cu simetria dreptunghiulară și factorizarea rezultată a integralei, obținem o ecuație corespunzătoare pentru integrais Ix și Iy, de exemplu,

Oaperture + -Oobst ^x,na (ɪ 0   (7,55)

Aici am dori să folosim principiul setând Oobst = (1 — i) — Oaperture> unde Oaperture este valoarea integralei Fresnel pentru o deschidere cu aceleași dimensiuni ca obstrucția. Fig. 7.18 demonstrează acest principiu. Aceasta ar reprezenta o poziție în interiorul, dar nu în centrul umbrei geometrice a unei obstacole. Rețineți că suma fazorilor a două componente, reprezentând /o^bst și /o+bst, este necesară pentru a reprezenta zonele deschise pe planul deschiderii care se extinde la X= + oo de fiecare parte a obstacolului.

B. Diafragma circulară

Difracția Fresnel din deschiderile circulare și obstacolele are unele proprietăți surprinzătoare. Un ingredient esențial este simetria de rotație în jurul unei axe prin centrul cercului implicat. Vom presupune deci că sursa

Fig. 7.19 Geometrie pentru difracția Fresnel printr-o deschidere circulară, (a) Vedere în perspectivă din lateral. (b) Vedere a planului de deschidere în direcția de propagare a luminii.

punctul Pii se află pe această axă, axa z. Pentru simplitate avem în vedere, inițial, un punct de observație care se află tot pe axa optică. Geometria este prezentată în Fig. 7.19. Va trebui să reintroducem

factorul de înclinare care a fost definit în Ec. (6,8). Datorită gradului ridicat de simetrie în această configurație, efectele de înclinare sunt mai vizibile decât pentru deschiderea dreptunghiulară.

1. Integrală Fresnel în coordonate polare. Începem cu Eq. (7.39) cu factorul de înclinare Q introdus.

fi,(f,,) = | Eun

F — iπ τ(>/)βexp — η

dηx dηy

(7,56)

2

unde η? ≡ η; + η^.

Exponențialul se va scrie e 'δ, unde prin Ecs. (7.35) și (7.30) putem pune ч <5 = f>ι2 * = ^[(iv + σ-yu)2ι

2π —

= - [(/? + «') -{PP')] (7,57)

Rețineți că Pu este în centrul deschiderii și poate fi folosit ca o origine convenabilă pentru coordonatele polare r și unde

r2 = {X- Xu)2 + {y- yu)2 = {Pj>)2

după cum se arată în Fig. 7.19h. Apoi Eq. (7.57) devine

i=⅞ <7·58) unde d respectă Ec. (7,27). Putem apoi scala r cu factorul J2/{λd) pentru a obține coordonatele polare η, (f> în termeni de variabile adimensionale. Dacă stabilim dηx dηy = η dη d$, ecuația (7.56) devine

E'(P') = ⅛(n fi«'/) e~ilQtl dη d$ (7.59)

Funcția de transmisie, care doar stabilește limitele de integrare, va avea această formă

η ≤ r0j2/{λd) η > r0J2/{λd),

1,

.0, dacă deschiderea este o gaură cu raza r0.

Nu există nicio restricție asupra variabilei $, care poate varia de la O la 2π Independent de r. Apoi, pentru că

r(rç) =

(7,60)

i2π

d$ = 2πη dη = πd{η2) = 2dδ

0

noi obținem

E'{P') = iE'na{P')

e~iδQ{δ)dδ

(7,61)

0

unde <50 ≡ πr0/(Λd) este valoarea diferenței de fază la P' între o undă care vine de la marginea deschiderii la f0 și unda care urmează axa z.

2. Curba fazorilor. Ecuația 7.61 este o integrare complexă care poate fi reprezentată ca a

curba fazorilor în planul complex. Să examinăm

I{δ0) =

* ào

Q{δ)e~iδ dδ

(7,62)

o

Fig. 7.20 Curba fazorilor pentru integrala Fresnel complexă în situația deschiderii circulare. Raza curbei scade pe măsură ce spirala se înfășoară din cauza factorului de înclinare.

Curba este prezentată în Fig. 7.20. Factorul de înclinare Q(δ) este o funcție lină, monoton descrescătoare a lui δ așa cum se arată în Fig. 7.21. Dacă ar fi să-și păstreze valoarea inițială de unitate, am putea realiza imediat integrarea în Eq. (7,61). Curba fazorilor ar fi un cerc, așa cum este pentru cazul difracției în câmp îndepărtat. Mai mult, printr-un argument asemănător acelei ecuații înconjurătoare. (6.36), putem arăta că cercul ar trebui să aibă o rază de unu. Deoarece curba fazorilor începe tangentă la axa reală la originea planului complex, cu δ = 0, și apoi se curbe în al patrulea cadran pe măsură ce faza devine negativă, putem concluziona că centrul cercului ar fi la punctul (0, – i). Scăderea lentă a Q va face ca curba să se spiraleze treptat spre centru. Îndepărtarea de la cercul original este lentă, deoarece β(<5) variază foarte lent, în special pentru primii multipli de 2π. Atunci I(δ0) va oscila inițial între extremele zero și – 2i.

În Iimit, pe măsură ce <50 devine foarte mare, Q va tinde spre zero. (În acest Iimit unghiurile θη și θη. se apropie de π/2. Henee, Q = (l/2)(cos θη + cos θη,) → 0.) Curba fazorilor se îndreaptă treptat în spirală către punctul – i și E '(P') se apropie de valoarea lui E'na(P').

3. Zone Fresnel. Este util să ne gândim la zona deschisă a deschiderii de diferențiere ca fiind împărțită în zone, așa-numitele zone Fresnel, care sunt centrate în Pu. Acestea sunt definite astfel încât diferența de fază δ se modifică cu π într-o zonă și să fie egală cu ηπ la marginea celei de-a n-a zone. Aceasta este echivalentă cu modificările diferenței de cale [(.R + R') – (PP')] cu 2/2 și, respectiv, nλ/2. O ilustrare a metodei de Construire a acestor zone se găsește în Fig. 7.22 pentru cazul în care punctul sursă P este la infinit. Sferele succesive trase din punctul de observare P' au raze diferite cu 2/2.

Fig. 7.21 Factor de înclinare versus <5 care arată schimbarea gradată.

Fig. 7.22 Construcția zonelor Fresnel. Punctul sursă este la infinit. Sferele despre P' au raze diferite cu 2/2. Intersecțiile lor cu planul deschiderii formează zonele circulare.

Ecuația (7.59) dă pentru raza zonei a n-a

fn = y/nλd (7,63)

Rețineți că aria unei zone Δσ este independentă de n (la cel puțin în cadrul aproximării pătratice pentru δ pe care o folosim aici):

Δσ = π(f2+ 1 – r2) = πλd = πr2   (7,64)

Pe măsură ce integrăm peste un total de N zone în deschiderea de difractare, curba fazorilor din Fig. 7.20 face N/2 revoluții. Dacă N nu este prea mare și există un număr par de zone în interiorul deschiderii, integrala I(δ0) este foarte mică; dacă există un număr impar de zone, I(δ0) este aproape de – 2i.

Putem lua în considerare factorul de înclinare Q în următorul mod aproximativ. Contribuția la integrală din zona a n-a este în esență.

Δ/

-KQn,

nu ciudat

n

ΔZn ≈ +2iQn, n par

unde Qn este valoarea medie a factorului de înclinare peste zona a n-a. Integrala f(<50) este apoi dată aproximativ de

I= ∑Mn= -2i[Ql - ô2 + β3 - β4 + · · ± ÔJ

n= 1

Qi . Í Q1 /~ι i β3 | . 1 Q-3 л . Qs A i /ɔ iiz \

= -2z y + I — - Q2 + y) + I y - Ô4 + y H- ± Qn   (7-65)

Suma a fost organizată în acest mod deoarece termenii din paranteze sunt în esență zero. Pentru a vedea acest lucru, luați în considerare Fig. 7.23. Din Eq. (7.63) și un studiu al diagramei putem scrie

cos θη = D(D2 + nλd) 1/2

și

cos θ'η = D'(D,2 + nλd) 1/2

Atunci factorul de înclinare la marginea zonei Fresnel Hth este

1   Γ

2   '

nλd \ 1/2

D2 /

nλd \ 1/2

Acest lucru poate fi aproximat (în măsura în care λ este mult mai mic decât D sau D') prin

1 Γ λd   λd

δ = 2 1-"2D≡+1^"2D^

2

sau

Q ~ 1 - nK

(7,66)

unde K = λd/(2D2 + 2D'2).

Apoi termenii din paranteze din Eq. (7.65) poate fi văzut ca fiind de formă

+ (m + 1) -

(m + 2)'

2

~0

Acum putem scrie Ec. (7,65) ca

ï -KQ1+Qn)

i -KQ1-Qn)

Nu ciudat

N chiar

unde Q1 — 1.

Pentru N mare, Qn se apropie de zero, iar I se apropie de — i, doar jumătate din contribuția din prima zonă Fresnel.

4. Comportament în afara axei. Dacă deplasăm punctul de observație de pe axa optică, atunci calea optică „directă” nu va mai coincide cu axa z. Punctele Õ și Pu din planul deschiderii sunt apoi separate prin distanța fu. După cum se arată în Fig. 7.24, putem încă folosi Pu ca centru al unui sistem de coordonate polare, doar că acum integrarea în Eq. (7.59) va avea limite asimetrice.

Fig. 7.24 Coordonatele de deschidere care arată interceptarea liniei care leagă sursa și punctul de observație ca Pu pentru cazul în care punctul de observație nu se află pe axa optică.

Zonele Fresnel ne vor ajuta să înțelegem calitativ sau semicantitativ ce se întâmplă în acest caz. Putem arăta asta

∫ d$ = 2π

pentru Я < (f0 - fu)

și

,τ ~ (fì + Я2 - r% dφ — 2 arc cos -----------------

\ 2/ιru

(7,67)

pentru (r0 - fu) < Я < (r0 + ru).

Obținem astfel contribuția totală din toate zonele cu raza I mai mică decât (r0 — fu) și contribuțiile descrescătoare din zonele cu raza cuprinsă între (f0 — fu) și (f0 + ru), după cum se poate observa din Fig. 7.24 și Fig. 7.25. .

Contribuția la lungimea arcului curbei fazorice din fiecare dintre aceste zone parțial obstrucționate este proporțională cu zona Neobstrucționată și este mai mică decât valoarea Qnπ care provine din zona a n-a completă. Diferența de fază

Fig. 7.25 Natura zonelor Fresnel în interiorul unei deschideri circulare de difracție atunci când centrul zonelor la Pu, care se află de-a lungul liniei de la sursa punctuală la punctul de observare, nu se află în centrul deschiderii Õ. Fiecare altă zonă este întunecată. Contribuțiile din zonele adiacente sunt de semn opus și aproape se anulează.

Fig. 7.26 Model de difracție Fresnel pentru o deschidere circulară.

stili se modifică cu π de-a lungul zonei. Rezultatul este că curba fazorilor se înfășoară mai rapid. Tipul de model de difracție care este observat este indicat în Fig. 7.26.

Numărul de inele din model va crește pe măsură ce planul de observație se deplasează spre deschiderea de difracție; modelul se va extinde spre exterior. Pe măsură ce planul de observație se îndepărtează de deschidere, modelul va avea mai puține inele și se va contracta. În cele din urmă, când doar o mică parte dintr-o zonă acoperă deschiderea pentru P' pe axă, trecem la limita câmpului îndepărtat.

Pentru un diametru de deschidere mare r_0 și/sau o distanță scurtă D', numărul total de zone implicate va fi destul de mare. Comportamentul modelului de difracție pentru Pu lângă Õ depinde de faptul că deschiderea este foarte precis un cerc. Dacă are margini zdrențuite cu o scară de rugozitate comparabilă cu lățimea Ia N-a zonă, care din Ec. (7.63) este dat de

~2 ~2

rN - rN-1 = Δrfi = . ɪ ≈ 2F^ = ɔ /Tj, = (7·68)

'N ɪ 'NI ~'N 2y/λd

apoi prima tură sau cam asa ceva a curbei fazoare din Fig. 7.20 va fi modificată, producând modificări importante în modelul de difracție și având tendința de a netezi inelele.

Deoarece orice deschidere reală va fi aspră la o scară suficient de mică, la o lungime de undă suficient de mică acest efect va prelua. În acest fel, Iimit al opticii geometrice este atins ca $\lambda \to 0$.

Când punctul de observație P' se deplasează în umbra geometrică, punctul Pu se deplasează în partea opacă a deschiderii, așa cum se arată în Fig. 7.27. Contribuțiile multor zone parțiale care sunt expuse tind să se anuleze reciproc, dând un câmp electric rezultat foarte mic. Există un prim inel larg de difracție brighi format chiar înainte ca

punctul P' să treacă în umbră, din cauza Anulării incomplete a contribuției din zona centrală. Acest inel apare în Fig. 7.26. Lățimea sa este aproximativ egală cu cea a zonei centrale proiectate pe planul de observație la P'. Acesta este de ordinul factorului de scară F = y/λD,(D + Df(ID) folosit în discuția noastră despre Margini drepte și deschideri dreptunghiulare, iar prima franjă brighi pentru o muchie dreaptă a fost de aproximativ F lățime. Aproape de marginea umbră al unei deschideri circulare cu diametru mare, modelul de difracție ar trebui să fie destul de asemănător cu cel al unei margini drepte.

5. Obstacol circular. Luați în considerare un obstacol circular rotund cu rază F0. Atunci pentru P' pe axa Eq. (7.59) devine

• CO

E'(P') = iEfna(P')I, I = e~iδQ(δ) dδ (7,69)

J ¿0

unde unghiul de fază inițial <50 este dat de

În acest caz, secțiunea curbei fazoare din Fig. 7.20 de la δ — 0 la δ — δ0 lipsește. Coada fazorului pentru I va fi pe spirală unde faza este egală cu <50. Capul său va fi în centru la — i. Astfel, dacă <50 nu este prea mare, astfel încât Q este încă aproximativ unitate, aflăm că I ar trebui să aibă o valoare absolută de unu, iar densitatea fluxului ar trebui să fie dată de

$ — $na

Astfel, densitatea fluxului în centrul modelului de difracție al unui obstacol circular este egală cu densitatea fluxului atunci când nu există niciun obstacol! Această predicție surprinzătoare este strict un fenomen ondulatoriu.

Pentru ca acest efect să fie observat, îndepărtarea conturului obstacolului dintr-un cerc adevărat trebuie să fie mult mai mică decât Lățimea Δfjv a Iei sau A N-a zone Fresnel care este acoperită de obstacol. Aceasta este obținută de Ec. 7,68 ca

Δrjv =

1 Ш\112

2 \ NJ

Mai mult, lățimea Δr a punctului luminos din planul de observație va fi aproximativ jumătate din Lățimea Ar n a acestei zone I proiectate din punctul sursă pe planul de observație. Că acest lucru este aproximativ adevărat poate fi văzut schițând curba fazorială cu aproximativ un sfert din zona N-a și trei sferturi din zona (N + l)-a deschisă. Din Eq. (7.68) obținem

1 D + D' y/2F

Ar ≈ - ArN---= v „

2   D 4√N

| λDr(D + D')

2D

(7,70)

Modelul rezultat este prezentat în Fig. 7.28. Pata este cunoscută ca punct luminos Poissoris, după matematicianul francez care a prezis-o.

Fig. 7.2β Model de difracție Fresnel pentru un obstacol circular.

Există o poveste interesantă în spatele predicției lui Poisson despre locul brighi. În efortul de a discredita teoria Fresnel a difracției, Poisson a folosit teoria pentru a prezice existența punctului luminos. Acest lucru, a spus el, a încălcat atât bunul simț, cât și rezultatele experimentelor brute care au fost făcute până atunci. Când s-au încercat experimente mai rafinate, locul a fost într-adevăr văzut. În loc să discrediteze teoria lui Fresne, predicția lui Poisson a condus la o justificare a acesteia.

6. Placi de zonă. Să presupunem că avem o deschidere cu regiuni circulare opace și transparente alternante care doar coincid cu zonele Fresnel adecvate valorilor D, D' și λ utilizate. Acesta este un tip de „placă de zonă”. Să presupunem că o astfel de placă este centrată și utilizată ca deschidere de difracție ca în Fig. 7.19. Raza primei sale zone va fi.

JTd =

/ λDD' \1/2

+ D'/

(7,71)

așa cum este dat de Ec. (7,63). Dacă placa are N12 zone deschise și apoi este opac și dacă neglijăm factorul de înclinare Q, aflăm că curba fazorilor constă dintr-o coloană de N/2 semicercuri cu raza unitară, așa cum se arată în Fig. 7.29. Integrala I este suma coardelor acestor cercuri și este — Ni pentru Fig. 1.29a și + Ni pentru Fig. 1.29b. Câmpul este + NE'na în cele două cazuri, iar densitatea fluxului

S' = N2S1na (N = de două ori numărul de zone deschise)

Acum să presupunem că pentru D, D' și d dat, placa de zonă este atât de mare încât blochează sau transmite zonele trei la un moment dat. Dacă centrul este deschis, va trece prin lumina din primele trei zone, apoi va bloca lumina din următoarele trei și așa mai departe. Curba fazorilor din Fig. 7.29 ar deveni apoi cea din Fig. 7.30. Fazorul

rezultat care reprezintă câmpul electric ar fi redus cu un factor de 3, iar densitatea fluxului ar fi mai mică cu un factor de 9. Rezultate similare s-ar obține cu un

Fig. 7.29 Diagrama fazorilor pentru diagrama de difracție a unei plăci de zonă având 12 zone (6 zone deschise), (a) Zonele impare sunt transparente, (b) Zonele pare sunt transparente.

Fig. 7.50 Diagrama fazorilor pentru o zonă care blochează trei zone simultan.

Placă de zonă suficient de mare care a blocat sau a depășit zonele 5, 7 și așa mai departe. Cu un număr par de zone blocate și trecute, totuși, câmpul este aproximativ zero.

Condiția ca primul cerc din placa de zonă să acopere n1 zone este ca raza acestuia să fie dată de

(7,72)

Putem rescrie Ec. (7.72) sub forma

n1A 1   1 ɪ

Tf-d~D + 57

(7,73)

unde n1 este un întreg impar. Aceasta are aspectul ecuației paraxiale a lentilei subțiri, cu condiția ca lungimea focală să fie considerată a fi

f2

■ λ•≡⅛ (7·74> Proprietățile plăcii de zonă sunt similare cu cele ale unui Ien simplu, cu excepția valorilor multiple ale lui Ä. De exemplu, dacă undele plane cu lungimea de undă Z incid în mod normal pe placa de zonă, există va fi un punct luminos la o distanțăʃɪ la dreapta plăcii și alte puncte cu luminozitate în scădere la distanțe de /1/3,/1/5 și așa mai departe.

Fig. 7.51 Ilustrarea acțiunii simultane a Ienilor pozitive și negative a unei plăci de zonă.

Placa de zonă acționează simultan ca un Ien pozitiv și negativ cu lungimea focală +f1, +f1/3 și așa mai departe. Pe lângă seria de puncte tocmai menționate, formate la righiul plăcii cu lumină incidentă paralelă, o serie similară de „pete virtuale” se va găsi la distanțe/ι,/ι/3,/1/5, .. .la stânga lentilei. Vom încerca să ilustrăm acest efect în Fig. 7.31.

Figura 7.32 prezintă funcția de transmisie a plăcii de zonă având zone cu numere impar deschise și având curba fazorilor din Fig. 7.29a. Putem începe și cu o zonă parțială deschisă; să spunem că o fracțiune ε din zona primei zone este deschisă. Raza muchiei sale va fi y/εr 1, iar unghiul de fază peste ea va varia de la O la επ. Apoi alternăm inele opace și deschise, fiecare având o zonă πr1. Primul inel întunecat se va extinde de la r' — y/εr1 la r' = y/ε + Ir1; primul inel brighi plin de la y/ε + If1 la y/ε + 2f 1 ; și așa mai departe. Funcția de transmisie pentru cazul ε = 1/2 este prezentată în Fig. 7.32b, iar curba fazorilor este trasată în Fig. 7.33 pentru un total de 12 zone. Acest lucru ar trebui comparat cu curbele fazorice din Fig. 7.29a, b, care corespund cu ε = 0 și ε — 1, respectiv.

Se vede ușor că efectul zonei parțiale este de a schimba câmpul electric rezultat de la NE,na la NelπεE,na (dacă se stabilește Q = l), unde N este numărul total de zone.

Fig. 7.33

7.3

Formarea imaginii: obiecte coerente

Teoria formării imaginii în optica fizică se concentrează în jurul caracteristicilor care modifică faza ale lentilei. Vom considera aici doar obiecte coerente. Acestea sunt definite a fi obiecte mai mici decât lungimea coerenței transversale a luminii care provine de la ele, așa cum se întâmplă adesea la microscoape. Acesta este și cazul obiectelor de macroscopie iluminate de un laser.

Bazele acestei abordări au fost puse în mod independent de către Ernst Abbe (1840-1905) și Herman LF von Helmholtz (1821-1894) la începutul anilor 1870. Baza pentru tratarea modemului a fost dată de Lord Rayleigh (1842-1919) în 1896. Astăzi acesta este un formalism ferm stabilit din care pot fi derivate majoritatea conceptelor optice, inclusiv toate optica geometrică.

Revenim la metoda generală prezentată în Secțiunea 7.1 în cadrul aproximării parabolice. Dorim să luăm în considerare geometria din Fig. 7.4 cu un Iens în planul deschiderii. Acest lucru poate fi tratat în cadrul formalismului de difracție, cu condiția să identificăm funcția de transmisie adecvată care ține cont, nu numai de extinderea Ienilor, ci și de proprietățile sale de focalizare. Situația este ilustrată în Fig. 7.34, care este o vedere schematică a unui sistem simplu de formare a imaginii.

Câmpul incident va fi în multe cazuri un val plan. În Fig. 7.35 este prezentat vectorul de propagare pentru o undă plană care este înclinată în raport cu axele x și y cu unghiurile θx 0 și θy0, respectiv. Cosinusurile de direcție care identifică direcția de propagare a acestei unde plane particulare sunt atunci α0 = cos θx0 și β0 — cos θy Q. În acest caz, câmpul incident în planul obiect va fi

E(P) = E(x, y) = Aeiωte~ikiaox+fioy> (7,75)

Obiectul nostru va fi orice film sau ecran, în esență bidimensional, cu transmisie parțială, care modulează lumina incidentă care cade pe el. Acesta va fi descris de o funcție de transmisie $\tau(x, y)$. Obiectul ar putea fi o simplă deschidere dreptunghiulară sau circulară sau ceva mult mai complicat, cum ar fi un grătar de difracție sau o transparență a unei fotografii. Imediat dincolo de planul obiectului, distribuția câmpului

Fig. 7.54 Reprezentarea schematică a unui sistem simplu de formare a imaginii. Expresiile pentru câmpurile optice de pe partea de transmisie a fiecărui plan sunt prezentate în partea de jos a diagramei.

y

Rg. 7.55 Vector de propagare care descrie direcția pentru o undă plană.

va fi produsul câmpului incident și funcția de transmisie a obiectului.

Vor exista și cazuri în care va trebui să studiem efectul sistemului optic asupra unei surse punctuale. Ca și în Secțiunea 7.1 pentru o sursă la (x_0, y_0), aceasta poate fi gestionată cu o distribuție sursă

E(P)τ(P) = £(x, y)τ(x, y) = y eiω,δ(x - x0)δ(y - y0) (7,76)

[Rețineți că A, Puterea câmpului sursă, trebuie să aibă unități diferite în ecuațiile. (7.75) și (7.76).]

A. Acțiunea lentilei

1. Funcția de transmisie a obiectivului. Neglijăm Iosurile ușoare care rezultă din reflexiile de pe suprafețele ienilor. De asemenea, presupunem că indicele de refracție este același pe ambele părți ale lentilei.

Efectul optic al lentilelor, care este cel mai important, este oferit de schimbarea de fază dependentă de poziție cauzată de grosimea variabilă a lentilei. Funcțiile de transmisie de acest tip au fost prezentate inițial în Capitolul 6. Funcția de transmisie a obiectivului ia forma Eq. (6,10)

ɪb(r) = K(r)|exp

λ (nW~)

(7,77)

Faza este măsurată în raport cu carcasa pentru diafragma deschisă fără obiectiv. Factorul de amplitudine |τi,(r) |descrie dimensiunea lentilei și este egal cu unitatea unde lentila este transparentă și zero în altă parte.

Faza poate fi determinată prin reconsiderarea Fig. 4.31 și Ec. (4,53). Acolo am discutat despre aproximarea pătratică a variației grosimii lui a

(b)

Fig. 7.56 Diagrame în secțiune transversală ale ienselor circulare care modulează fasciculul incident prin introducerea unui defazaj dependent de poziție: (a) caz planoconvex; (b) caz biconvex. Prin modificări adecvate ale razelor se poate modela orice formă Iens cu suprafețe sferice.

suprafata de refractie sferica cu distanta fata de axa optica. Geometria esențială este reprodusă pentru un Iens planoconvex în Fig. 7.36α. Distanța ζ din figură este legată de r prin ecuația. (4,53)

Acest nivel de aproximare este în concordanță cu aproximarea parabolică utilizată în transformarea Fresnel. Grosimea Ienilor este atunci

F2

= (7,79)

Figura 7.36b prezintă cazul unei lentile biconvexe. Este ușor de demonstrat că grosimea din acest exemplu ar trebui să fie

~2 d(F | = ȸ - y

1 \

R2)

(7,80)

R

Aceste rezultate apoi Iead la

⅞(0 = | τ√r) | ei≠<⅛p

ιπ

V

-2

Unde

$r^2 = X^2 + y^2$

(7,81)

pentru funcția de transmisie a Ienilor generali cu lungime focală f Aici, ca și în capitolul 3, trebuie să ne supunem convenției semnului algebral și, așa cum se stabilește în Ec. (3.59), am folosit

1

R

1

(7,82)

Factorul ei<Wo) este o contribuție de fază irelevantă care este constantă și va fi renunțată de acum înainte.

2. Transformarea între planuri conjugate. Vom deriva acum transformarea care începe cu distribuția câmpului electric într-un plan pe partea incidentă a Iens și dă câmpul în planul care, prin optică paraxială, ar fi planul conjugat al obiectului. Acest lucru este tratat în optica fizică ca un proces de difracție în care planul de deschidere conține obiectivul. Situația este ilustrată în Fig. 7.37. În aproximarea parabolică, nucleul care descrie propagarea

Fig. 7.57 Desen în perspectivă care arată coordonatele în planul obiectului, planul lentilei și planul imaginii.

de la planul obiectului printr-o deschidere intermediară până la planul de imagine are forma Eq. (7,21)

h¿P

,•2

1 \

λ2) \ ssT

— ik(S + S')

Û(x, >ι)

× exp< — iκ

[(x - x)2 + (y- y)2]

[(x' - x)2 + (У - y)2]

2S

2S'

dx dy

(7,83)

Aici diafragma conține obiectivul, astfel încât funcția de transmisie va fi descrisă de Eq. (7,81).

Preferăm să exprimăm acest lucru într-o formă care este compatibilă cu Eq. (7,20α). Adunăm argumentele exponențialei și le reexprimăm după următoarele:

,~λ2-i

-⅛(S + S9-itΓi*-χ>2 + σ~•rt

2S

• *2 • -*2

ч lπr lπr

= -ιk(R0 + λo) - ɪ - - ι2π

|2 , (У-*) +(У - y):

2S,

X x' \ X

S +S' λ

(y,K \ y \ S S' J λ

(7,84)

Figura 7.38 arată cum sunt definite distanțele. Acest lucru este în concordanță cu Fig. 7.5, doar aici ne concentrăm pe izolarea termenilor care sunt proporționali cu f2 din lungimea traseului datorită propagării atât pe părțile incidente, cât și pe cele de transmisie ale lentilei.

Acest rezultat poate fi simplificat dacă definim frecvențele spațiale în analogie cu capitolul 6.

(7.85a)

(7.85b)

Fis. 7-5®

și

У ~β

vs⅛s~τ <7•85c>.

— y' — β' \

<7•85d> | unde a, β, a! și β' sunt cosinusurile direcției care identifică locațiile lui P și P' în raport cu Õ, centrul planului de deschidere. [A se vedea Fig. 6.126 și Ecs. (6.14)]. Apoi

Δu = u' — u =

/ X x' \ 1

I4S + S') ~λ

este echivalent cu u, pe care l-am folosit în Eq. (6.21a) și

Δυ — υ' — V =

Λ, y V

I4S S') λ

este echivalent cu v, care a fost folosit în Eq. (6.21b). Aici este util să aveți notații explicite pentru coordonatele reciproce în obiect și în planurile imaginii, mai degrabă decât să le combinați în parametrii unici u și v.

Cu Ec. (7.85) putem consolida Ec. (7,84),

— i/c(S + S') — ik

Γ(xx)2 + (yy)2

(x' - x) + (ÿ - ÿ)2

2S'

2S

— -ik(R0 + R'o) — y r2(- ÷ ~) — z2π(Δux + Δry) Λ \ lɔ ɔ /

S'

(7,86)

1

Primul și ultimul termen din Ec. (7.86) sunt foarte asemănătoare cu cele pe care le-am folosit în forma Iinearizată a fazei din Capitolul 6. Noua caracteristică aici este contribuția pătratică a celui de-al doilea termen. În cazul general, această contribuție face integrala în Ec. (7.83) greu de calculat în formă închisă. Cu toate acestea, când este inclusă și funcția de transmisie a Iensului, se ajunge la o simplificare remarcabilă. Din Eq. (7.81) constatăm că defazajul datorat Ienilor apare ca un factor exponențial al cărui argument este

zπ 1

T

Argumentele tuturor exponenţialelor din Ec. (7.83) sunt atunci

zπ , /1   11 \

-ik(R0 + R'q) - — r2I - + — - - 1 - z2π(Δux + Δυy)

(7,87)

Dacă planul sursă și planul de observare sunt conjugate unul cu celălalt, atunci formula lentilei subțiri din capitolul 3 permite ca cel de-al doilea factor să dispară. Cu alte cuvinte, dacă planul de observație este planul imaginii, atunci schimbarea de fază cauzată de Iens caneé este contribuția pătratică la diferența de lungime a căii optice.

(R + R') - (R0 + R0). Acest formalism este compatibil cu aproximarea care a dat de teoria paraxiala in geometrica! optica.

Prin urmare, dacă P și P' sunt imagini unul de celălalt, nucleul de propagare al Eq. (7.83) devine

hτ(P → P')—

JJ |τ£(Γ)|β“í2π(Δ“í + Δυí) dx dÿ

(7,88)

Recunoaștem integrala ca transformată Fourier a amplitudinii funcției de transmisie Iens. Aceasta este partea care descrie amploarea deschiderii Iens.

Prin urmare,

hτ(P→P') =

e-щко + K0)T£(Ди, Δv)

(7,89)

Unde

7L = ^[| τJ]

Pentru a găsi câmpul rezultat în planul imaginii, aplicăm nucleul de propagare în Ec. (7.89) la integrala de transformare a câmpului global a Eq. (7.9) a obține

;2

E'(P') =

______ \ i,-ikRo

A2SS' Γ

∫ E(x, y)τ(x, y)e lkR°TL(Au, Av) dx dy

(7,90)

Aici trebuie să ne amintim că, în cazul general R0, Au și Av sunt funcții ale coordonatelor planului sursă (x, y) și astfel trebuie considerate ca funcții implicite ale variabilelor de integrare din Ec. (7,90).

Aceasta este rezultatul general pentru influența unui Ien de dimensiune finită asupra transformării distribuției câmpului electric al obiectului în cea a imaginii. O perspectivă suplimentară asupra acestui rezultat este obținută prin modificarea variabilelor de integrare folosind ecuațiile. (7.85a și b). Prin urmare,

dx dy — S2A2 du dv

și

E(x, y)τ(x, y)e lkR° ≡ Дx, y) = ^(SЛи, SAυ) (7,91)

Aici $ este o funcție sursă defazată care combină părțile dependente de sursă ale integrării. Acum

/ S\

£'(x', y') = i2l —

\ S /

∫ S,(Sλu, Sλv)Tb(u'

— u, ν' — v) du dv

e~ikR'0

— {S(Sλu, SXv)@TL(u, r)}

(7,92)

unde m = —S'/S este mărirea transversală.

Aceasta arată că distribuția câmpului observată în planul imaginii este Convoluția funcției sursei defazate și transformata Fourier a

transmisie Funcție care descrie întinderea obiectivului. Aceasta este o consecință a difracției care are loc la deschiderea Iens. Acțiunea de focalizare a Iens face ca ceea ce ar fi un model de câmp îndepărtat să fie dezvoltat dozator la lentilă, în planul imaginii. Factorul de mărire este necesar pentru a conserva energia din planul obiectului în planul imaginii.

⅛' >

3. Sursa punctuală. Să presupunem că avem o sursă punctiformă P = P0(x0, y0)- Aceasta poate fi reprezentată de distribuția sursă a ecuației. (7,76). Deoarece, în acest caz, contribuția sursei la integrala de convoluție din Ec. (7.92) implică funcții delta, putem simplifica ecuația. (7,91)

<%(Sλu, Sλv) —

e lkR°ô(SXu — x0)δ(Sλv — y0)

(7.93a)

unde, pentru că sursa este un punct pe care îl avem

K0 - PqO

(7.93b)

Înainte de a putea folosi Eq. (7.93), trebuie să exprimăm argumentul funcțiilor delta în termenii variabilelor de integrare din Ec. (7,92). Prin urmare, folosim relația de scalare a ecuației. (6.62) a ajunge la

S°(Sλu, Sλv) =

(SUNT)

Aceasta este folosită în Ec. (7.92) pentru a obține câmpul în planul imaginii.

E'(x',y') =

„Aλ”

1

mS2λ2

\ gi(ωt-k(R0 + Rb))

X

SλJ

Vi(ωt-k(R0 + Rb)) | ɪ \T i Γ \ mS2λ2 L

Tl(u' — u, ν' — v) du dv

(7,95)

1

Factorul de fază este același cu cel care a fost identificat în Eq. (6,23), elφo. De asemenea, argumentele lui Tl pot fi reexprimate într-una din mai multe forme:

-1 (x'\ -1 , , ∧

—— X0 — — = —7 (x — mx0) ΛS \ 0 m) λS, .   0

(7.96a)

(7.96b)

În plus, poate fi convenabil să profitați de relația:

S'2

mS2 = — - -SS'

m

(7,97)

Urmând aceste linii directoare găsim o formă alternativă pentru Eq. (7,95)

/Л2\ .. C m

F(</)= - HfiA

zF(x ^ tnx°∏, (Dacă- myo)

(7,98)

În loc de o imagine punctuală, difracția Iight de către diafragma Iens provoacă o imagine pătată. Centrul modelului de imagine este la x'0 = mx0 și y'0 = my0 așa cum era de așteptat. Aici Tl = Tl(Q, 0) = aL, aria deschiderii Iensk. Câmpul optic va fi maxim în această poziție și va fi dat de

E'(x'0, y'o) = ~ττ- ei≠0Ω'

\ iz /

(7,99)

unde Ω, ≈ σr/S'2 este unghiul solid subtins de Iens la imagine (vezi Fig. 7.39).

Departe de punctul paraxial al imaginii, distribuția câmpului este mai complicată. Cu toate acestea, deoarece aceasta este legată de modelul de difracție în câmp îndepărtat al deschiderii Iens, putem extrage rezultate din capitolul 6.

În cazul obișnuit al unui Ien circular centrat pe axa optică avem

l⅛Os)l = íθ

r≤f0ι

In caz contrar

(7.100)

unde r = [x2 + ÿ2]1/2. Aceasta are aceeași formă ca Eq. (6,42). Putem scrie imediat transformata lui Fourier

În acest caz

Ar' = [(χ' - x'0)2 + (y' - y^)2]lz2

(7.101)

(7.102)

Fig. 7.39 Singularitatea în geometria! Teoria de la focarul unei unde sferice convergente este eliminată în teoria undelor din cauza efectelor de difracție.

Fig. 7.40 Câmp electric optic în vecinătatea imaginii unui obiect punctual. Centrul modelului apare la (x', y') = (*o,⅛) = (mx0,my0).

Distanța Ar’ măsoară punctul de observație în raport cu poziția paraxială a imaginii. Distribuția câmpului este atunci

E'(x', y'} = E,(x'0, y'0)

(7.103)

unde am folosit Eq. (7.99) pentru a exprima rezultatul în termeni de câmp în punctul paraxial al imaginii. Acest comportament este schițat în Fig. 7.40.

Am folosit deja aceste informații în discuția despre rezoluția imaginii din Secțiunea 6.4D1. Fiecare punct din planul obiect va fi convertit într-un model de difracție în planul imaginii care este asociat cu o densitate de flux de

S'(x', y') = S'(x'0, y'0)

(7.104)

4. Infinite Aperture. Deși o deschidere infinită nu poate fi realizată în practică, este încă instructiv să investighezi imaginea produsă de obiectivul nelimitat. Aceasta va fi situația ideală în care toată lumina care vine în direcția înainte de la obiect este colectată și focalizată de către lentilă. Folosim notația E'00(P') pentru câmpul din punctul Pr din planul de observație în aceste condiții.

Mărimea funcției de transmisie a obiectivului va fi

l^(ŋ)l = 1 (7,105)

Din rezultatele capitolului 6, știm că transformata Fourier a unei constante este o funcție delta. În exemplul de față, acest lucru înseamnă

lɪ(u, ʋ) = <5(u)<5(F) (7.106)

Utilizarea acestei relații conduce la simplificarea directă a ecuației. (7.92) pentru distribuția câmpului imagc în limita Iens infinit.

e~ikR'0 Ci*

E'oa(x', y') =---- S,(Sλu, Sλv)δ(u - u,)δ(v - ν') du dv

m Jj

p-ikRo =-------tf(Sλu', Sλv') (7.107)

m

Argumentele funcției sursă sunt

Sλu' = -s*r = - (7.108a)

S m

și

Sλv,= -⅞ = - (7.108b)

S m

Împreună cu Eq. (7.91) acest Ieads la infinitul Iens rezultat.

Unde

și

E'a0(χ', ÿ) =

ik(Ro + fið) / y' y'

------------£(—,

mm

R'o = OP'

R0 = PO,

\ rr, m

(7.109a)

(7.109b)

(7.109c)

m

P =

mm

Acest rezultat arată că, cu o lentilă infinită, câmpul în planul imaginii la P' = (x', y') este proporțional cu câmpul în punctul conjugat din planul obiect la P — (x, y). Există, de asemenea, o schimbare de fază de — (2π/z)(K0 + R,o), pentru a ține seama de distanța parcursă de lumină și un factor de 1/m, pentru a garanta că fluxul total în planul imaginii este egal că la planul obiectului.

În cazul infinitului Iens formarea imaginii este ideală, deci există o relație unu-la-unu între punctele din planul obiectului și planul imaginii.

xz=mx (7.110a)

și

ÿ — тy (7.110b)

Cu un Ien finit trebuie să fim mai atenți. Coordonatele (x, y) și (x,, y') toate

appear (prin и, v și u', ι/) în integrând Eq. (7,92). Cu toate acestea, nu putem folosi ecuațiile. (7.110) pentru a elimina una dintre perechile de Coordonate din integrând. Câmpul Th» într-un punct dat din planul imaginii va depinde, în general, de o regiune în jurul a ceea ce (în teoria paraxială) ar fi punctul conjugat pe planul obiectului.

Factorul de fază din Ec. (7.109a) poate fi rescris într-o altă formă pe care o vom găsi utilă mai târziu. Aceasta exploatează egalitatea aproximativă

/2

R0 + Ki,≈S + S' + ^7 (7.111a) '

sau

Γ2

R0 + R'0≈S + S' + -   (7.111b)

unde X' = S' –f și X = 5 –f sunt distanțele newtoniene ale imaginii și, respectiv, obiectelor. Cu aceste substituiri infinitul Iens resuit devine

E'o0(x', y')

E'a0(x', y)

exp[-ιk(S + S)] / , r2 \ ix y\ (xy

---------------exp – ik -–- E –, – T –, – m--------------y 2X J \m mJ \ mm

(7.112a)

sau

exp[-ιk(5 + S)] / r \ τ,(xy\ ix

--------exp – ik -– E –, – τ m-------y 2XJ \m mj \m

(7.112b)

Pentru a înțelege mai bine ecuațiile. (7.111) luați în considerare Fig. 7.41, care ilustrează acțiunea unor raze importante în situația imaginii infinite cu lentile subțiri. Deoarece P și P' sunt puncte conjugate, trebuie să avem egalitatea căilor optice PPP' și PÕP'. În plus, deoarece razele paralele vor ajunge la un focus la F', trebuie să avem și egalitatea căilor optice PPF' și 00F,. Dacă nd este calea optică prin centrul Iens (de grosime d), atunci

OPL(PÔP') = R0 + R,0 + nd

și

OPL(000,) = S + S, + nd

Fig. 7.41

Scriind aceste două ecuații în termeni de nd și echivalare, înseamnă

R0 + R'o - OPL(POPz) = S + S - OPL(OOOz)   (7,113)

Acest lucru poate fi redus și mai mult prin scriere

OPL(POF) = OPL(PPFz) + F7P1

și

OPL(OOOz) = OPL(OOF) + X'

Când este înlocuită în Ec. (7.113) acestea produc

R0 + Rz0 - OPL(PPF) - FF = S + Sz - OPL(OOFz) - X

Dar pentru că OPL(PPFz) = OPL(OÔF), avem

R0 + Rz0 -S + Sz + F7F -X' (7.114)

În aproximarea parabolică, FzPz poate fi aproximat ca
----------------------------------   rz2 FP'≈X' +5f

Când aceasta este folosită în Ec. (7.114) ajungem la rezultatul final al Eq. (7.111a). Un argument similar justifică Ec. (7.111b).

5. Aberații. Am discutat despre efectele difracției în limita parabolică, care este echivalentă cu aproximarea paraxială a opticii geometrice. Aceasta a justificat aproximarea Eq. (7.78) pentru modificarea grosimii unei suprafețe de refracție sferică cu coordona radială f măsurată de pe axa optică. Capitolul 4 s-a ocupat de abaterile de la aproximarea paraxiala în teoria geometrică. Am comparat frontul de undă adevărat Convergând pe o imagine punctuală cu o suprafață de referință sferică centrată pe punctul paraxial al imaginii (Fig. 7.42). Am introdus funcția de aberație W ca diferența de lungime a căii optice între aceste două suprafețe la un punct dat P — (x, y) în pupila de ieșire. În general, W depinde și de locația imaginii F — (x’, y’).

Discuțiile noastre despre teoria difracției a formării imaginilor s-au bazat pe presupunerea că W= O; adică adevăratul front de undă este sferic. Dacă Wis mic în comparație cu r, ne putem imagina sfera perfectă convertită în suprafața undei adevărate prin deplasarea fazei undelor sferice la P cu cantitatea (2π/λ)/W. Acest lucru poate fi realizat în cazul în care Iens este oprirea diafragmei utilizând factorul exp[- i(2π/λ)Wj j∏ pentru funcția de transmisie Iens. Obținem apoi forma corectată a ecuației. (7,81)

~   Í iti \(— i2ττ

tl(P, F) = | τz,(r) | expi — f2 \ expi —— W(P, F)

Factorul exponențial care este pătratic în r se va anula cu exponențialul pătratic în forma parabolică a nucleului de propagare Fresnel. Coreea-

Fig. 7.42 Funcția de aberație reprezintă diferența de lungime a căii optice dintre o suprafață de referință sferică și o suprafață de undă adevărată. Aceasta poate fi inclusă în Iens

> Funcția de transmisie z ca o corelație cu expresia, în esență paraxială, pentru schimbarea de fază introdusă de lentilă.

aberațiile frontale rezultate vor rămâne. Prin urmare, atunci când se formează transformata Fourier a funcției de transmisie Iens [așa cum se cere în Ec. (7.89)] trebuie să folosim

Tl = & | τb(P) | exp |

-^W^P,P,)

(7.115)

în loc de

Tl = ^[| tl(P) |]

Această formă corectată, atunci când este înlocuită în ecuațiile ulterioare după Ec. (7.89) va permite influența aberațiilor primare asupra imaginii.

Această abordare a analizei aberațiilor este convenabilă deoarece aberațiile monocromatice primare sunt clasificate în funcție de Componentele lui W. Alternativ, acolo unde sunt folosite calculatoare de mare viteză, calea optică reală R + R' în faza nucleului de propagare [Eq. (7.10)], iar. Funcția de grosime Iens adevărată [(Ec. 7.81)] pentru faza efectului Iens din acel nucleu, poate fi utilizată Integrarea numerică a Ec. (7.10) apoi conduce la o variantă mai corectă, dar mai obscure din punct de vedere conceptual.

B. Optica Fourier

Acum că am pus bazele teoriei formării imaginii printr-o analiză a difracției de către lentilă, suntem în măsură să studiem aceste fenomene atunci când este prezentă o funcție generală a obiectului. Pentru a simplifica analiza, limităm discuția la carcasa lentilelor infinite. Acesta nu este un compromis serios, deoarece știm deja care va fi efectul unei lentile finite. În loc de relația unu-la-unu dintre punctele obiect și punctele imaginii, așa cum este exprimată în Ec. (7.109), lentila finită contribuie cu o incertitudine fundamentală la punctul de imagine, așa cum este exprimată de Convoluția din Ec. (7,92).

Fig. 7.45 Obiectul difracţionează lumina în direcţii diferite. Fiecare direcție este asociată cu un punct pe planul focal. Unghiurile mai mari sunt asociate cu caracteristici din obiect care reprezintă detalii fine. Lumina care nu poate trece prin Iens din cauza dimensiunii sale finite nu poate ajunge la imagine. Aceasta va filtra imaginea și va avea ca rezultat o lipsă de detalii.

Luați în considerare situația ilustrată în Fig. 7.43 unde revenim la obiectul care transmite parțial arbitrar așa cum a fost introdus în Fig. 7.32. Lăsați sursa să fie la infinit și centrată pe axa optică, astfel încât să creeze o undă plană în planul obiectului. Din Eq. (7.75) aceasta identifică formularul pentru câmpul incident.

E(x, ÿ) = A e'ωt (7.116)

Fără nici un obiect prezent, fasciculul de lumină paralel incident va fi focalizat la F. Cu un obiect care transmite parțial în loc, fasciculul difractat rezultat poate fi descris ca o suprapunere a mai multor fascicule paralele (unde plane) care se propagă în diferite direcții. Fiecare fascicul va fi focalizat pe un punct din planul focal. Locația spotului depinde de unghiul componentei de undă plană particulară la obiect. (Dacă Iens este finit, atunci aceste pete sunt lărgite în discuri Airy.)

Fiecare punct poate fi considerat a fi sursa undelelor lui Huygens care se abate de la puncte și interferează unele cu altele, formând în cele din urmă o imagine a obiectului original în planul imaginii.

1. Descompunerea Fourier a obiectului. Funcția de transmisie a obiectului τ(x, y) poate fi considerată a fi funcția de deschidere pentru un proces de difracție în câmp îndepărtat în planul obiectului. În consecință, formăm transformata Fourier

T(u, v) —

τ(x,y)e l2πiux + vy'dx dy

(7.117)

Aceasta este proporțională cu distribuția câmpului luminii difractate în direcția specificată de

a — — λu, β = —λν

Funcția obiect poate fi apoi scrisă în termenii unei suprapuneri a acestor componente de unde plane difractate prin transformarea inversă

τ(x, y) = T(u, V)e,2n(ux + vy) du dv (7.118)

Aici fiecare componentă are o mărime de

T(u, v) du dv

şi o fază în planul obiect al

βi2π(ux + vy) _ e~ik(ax + βy)

A. Frecvențele spațiale. Pentru a obține o mai bună înțelegere a semnificației

Ec. (7.118), considerați ca obiect o funcție cosinus infinit periodică (Fig. 7.44).

$$\tau(x, y) = \tau_0 + \tau_1 \cos(2\pi u_0 x) \qquad (7.119)$$

unde a este perioada spațială și $U_0 = l/a$ este frecvența spațială a cosinusului. Transformata Fourier a obiectului ipotetic este

$$T(u, v) = J\ \tau_0 <5(u) + y\ [<5(u - u_0) + \delta(v - \upsilon_0)] ><5(v) \quad (7.120 \quad)$$

Aceasta arată că funcția obiect ar fi putut fi scrisă după Ec. (7.118) ca

$$\tau(x, y) = \tau_\theta + \tau \div (e^{i2\pi u_o x} + e^{\sim i2\pi u^\circ x}) \quad (7.121)$$

* kt(x)

WWWW-l·

--------------------->■>

Fig. 7.44 Obiectul „cosinus” modulează câmpul cu o frecvență spațială bine definită.

Tabi· 7.2. Descompunerea Fourier a

un obiect cosinus

Direcția fazei de forță

ɪo	$1\alpha = 0$	
		$\beta = 0$
Ţi	$g^{-i2\pi u_o x}\lambda$	$a = \lambda u n$ - -
2		a
		$\beta = Q$
Ti		$-\lambda$
2	$g - i2\pi u_o x$	$a = - \lambda u_0 = - a$
		$\beta = 0$

În acest exemplu există doar trei componente de undă plană în câmpul difractat de obiect. Acestea sunt detaliate în Tabelul 7.2. Rețineți că există o relație directă între cosinusul direcției undei difractate și frecvența spațială a părții periodice a funcției obiectului. Acest lucru este clarificat în Fig. 7.45.

b. Descompunerea imaginii. Ecuația (7.112a) ne spune care va fi distribuția câmpului imagine în limita infinitului Iens. Dacă înlocuim forma obiectului descompus Fourier în această ecuație, ajungem la imaginea descompusă Fourier.

$E_{fa0}(x', y') =$

'A

m

(τ'2

exp{i[ωt – k(S + S')]} expl – ik ——

\ ¿A

JJ T(μ, υ)ei2π[u(χ-/m) + υ(//m)] Ju Jy

(7.122)

Din cauza factorului de fază care depinde de r'2 această descompunere nu mai reprezintă o suprapunere a undelor plane. Suprafețele de fază constantă, care erau plane la obiect, poartă curbură în vecinătatea planului imaginii.

2. Distribuția câmpului în planul focal. O undă plană la obiect va fi focalizată în planul focal al lentilei. Poziția punctului în planul focal depinde de direcția de propagare a undei plane inițiale. În Fig. 7.46 este prezentată o singură undă plană care dă un punct la Fu. Raza POF trece nedeviat prin centrul Iens, identificând astfel triunghiuri similare POÕ și FaF0. Asta arată că

xf _ (-)x

f S

Din Eq. (7.85a) vedem că relația directă între xf, direcția cosinus

Fig. 7.45 Frecvența spațială determină unghiul la care este difractată lumina obiectului.

Fig. 7.44 Lumina difractată de o singură frecvență Părăsește obiectul într-un singur unghi care duce la un focar în planul focal într-un singur punct.

a undei plane a, iar frecvența spațială и este

Xf = – x~ = xf = – uλf (7.123a)

■ ɔ

O relație similară poate fi derivată pentru y f.

y1 = y^ = βf= -v>.f >(7.123b)

Obiectul conduce la o colecție de unde plane difractate, așa cum am văzut în secțiunea anterioară. Acum recunoaștem că fiecare dintre aceste unde plane componente va fi focalizată pe un loc unic din planul focal al lentilei. Astfel, distribuția câmpului în planul focal trebuie să fie legată de distribuția intensității câmpului între diferitele unde plane. Deoarece descompunerea obiectului în unde plane este echivalentă cu descompunerea Fourier a funcției obiect, distribuția

câmpului în planul focal trebuie să fie legată de transformata Fourier a obiectului. Frecvențele spațiale mai mari vor fi reprezentate de intensitatea în planul focal care este mai departe de axa optică. Acesta este un concept extrem de puternic. Să demonstrăm în continuare matematic.

Pentru a genera o expresie pentru distribuția câmpului în planul focal, începeți cu distribuția cunoscută în planul imaginii. Acum aplicați transformarea Fresnel înapoi așa cum sugerează ecuațiile. (7.6) și (7.20b) pentru a ajunge la planul focal.

Ef(xf, yf) =   E'(x', yr)h(P, → Pf) dx' dy'

h(P,

Pf) = (∑f) eχP<i7cjv') exp(2F ~ ɪɔ2 + (yf ~ ʃɔ2! /   v,4 iikrf \
/'ikr'2 \

= ЫeXp(1/c%)eXp 2F exp 2F

(x'xf + y'yr

× exp -ι2π(—i------- -

L \ λX'

(J.V2A)

(7.125)

și

rf = xf + y/

Înainte de a continua cu această operație, este util să modificați unii dintre factorii din Ec. (7.125) prin schimbarea lui X'. Pentru a face acest lucru, recalibrați ecuația lentilelor subțiri

1

S + S'~ f

care poate fi rescris într-o altă formă

ɪ . S' -f S fS'

Asta arată că

sau, folosind mărirea transversală,

X' = -mf   (7,126)

Introducem acest lucru în primul factor de fază din Eq. (7.125) a obține

Zχ,χ/• + y'yΛI Γ ∧ Γχ'Z-χA v'Z-vΛT exp -12π —ʃ ʃʃ = exp -i2π - —/ ÷y- - ɪʃ (7.127) y λX y Jy λf J τy JJ

Din Eq. (7.123) vedem că termenii din argumentul exponențialului implică frecvențele spațiale. Prin urmare, Ec. (7.127) devine

exp

Zx Xf + yyf \ / Xy\

— ι2π | —ʒ—-—-) — exp — ι2π | и —hv —) y λX J \ m m J

(7.128)

Folosim această formă în nucleul propagator înapoi al ecuației. (7.125) și, de asemenea, modificați factorul de amplitudine cu Eq. (7.126) a obține

'ikr2f \ Z ikr'2

zi v,4 Zikrf \ Sikr,2 \ Γ Z x' y'\ exp(ιkX) exp exp —— exp — ι2π и —Fp-

\ 22C / \ 22C / \ salut Salut /

2X'/ 4 2X'

(7.129)

Pentru câmpul de imagine cunoscut vom folosi rezultatul infinit Iens din ecuațiile. (7.112a) și (7.116). Aceasta introduce variabilele de imagine scalate x'/m și y,/m. Pentru a efectua integrarea necesară în Ec. (7.124), efectuați modificări ale variabilei x" — x'/m și y" = ÿ/m pentru variabilele de integrare fictive. În situația Ienului infinit, aceasta este echivalentă cu realizarea integrării în planul obiectului.

Miezul din Ec. (7.124) este ceea ce am determinat pentru propagatorul înapoi de la planul imaginii la planul focal, Ec. (7.129). Când toți aceștia sunt combinați, constatăm că termenii de distanță din exponențiale pot fi simplificați, S + S' — X' = S — f Vedem, de asemenea, că exponențialul care este pătratic în r' este anulat.

Aceste modificări duc la rezultatul câmpului în planul focal în infinitul Iens Iimit:

ʃʃ T(X", y")e-i2π(ux" + υ/') dχ"dy"

/ jjζf*2, \

exp[i(ωt - k(S +/))] eχp(ÎT(u, v)

(7.130)

W

Unde

$u=-xf/\lambda f$ și $\upsilon=-yf/\lambda f$ (7.131)

Aceasta dovedește că distribuția câmpului în planul focal este proporțională cu transformata Fourier a funcției de transmisie a obiectului.

Distribuția densității fluxului în planul focal va fi proporțională cu pătratul absolut al câmpului. Acesta nu mai conține niciunul dintre factorii exponențiali. Numai în acești factori sunt conținute informații despre locația obiectului. Prin urmare, modelul densității fluxului în planul focal este independent de poziția obiectului. Acest lucru poate fi verificat cu ușurință în Iaborator.

Rețineți că există o simplificare suplimentară atunci când obiectul se află la primul plan focal al lentilei. Atunci S =f S' și X, = 00, iar factorii de fază se reduc la

e-⅛2/

Avem apoi o expresie simplă pentru distribuția câmpului în plan focal.

(îA \ ,

\ ei(ωt-2k/)r^ vy

(7.132)

3. Obiect cu grătar de transmisie pătrat. În acest moment am putea specifica distribuția câmpului în planul focal pentru un obiect arbitrar. Este, totuși, deosebit de lămuritor să studiem un grătar cu profil „pătrat”, așa cum se arată în Fig. 7.47. Dacă rețeaua este infinită în măsura în direcția x (nerealist din punct de vedere fizic, dar util ca exemplu), atunci funcția de transmisie poate fi scrisă, conform ecuației. (6.122), ca o serie Fourier.

ɪ(*> У)= ∑ Tn exp

Coeficienții Fourier Tn sunt legați de transformata Fourier a funcției locale care descrie un ciclu al rețelei

(7.134)

— o a

2 2

Fig. 7.47 Un obiect care constă din benzi alternative de regiuni transparente și opace este reprezentat de o funcție de transmisie care este o undă pătrată.

Funcția de transmisie locală restricționează integrala din Eq. (7.134), îndreptând spre rezultat

sau

Tn = ^ sincizi (7.135)

Când aceasta este evaluată pentru ail n găsim

zi = O, T0 = $\frac{1}{8}$

n = par, Tn = 0

(_ | y | n | -l)/2

n = impar, Tn = k—!—-----------

π | zι |

sau

Tn = +ɪ,-ɪ, +ɪ..., forzi = +1, ±3, ±5,... (7.136)

π 3π 5π

Putem folosi aceste informații și Ec. (6.120) să scrieți transformata Fourier a obiectului rețelei pătrate în funcție de frecvențele spațiale и și v.

T(u, v) = Tj(u)<5(v) ∑ δ(ua — n)

n — — 00

00 /n\

= X Tnδ(u--]δ(v) (7,137)

n=-oo \aj

Deoarece distribuția câmpului în planul focal va fi proporțională cu transformata Fourier, Ec. (7.137) arată că planul focal va conține o serie de puncte de-a lungul axei xf. Acestea vor fi localizate la xf = -ufλ pentru valorile permise ale lui è sau

xf = 0, ±λ-, ±3λ-, ±5λ-••• (7,138)

aaa

Fiecare dintre acestea reprezintă o componentă Fourier a obiectului.

Funcția de transmitere a obiectelor poate fi rescrisă folosind ecuațiile. (7.136) în Ec. (7.133)

τ(x, y) =-----1-[g'2π<x/α) -|. g->2π(≈M)j

2 π

J-gi6π(x/a) ig - i6π(x/a)J _j_ . . .

ɪ

3π

1   2/xλ2(x\

= - + - cos 2π - — — cos 6π - + · · ·

2   π\a J3π   \ a/

(7.139)

4. Filtrare spațială. Distribuția imagine-câmp este specificată, în Eq. (7.122), în termeni de transformată Fourier inversă a transformării Fourier a funcției obiect. Acum vedem că obiectul descompus Fourier este fizic distinct în planul focal al lentilei. Distribuția câmpului în planul focal este direct proporțională cu aceeași transformată Fourier care intră în Eq. (7.122). Dacă introducem un „filtru” sub forma unei bariere subțiri, parțial de transmisie în planul focal, putem modifica transformata Fourier a obiectului. Transformarea modificată trebuie apoi introdusă în Eq. (7.122). În acest fel imaginea finală poate fi modificată. În termeni matematici,

T(u, v) →τf(μ, v)T(u, v)

asa de

E'co(x', У)

exp[/(ωt — k(S + S'))j exp|

∫ τf(u, v) T(u, v)ei2πwx'^+r(y'/m)] du dv

(7.140)

Filtrul poate bloca pur și simplu o parte a planului focal, eliminând astfel unele dintre Componentele Fourier din imaginea reconstruită.

Pentru a vedea cum funcționează, luați în considerare grătarul de transmisie pătrat din secțiunea anterioară. Dacă proiectăm un filtru care este opac dincolo de $x_f = \pm\lambda f/a$, atunci sunt trecute numai frecvența zero și cele mai joase Componente de frecvență diferită de zero ale spectrului Fourier (vezi Fig. 7.48). Din Eq. 7.139 vedem că această operație ne lasă cu un termen mediu și un termen cosinus care au aceeași periodicitate ca și funcția originală. În loc de grătarul de transmisie pătrat din imagine, rămânem cu un cosinus.

A   / — ik

E,o0(x,, У) = - exp{i[ωt - k(S + S')]} exp — r'2

m \ 2X

ri 2K

- + - cos 2π

1 2 τt\

ma

(7.141)

După cum se arată în Fig. 7.49, densitatea fluxului va aproxima aproximativ funcția de transmisie pătrată. Motivul pentru care imaginea este atât de slabă este că componentele Fourier mai înalte, care sunt necesare pentru a reproduce cu acuratețe detaliile, au fost eliminate.

În general, pe măsură ce regiunea planului focal permisă să transmită lumină către imagine este crescută, imaginea va reproduce cu mai multă acuratețe originalul.

obiect

Fig. 7.4β Un filtru spațial în planul focal blochează unele dintre componentele Fourier superioare. Acestea sunt apoi eliminate din integrai din Eq. (7.140) pentru câmpul din planul imaginii.

A

(A)

2 2

(b)

Fig. 7.49 Reprezentarea imaginii obiectului rețelei pătrate atunci când numai cele trei componente Fourier centrale au voie să atingă planul imaginii. Densitatea fluxului aproximează obiectul. Are frecvența corespunzătoare și forma generală; cu toate acestea, detaliile (în special colțurile abrupte) lipsesc.

obiect. Într-un sistem optic real trebuie să existe o limitare a cât de departe putem depăși axa. Henee, dincolo de o anumită ordine, punctele superioare de difracție vor fi întotdeauna blocate.

O altă ilustrare interesantă a filtrării spațiale este prezentată în Fig. 7.50, unde punctul central și următoarele două puncte de pe ambele părți sunt îndepărtate. Acest lucru se realizează cu o obstrucție care este opaca până la și inclusiv xf = ± λ f ¡a. În planul imaginii câmpului îi lipsesc componentele Fourier de ordinul cel mai mic. Cele care lipsesc sunt aceleași cu componentele prezente în exemplul

anterior. Ajungem cu un model pătrat minus cosinusul offset. Rezultatele pentru intensitatea câmpului și pentru densitatea fluxului sunt prezentate în Fig. 7.51. Rețineți că modelul este cel mai puternic la valorile lui xf asociate cu schimbări bruște în obiectul original. Acest lucru se datorează componentelor Fourier superioare cărora li se permite

eu

eu

eu

eu

eu

eu

eu

eu

eu

eu

Obiect de grătar

Filtru

Imagine

Fig. 7.50 Un filtru spațial care blochează cele trei componente Fourier centrale în planul focal.

Fig. 7.51 Imaginea filtrată a obiectului rețelei pătrate când lipsesc cele mai mici componente Fourier. Densitatea fluxului este acum cea mai mare în părțile imaginii în care apar modificări bruște (pe colțurile profilului rețelei pătrate). Periodicitatea este de două ori mai mare decât a obiectului original, deoarece grătarul se schimbă de două ori pe ciclu. Lipsește fundalul Ievel.

trece prin filtru. Componentele de ordin scăzut contribuie la fundalul și forma generală a grătarului pătrat. Acestea lipsesc în rezultatul filtrat din Fig. 7.51.

C. Aplicații ale formării imaginii

Teoria difracției a formării imaginii este fundamentul multor aplicații moderne ale opticii. În această secțiune examinăm câteva dintre cele mai importante exemple. În toate acestea, presupunem încă că sursa oferă o lumină care este perfect coerentă. Caracteristicile opticii cu

fascicul laser sunt suficient de unice pentru a ne ocupa mai întâi de acest subiect.

1. Optica fasciculului gaussian. Am discutat deja câteva dintre Caracteristicile laserelor în Capitolul 5, unde au fost descrise modurile longitudinale. Acolo am folosit imaginea cu raze, neglijând distribuția transversală a câmpului. Aici examinăm caracterul modurilor mai detaliat.

A. Moduri de cavitate. Obiectivul nostru este de a specifica condițiile în care câmpul electric optic există într-o undă staționară în cavitatea laserului. Ne putem imagina o anumită distribuție a Iieldjust electric în fața uneia dintre oglinzi și apoi prin transformarea Fresnel să calculăm câmpul chiar în fața celeilalte.

(fe)

Fig. 7.52 Cavitatea rezonantă confocală. (a) Configurația reală a oglinzilor de la capetele cavității. (b) Analog de lentile care este util în discuția despre călătoriile multiple între oglinzi. Funcția Ienses este de a modifica relația de fază pe întinderea transversală a fasciculului. Acesta este același lucru pe care îl fac oglinzile, cu efectul suplimentar de schimbare a direcției fasciculului.

oglindă. Acest proces de calcul poate fi apoi repetat până când apare un model de câmp definit, sau un mod, care se reproduce la o oglindă dată, cu excepția eventualelor pierderi mici de difracție și reflexie. Dacă putem excita câmpul optic într-un astfel de mod, acesta va persista în regiunea dintre oglinzi pentru un timp relativ lung, în timp ce oscilează la frecvența sa caracteristică. Aceste moduri optice sunt analoge cu modurile unei cavități cu microunde, iar oscilațiile pe care le suferă sunt analoge cu oscilațiile unui circuit rezonant LC.

Una dintre cele mai simple cavități laser de analizat este oferită de configurația confocală din Fig. 7.52. Două oglinzi sferice, fiecare cu raza de curbură Rm, sunt situate la o distanță Rm unul de celălalt. Condiția noastră generală pentru apariția unui mod al cavității este ca distribuția câmpului la M să se reproducă, cu un factor de +1, după reflectarea pe M'. Situația este echivalentă cu seria de Iense prezentată în Fig. 7.52h. Aici, în loc să inverseze direcția la atingerea M’, un front de undă ipotetic este modificat de Iens și continuă până la M2, care este analogul Iens al oglinzii de pornire din Fig. 7.52a.

Aplicăm transformarea Fresnel pentru a identifica forma câmpului la Pz, având în vedere câmpul Starting la P.

Fz(Pz)-IE(P)h(P→Pz)dxdy

(7.142)

unde din Ec. (7.20b)

I •b. ((7

h(P →Pz) = — e lkz expí — r2 \ expí — r

(7.143)

iar unde $r^2 = x^2 + y^2$, P_z — (x_z, y_z)• Astfel

$E_z(P_z)$ =

/_i L· \

E(x,y)exp(-r2yi2π^x+v

'y) dx dy

(7.144)

Unde

¾≡√5 și ¾≡ ~ (7,145)

λz λz

sunt variabile Fourier.

Integrala din Ec. (7.144) este

/ — ik 7

E(x, y) exp —— r2

\ 2z

transformata Fourier a câmpului de pornire defazat.

Trebuie să examinăm câmpul de la capătul cavității unde $z = R_m$. În plus, trebuie să aplicăm factorul de modificare a câmpului care apare la M' când frontul de undă este reflectat de oglinda sferică. În analogul nostru Iens putem modela acest efect utilizând Eq. (7.81), funcția de transmisie Iens. Ignorăm întinderea finită a lentilei. Prin urmare, influența oglinzii este descrisă de faeton

X / *π 7

τ(P) = exp — r \ λJm

/ ik l7

= exp — r

\ Rm

(7.146)

unde fm = Rm/2 [Eq. (3.35) pentru o oglindă]. Desigur, acest lucru duce la o modificare a curburii frontului de undă care este în direcția „greșită”. Totuși, în imaginea extinsă (Fig. 7.50) a funcționării cavității laser, propagarea undei între M’ și M2 este Interpretată ca o undă reflectată.

Continuăm prin înlocuirea Rm cu z și P'(x', y') cu Pz(xz, yz) în Ec. (7.144) și înmulțirea cu Ec. (7.146). Când se face acest lucru, unul dintre factorii de fază în fața integrilor din Ec. (7.144) se combină cu funcția de transmisie oglindă. Acest lucru duce la un rezultat relativ simplu

E'(χ,,y,) =

adică lkit,

~λRm

ikrr2

i 1 z~ r,z 4 i —ik -exP |ɔ d)ʃ E(x, y) exp(— r2

2 Rm

(7.147)

Condiția pentru un val staționar este aceea

E'(x', y') = + E(x, y)

Cea mai simplă soluție la această cerință începe cu eliminarea factorului exp[(-ik/2Em)r2] în argumentul operației de transformare Fourier. Acest lucru se realizează cu condiția

/

E(x, y) = A(x, y) e'ω' exp — r2

\ y-κm

unde A(x, y) este o amplitudine care depinde de coordonatele transversale. Această formă este deja prezentă în Eq. (7.147) pentru câmpul transformat. Ceilalți factori din Ec. (7.147) stabilește condiția foliowing,

A(x', ÿ) = {± adică ikR·

(7,148;

Factorul din primele paranteze din Ec. (7.148) trebuie să fie unitate. Acest lucru necesită ca

j•gιkΛm = J- ɪ

sau

, π 2πR.

π

- = ηπ

2

(7.149)

ceea ce impune o limitare a frecvenţelor admise care pot rezona în interiorul cavităţii. Separarea dintre „modurile longitudinale” permise adiacente este [consecvent cu Eq. (5.147)]

Av = J- (7.150)

Caracterul transversal al modurilor permise provine din a doua paranteză din Ec. (7.148), care cere ca

ɪ ^r[A(x, y)] = A(x,, y')

(7.151)

Ec. (7.151) invocă o funcție de amplitudine pentru câmpul optic care va fi transformata Fourier în sine. Una dintre posibilități a fost deja întâlnită în capitolul 6, funcția Gaussiană. Acolo am găsit

[exp(-πh2r2)] — b 2 exp(-πp2b 2)

(7.152)

Aici parametrul b ar trebui să fie (λRm) 1/2. Atunci dacă

Λ(x, y) — A0e,ωt

(~πr2 \

expUJ

(7.153)

am avea

^[A(x,y)] = Aael"'

exp|

— πr,2 \

ÂR

(7-154)

după cum este necesar, unde

/2

p2 = u2 + v2 = ^2

Prin urmare, cu condiția condițiilor pentru modul longitudinal din Ec. (7.149) au fost îndeplinite, o soluție a problemei presupune

E(x, y) = A0

eiωt

i-πr2 \ (ikr2'

exp$\frac{1}{8}$)exp(Γ<

— A0

eiot

exp - ɪ)

(7.155)

și

E(x', y') = A0

eiot

(σr√2'

— Ttr

/ ifcr'2 eXP 2Я.

(7.156)

ca forme permise pentru câmpurile de la cele două oglinzi. Aceasta arată că variația transversală a câmpului va depinde de r ca o funcție gaussiană. Acest lucru arată, de asemenea, că fronturile de undă permise la oglinzi vor fi curbate. Suprafețele de fază constantă sunt sfere. Factorul exp(ikr2/2Rm) este aproximarea parabolica pentru variatia transversala a fazei unei unde sferice de raza Rm. Centrul de curbură al suprafeței de fază constantă la M va fi în centrul lui M’ și invers. Fronturile de undă se potrivesc cu suprafețele oglinzii la reflexie (Fig. 7.53).

Acum că înțelegem caracterul câmpului de la capetele cavității, putem folosi această informație ca intrare pentru a determina câmpul la o poziție arbitrară între oglinzi prin Ec. (7.144). Folosim a doua formă a ecuației. (7.155) ca câmp Starting. Apoi, la distanță de M,

Un caz special important este z = RmJ2 = fm, centrul cavității la F. Aici [1 — (z/Rm) — i(z/Rm)]^1 = (1 ÷ i). Apoi Eq. (7.157) devine

Efm(Pfm) = ao eiω' e ik(Rml2\\ + i) exp|

- kr2f

Rm

(7.158)

unde P/m = (x/m, ʃʃj și r2fm = x2m + y2fm în centrul cavității în planul focal al celor două oglinzi. Factorul de fază sferică a dispărut. Aici suprafețele de fază constantă sunt plane, deoarece acestea trebuie să fie prin simetrie.

Pentru o cavitate simetrică, fasciculul va fi cel mai mic în centrul cavității pentru acest mod. Aici conturul fasciculului se numește „talie”.

Să redefinim planul nostru de referință, unde z = O, să apară la talia fasciculului.

Fig. 7.53 Forma permisă pentru distribuția câmpului într-o cavitate simetrică are un comportament de amplitudine gaussian. Sunt posibile și alte moduri. Aici ilustrăm cel mai simplu.

Acolo, în general, distribuția câmpului merge la fel

£(x, y) = A0 eiωt exp|

— kr2

2z0

/ - r2

= A0 eιωt expl —z-

\ wo ,

(7.159)

unde 2z0 este lungimea taliei grinzii și

(7.160)

este raza taliei fasciculului. La r = W0 câmpul a scăzut cu un factor de 1/e de la valoarea sa maximă la r = 0. O distanță longitudinală z de la talie câmpul este dată de o transformare Fresnel.

E(x', y,; z) = A0 eiωtl-

\ λz

_..   / — ikr

si lkz expl —-— \ 2z

2Í l \ i 1 ■ Z

VA 3⁄4

(7.161)

W_0 =

V_0

π

Integrala este transformata Fourier a unei funcții gaussiene cu

u.

V.

λz

-y' λz

(7.162)

ca variabilele Fourier. Aceasta înseamnă

E(x', ÿ; z) = A_0 eiωt e~ikzl

7⁄8

(7⁄8 - iz)

exPl

-kr'2   _

sau ,   (7.163)

2 (z_0 - iz)l

Pentru a ajuta la interpretarea acestei ecuații, definiți următoarele cuantificări:

w(z) ≡ W_0 (z \ 1 + - \ z_0√ _   (7,164)
Z_0 K(z) ≡ z + - Z   (7,165)
φ(z) ≡ $\tan^{-1}$(— J   (7,166)

\ zoJ

Apoi Eq. (7.163) se poate scrie sub forma

E(x', y'; z) = A0 eiωt — expf — ʒ w \ w

/Ter 2

—-------IKZ + ιφ

IR ψ

(7.167)

Observăm mai întâi că valoarea absolută a câmpului este dată de W0 / —
-r'2 \

|E(x', ÿ; z) \ = A0 - exp -ɪ

W \ VV /

(7.168)

Prin urmare, mărimea câmpului este încă o funcție Gaussiană. Termenul iφ(z) se schimbă încet de la zero la talie la π/2 la infinit. Modificări mai rapide de fază sunt furnizate de termenul — i[kr'2/2K(z)]. Aceasta permite interpretarea lui R(z) ca raza de curbură a suprafeței de fază constantă la z. Se poate arăta că fronturile de undă se intersectează în unghi drept cu suprafețele în care raportul \ E(x', y'; z)/ £(0,0; z)| este constantă. Suprafața în care acea constantă este 1/e este de obicei luată ca definiția „dimensiunii” fasciculului gaussian, așa cum se arată schematic în Fig. 7.54. Această suprafață și alte suprafețe ca ea sunt hiperboloizi ai revoluției.

În limita lui z mare, avem

R → z și w → θz

Unde

(7.169)

W0 = λ $\frac{7}{8}$ (πw0)

Fig. 7.54 Detaliu al taliei la convergența limitată de difracție a unui fascicul gaussian.

este unghiul dintre asimptotă și hiperboloid unde se află raportul

|E(x', ÿ; z)/E(O, O; z)|

este 1/e. Acest unghi reprezintă jumătatea unghiului de divergență al fasciculului laser în limita câmpului îndepărtat. Acest limite corespunde limitei de difracție Fraunhofer, unde lățimea unghiulară a

fasciculului este proporțională cu lungimea de undă împărțită la lățimea fasciculului.

Descrierea anterioară a fost aplicată fasciculului Gaussian de ordinul cel mai jos, unde câmpul depinde numai de distanța față de axă. Grinzile gaussiene de ordin superior au suprafețe nodale ca funcții ale lui x și y, coordonatele transversale. Modurile de ordin superior ocupă mai mult spațiu lateral și au variații de semn în faza de la o porțiune a modelului transversal la următoarea. Din aceste motive, este obișnuit să se stabilească condiții în care doar modul de ordinul cel mai jos este permis să rezoneze. Acest lucru se poate realiza prin limitarea secțiunii transversale a fasciculului cu o deschidere. Ca exemplu, luați în considerare o cavitate confocală cu următorii parametri:

2z0 = Rm = 10 cm, λ — 632,8 nm

Ec. (7.160) identifică dimensiunea taliei ca fiind de 0,1 mm, o rază foarte mică pentru modul de cea mai mică ordine. O cavitate laser cu un astfel de design, având un diametru al tubului de descărcare de 1 mm, ar produce laser într-un mod mai mare decât modul Gaussian.

În cazul mai general al unui rezonator simmetric, în care oglinzile sferice identice cu raze Rm sunt plasate la o distanță Lm unul de celălalt, stabilitatea poate fi obținută în diferite condiții. Curbura frontului de undă la oglinzi trebuie să se potrivească cu curbura oglinzii. Prin urmare, din Ec. (7.165) cu Λ(z) = Rm la z = Lm/2, poate fi găsit parametrul Lungimea fasciculului-talie

⅞ = √(⅛ - Uβ⅛i, σ•170a)

Prin Ec. (7.160) raza fascicul-talie este

/Л\1/2

⅛= - [<«„ ⅛,)(⅛,)]>'4, (7.170b)

\ 71J

La capătul oglinzilor raza fasciculului este

Dacă una dintre oglinzi transmite parțial, atunci o parte din radiația cavității va scăpa formând ieșirea laserului. Acest lucru este prezentat în Fig. 7.55. De asemenea, în diagramă este prezentat un exemplu de cavitate „semi-simetrică”, pentru care parametrii din Ecs. (7.170) se aplică și.

Pentru un exemplu numeric, luați în considerare un laser cu ioni de argon cu o cavitate semisimetrică. Dacă Rm = 5 m, Lm = 2,3 m și λ = 514,5 nm, găsim

z0 = 2,1042 m, w0 = 0,5867 mm, w(⅛Lm) = 0,6686 mm, θ = 0,2788 mrad

W0 este raza fasciculului la oglinda fiat, W[⅛Lm) este raza la oglinda sferică.

2w0

Fig. 7.55 Cavitatea simetrică cu oglinzi de capăt confocale și designul semisimetric în care oglinda fiat este plasată la talia fasciculului. În ambele exemple, oglinda transmite parțial, astfel încât o parte din radiația coerentă este capabilă să iasă.

Divergența fasciculului, 20, se ridică la 0,56 mrad. Dacă oglinda sferică este capătul de ieșire, diametrul fasciculului este de 1,34 mm.

b. Focalizarea fasciculelor gaussiene. Luați în considerare fasciculul Gaussian de ordinul cel mai jos care a apărut, de exemplu, într-un laser și se propagă acum în afara acestuia. Acest fascicul va fi caracterizat prin lungimea de undă, raza taliei și lungimea taliei. Locația taliei fasciculului poate fi determinată din razele de curbură ale oglinzilor din cavitatea laserului. O cavitate simetrică va avea o talie în centrul cavității. O cavitate semisimetrică are o talie la oglinda piane.

Acum, acest fascicul să fie incident pe un Iens de distanță focală/situat la o distanță S de talia fasciculului, așa cum se arată în Fig. 7.56. Arătăm acum că în aproximarea parabolică fasciculul transmis de Iens este încă un fascicul gaussian.

Fig. 7.56 Focalizarea unui fascicul gaussian.

Câmpul electric la Iens este dat de Ec. (7.163) cu z = S. După lentilă, funcția de transmisie Iens (neglijând întinderea finită a lentilei) contribuie cu un factor de fază de

/zkr2 \

= expI4 2/)

Prin urmare, câmpul din partea de transmisie a lentilei este

C   1ï El(x, y) = A0 ei°>te~iks —ɪ- exp   - - (z0 - iS) (2
[_z0 - iS1(7.171)

Acesta va avea forma necesară pentru un fascicul gaussian cu un parametru de lungime z'0 și o talie a fasciculului situată la o distanță S'față de strângerea lentilei, cu condiția ca termenul dintre paranteze din Ec. (7.171) este egal

(z'0 + iSl)~1

Echivalarea acestor două expresii oferă următoarea ecuație complexă de „formare a imaginii” pentru fasciculele Gaussiene

1   1_j_ S + ZZ0 1 S1 - iz,0 f(7,172)

Când înmulțim Ec. (7.172) prin produsul celor trei numitori și luând părțile reale și imaginare ale rezultatului obținem două ecuații care

pot fi rezolvate pentru Z10 și S' (sau X' = S' – f) în termeni de z0 și S (sau X = S –f). Solutiile sunt:

v, f2x c, f , f2(S -/) X2 + zg' °γ(S -ʃ)2 + z¿ , _ x' _f2 _ Zof2 z° z°xz°X2 + Z2 (S-/)2 +z2(7,173) (7,174)

Ecuația (7.174) împreună cu Ec. (7.160) implică că noua rază .a taliei fasciculului este

, / f2 u,•>-√ π -w°√Xj+⅛(7,175)

Un caz special interesant apare atunci când talia fasciculului se află la punctul focal din stânga F al lentilei. Atunci X = O, iar parametrul Iength și raza taliei respectă relațiile simple

_, _Z2. w'of nf zo – ■>–"J zOzO(7.176)

unde d = w0/z0 este jumătatea unghiului de divergență al fasciculului Gaussian original.

Ecuațiile (7.173 până la 7.175) se aplică și pentru negativul X, ceea ce implică faptul că talia originală a fasciculului este la dreapta lui F. În acest caz, X' este, de asemenea, negativ, implicând

că talia fasciculului „imagine” este la stânga lui F'. Ecuațiile se aplică și pentru un Ien negativ sau divergent cu valoarea sa negativă f. Într-un astfel de caz punctele focale sunt inversate. F' este la stânga Ienilor și F la righi.

Ilustram utilizarea ecuatiilor. (7.173 până la 7.175) cu un exemplu numeric, așa cum se arată schematic în Fig. (7.57). Laserul este același folosit în exemplul anterior cu z0 = 2,1042 m și w0 = 0,5867 mm. Dacă un Iens cu o lungime focală de 100 mm este plasat la 150 mm la dreapta oglinzii sferice de ieșire, atunci S = 1,3 m, X = 1,2 m și găsim

X' – 2,045 mm, z'0 = 3,59 mm, w'0 = 24,22 µm

Este instructiv să comparăm aceste rezultate cu alte predicții. Optica geometrică ar prezice un punct de imagine fără aberații de rază infinitezimală în planul focal la S' =/Ifa uniformă, Fascicul colimat cu lungimea de undă de 514,5 nm ar trebui să treacă printr-o deschidere circulară de rază de 0,6 mm chiar în fața lentilei, un Modelul de difracție în câmp îndepărtat al diafragmei ar fi observat în planul focal drept. Acesta ar consta din discul Airy, înconjurat de inele mai slabe. Raza discului Airy, considerată convențional ca fiind cea a primului inel întunecat, este dată de ecuația. (6,65) ca

deschidere

în acest caz.

s

S'

102 mm

1,3 m

Fig. 7.57

Două Ienses pot fi utilizate împreună pentru a produce un expandator al fasciculului laser, așa cum se arată schematic în Fig. 7.58. Primul Iens are lungimea focală f1, iar fasciculul Gaussian intermediar are proprietăți descrise de ecuațiile. (7.173 până la 7.175) cu indicele 1 introduse peste tot. Al doilea Iens are o lungime focală mai mare, f2. Parametrii fasciculului Gaussian final respectă ecuațiile. (7.173 până la 7.175) cu indicele 2 introduse peste tot.

Pentru o valoare dată a lungimii focale și a plasării primei lentile, un fascicul extins cu cea mai mare valoare a razei taliei w'02 va avea cea mai mare valoare a parametrului Iength z'02. Pentru o valoare dată de J2 a lungimii focale a celei de-a doua lentile, z'02 va fi maxim dacă X2 = O. Aceasta înseamnă că talia intermediară ar trebui să fie poziționată în planul focal din stânga celui de-al doilea obiectiv. Apoi X2 = 0 și talia finală este situată în planul focal drept al acelei lentile. Raza taliei finale a fasciculului este apoi obținută prin aplicarea ecuației. (7.175) de două ori și (7.174) o dată:

2

ft J 2J 2 / 1 1

W02 = W01 — - W0 — /--------r-

z02 Ji y zoı Dacă se poate aranja că X1 = O, atunci X1 = 0 și

! J 2

W02 = W01 —

(7.177)

(7.178)

În acest caz, separarea Ienselor ar fi iff1 +f2, iar expansorul de fascicul se comportă ca o astronomică! telescop. În practică, X'1 este mic în comparație cu f1 +f2 și sunt necesare doar mici ajustări pentru a optimiza extinderea fasciculului. Trebuie avut grijă atunci când utilizați două lens pozitive ca expansor de fascicul pentru lasere de mare putere. În aer câmpul Puterea la talia fasciculului poate fi suficient de mare pentru a induce defectarea. În aceste circumstanțe, cel mai bine este să utilizați expansorul de fascicul Galileian. Acesta este compus dintr-o lentilă pozitivă și o lentilă negativă, ca în Fig. 3.41, cu lentila negativă mai întâi și suma algebrică a lungimii focale stili egală cu separarea lentilei.

2. Procesarea imaginii. A fost introdus conceptul de filtrare spațială<! în secțiunea 7.B4. Acolo s-a demonstrat că manipularea câmpului în planul focal al unui Iens este echivalentă cu modificarea transformării Fourier a unui obiect care se află în fața lentilei. Imaginea este legată de transformarea inversă a distribuției câmpului în planul focal. Am ilustrat conceptul cu matematică specifică! exemple care corespundeau procesării imaginii unui grătar pătrat. Aici dorim să extindem subiectul filtrării spațiale cu exemple mai concrete. \

A. Filtru trece-jos. Figura 7.48 arată cum un filtru spațial poate fi utilizat pentru a trece doar partea centrală a spectrului Fourier a obiectului. Imaginea rezultată din Figura 7.49 nu are detalii. Acest concept poate fi folosit în avantaj în configurațiile optice în care frecvențele spațiale înalte sunt nedorite.

Un filtru trece-jos constă dintr-o deschidere foarte mică care blochează toate componentele de înaltă frecvență ale obiectului, astfel încât imaginea să fie „netezită”. Acesta este folosit în mod obișnuit pentru a „curăța” ieșirea unui laser (Fig. 7.59), care, atunci când este operat în modul transversal de ordinul cel mai jos, are un profil transversal gaussian. În practica reală, profilul este „zgomotos” din cauza inortiogeneității sticlei utilizate pentru ferestre și oglinzilor din laser și din cauza prafului. Distribuția reală a câmpului are o parte „aspră” datorită acestor efecte, suprapusă pe distribuția ideală netedă și poate fi scrisă

^“actual ʃ^ɪdeal 4^

După cum se arată în Fig. 7.60m, AE variază rapid și aleatoriu pe distanțe mici în comparație cu w_0. Fie $m_0 > l/w_0$ o frecvență spațială caracteristică pentru fluctuația în ΔE. În timp ce transformata Fourier ^r[Eiaeal] conține frecvențe spațiale de la zero la aproximativ l/w_0, transformata Jsr[ΔE] va conține frecvențe mult mai mari centrate în jurul m_0. Distribuția rezultată în densitatea fluxului este schițată în Fig. 7.60b. Vedem cu ușurință că putem elimina Componentele Fourier

Fascicul de intrare

Primul Iens

Planul de filtrare

Al doilea

Iens

Fascicul de ieșire

Fig. 7.5» Filtrul spațial folosit pentru a elimina frecvențele spațiale înalte asociate cu un fascicul Gaussian neideal.

(b)

FOCAL

AVION

Fig. 7.60

a zgomotului /[ΔE] dacă introducem un orificiu în al doilea plan focal al primului Ien astfel încât gaura să aibă o rază cuprinsă între λf | w0 și λfu0. Distribuția câmpului în cel de-al doilea plan focal al celui de-al doilea Ien va fi apoi un Gaussian neted, care corespunde numai cu Eideal. Fotografii și scanări fotometrice ale densității de flux a fasciculelor laser cu și fără modificare spațială sunt prezentate în Fig. 7.61.

Un filtru spațial trece-jos este frecvent utilizat împreună cu un expandator de fascicul. În exemplul schematic prezentat în Fig. 7.58, filtrul spațial ar fi plasat în talie între cele două Iense. Fasciculul rezultat este mai larg ca secțiune transversală decât fasciculul de intrare și are cea mai mare parte a zgomotului de înaltă frecvență eliminat.

b. De îmbunătățire a imaginii. Structura nedorită sau structura falsă, cum ar fi zgârieturile care au regularități, într-o transparență pot fi adesea eliminate prin filtrare spațială. Transparența este utilizată ca obiect în configurația din Fig. 7.43. Structura nedorită trebuie să aibă o transformată Fourier limitată în mod restrâns în funcție de frecvențele spațiale è și v. Atunci regiunea din planul de filtrare (planul focal) corespunzătoare acestor frecvențe poate fi blocată și structura parazită poate fi îndepărtată din imaginea finală. De exemplu, luați în considerare o serie de linii paralele, nu neapărat egal distanțate, orientate la un unghi θ față de orizontală, așa cum se arată în transparența din Fig. 7.62α. Fiecare linie va produce un model de difracție în câmp îndepărtat destul de asemănător cu cel dintr-o fantă lungă și îngustă. Acesta va fi centrat pe axa sistemului și va fi alungit în direcția θ, de la verticală, așa cum se arată în Fig. 7.62b. Pentru a bloca aceste componente Fourier avem nevoie de o obstrucție în formă de două pene înguste care nu se întâlnesc tocmai la F, așa cum se arată în Fig. 7.62c.

Rezultatele reale ale filtrării spațiale de acest tip sunt prezentate în fotografia din Fig. 7.63. Fotografia de sus este o imagine a suprafeței Lunii, așa cum este telemetricată la pământ de un orbiter lunar fără pilot. „Grătul” de Iines egal distanțate este un

FLUX RELATIV

Poziția fantei →

Fara filtru spatial

Cu filtru spațial

Fig. 7.61 Efectul filtrării spațiale asupra unui fascicul laser monofazat. Graficele arată rezultatele scanării peste fascicul cu o fantă îngustă în fața unui fotometru. (!Ilustrațiile oferite de Spectra-Physics, Inc.)

artefact al procesului de telecontorizare. Fig. 7.64 arată modelul de difracție în planul de filtrare atunci când o transparență negativă a fotografiei lunii este iluminată ca în Fig. 7.43. Punctele mari distanțate egal reprezintă maximele de difracție rezultate din „rețeaua” din fotografia lunii și pot fi blocate în planul de filtrare prin obstrucția din Fig. 7.62c cu $\theta = \pi/2$. O fotografie pozitivă poate fi făcută în planul imaginii care este originalul minus grătarul nedorit (Fig. 7.63b).

Fig. 7.62 Transparența obiectelor cu oriente<! Iines : (a) obiect; (ð) model de difracție în planul focal; (c) filtrul care va bloca lumina asociată cu caracteristica obișnuită a obiectului, eliminând astfel acea caracteristică a imaginii.

Filtrarea spațială poate fi, de asemenea, utilizată pentru a elimina rețeaua de semitonuri care este o caracteristică a unor proceduri de imprimare. O examinare atentă a reproducerilor fotografice ale ambelor imagini din Fig. 7.61 va scoate la iveală rețeaua obișnuită pe care sunt plasate pete de dimensiuni diferite. Pe măsură ce densitatea figurii trece de la lumină la întuneric, petele se îmbină. Ochiul nostru integrează acest model de pete pentru a da impresia unui interval continuu de gri. De fapt, imaginea este produsă în întregime cu alb sau negru.

În unele cazuri, poate fi posibil să acoperiți scala de gri dacă mediul final de înregistrare este capabil să redă o gamă continuă de tonuri. Acest lucru ar fi de dorit în fotografie sau în detectarea electronică analogică a unui obiect în semitonuri. Ar fi necesar să folosim obiectul ca o transparență așa cum am făcut înainte. Modelul de difracție ar consta dintr-o distribuție dezordonată rezultată din Caracteristicile obiectului ideal, precum și dintr-un model obișnuit care ar fi cauzat de rețeaua de semitonuri. În cazul Fig. 7.61, modelul ar consta dintr-o serie de pete pe o grilă pătrată orientată la un unghi de 450 față de pagină. Pentru a elimina acest lucru din lumina care merge la imagine, ar trebui să blocăm toate punctele de pe grilă. Pentru a face acest lucru ar fi nevoie de un filtru special construit care ar putea fi realizat într-un proces separat prin expunerea unei foi de film în planul filtrului care a fost iluminat de modelul de difracție al unui obiect semiton de densitate uniformă. Negativul dezvoltat ar fi întunecat în același loc în care modelul de difracție de semitonuri a iluminat filmul. Când sunt introduse în planul focal în timpul prelucrării obiectului original, frecvențele spațiale de semitonuri vor fi eliminate din imagine. Acest lucru ar produce o imagine „înmuiată” cu o gamă continuă de gri. Cu toate acestea, deoarece filtrul elimină, de asemenea, unele dintre frecvențele spațiale care ar putea fi necesare pentru a reproduce toate caracteristicile obiectului, imaginea finală poate căpăta o calitate „încețoșată”. Rezultatul poate fi în continuare mai dorit decât obiectul inițial în semitonuri.

Fig. 7.65 Fotografie a suprafeței Lunii transmisă prin radio de la un orbiter lunar fără pilot: (a) înainte de filtrarea spațială; (h) după filtrarea spațială. (Fotografii prin amabilitatea Conductron Corp.)

Rg. 7.64 Modelul de difracție în planul focal datorită transparenței unui obiect care este fotografia Lunii nefiltrate din Fig. 7.63(α). (Cu amabilitatea Conductron Corp.)

c. Microscopie cu contrast de fază. Multe specimene de microscop biologic și de altă natură sunt aproape complet transparente, astfel încât nu modulează amplitudinea unui fascicul de lumină care trece prin ele; doar faza este modulată. Funcția de transmisie a unei lame de microscop care conține astfel de specimene are forma

$$\tau(x, y\} — e$$

Unde

$$\delta = y\,[n(x, y) - 1]\, d(x, y)$$

(7.179a)

(7.179b)

Aici n și d reprezintă valorile locale ale indicelui de refracție și ale grosimii specimenului. Deoarece ochiul uman răspunde la amplitudine, nu la fază, aceste mostre vor apărea invizibile cu un microscop obișnuit. Problema este de a converti cumva contrastul de fază reprezentat de Ec. (7.179) în contrast de amplitudine.

Lăsați microscopul să fie iluminat coerent. Figura 7.43 se va aplica apoi Ienilor obiectivului microscopului. Imaginea pe care o formează în planul imaginii acționează apoi ca un obiect pentru ocular, neprezentat. Dacă obiectul are o funcție de transmisie dată de Ec. (7.179), densitatea fluxului în planul imaginii va fi constantă, iar obiectul va fi invizibil. Obiectul poate fi redat vizibil dacă un filtru spațial

sub forma unei plăci de fază se introduce în planul focal al obiectivului. Dacă iluminarea este furnizată de o sursă punctuală (cum este într-un microscop), planul filtrului este planul imaginii pentru sursa punctiformă. Pe măsură ce distanța sursei se deplasează la infinit, planul filtrului devine planul focal.

Analiza este simplificată dacă presupunem că <5(x, y) este mult mai mic decât unitatea, așa cum este destul de des cazul. Atunci putem scrie, la primul ordin în δ,

$$\tau(x, y) — 1 — i\delta(x, y)$$

(7.180)

Primul termen (1) din Ec. (7.180) produce spotul nedifractat la F; al doilea termen (– i<5) produce toate punctele difractate, cum ar fi Fa. Fiecare dintre aceste puncte este de fapt un disc Airy cu inele, dar acest lucru nu este relevant pentru argumentul nostru.

Fără filtrare spațială, câmpul electric din planul imaginii este dat de Ec. (7.112) cu

Íx' y' \ ~ 1 -six' y'\ ym mj   \m mJ

(7.181)

și

| τ | 2 = l

Placa de fază este realizată astfel încât să schimbe faza punctului de la F cu un unghi – δf față de cel al tuturor punctelor difractate de la Fa. Un mod de a face acest lucru este prezentat în Fig. (7.65α). Primul termen din Ec. (7.181) se schimbă apoi din unitate în e~lδf.

Să presupunem că avem o placă de fază cu un sfert de undă (vezi capitolul 9) astfel încât δf – π/2. Apoi

e-><V = e-in | 2 =

iar (7.181) devine

A' / τ –

\mm

(7.182)

$\delta f \approx 2\pi(n-l)\Delta W/\lambda$

(A)

Fig. 7.65 Filtrul unui microscop cu contrast de fază schimbă faza componentei Fourier de ordinul zero cu 2/2. Dacă fasciculul incident la obiect este o undă plană, atunci filtrarea se face în planul focal al obiectivului. Dacă fasciculul incident provine dintr-o sursă de distanță finită, atunci planul filtrului este planul imaginii sursei. Dacă sursa este un punct, atunci filtrul de fază are o singură zonă ridicată ca în (α). Dacă sursa este un inel (obișnuit la aceste tipuri de instrumente), atunci filtrul de fază trebuie să fie și un inel ca în (b).

Acum, la primul ordin în <5, densitatea fluxului va fi proporțională cu

| τ | 2 = 1 + 2¿)f–,–

aa m

(7.183)

Vedem că contrastul de fază a fost într-adevăr convertit în contrast de amplitudine. Obiectul este acum vizibil.

Vizibilitatea obiectului poate fi îmbunătățită dacă se introduce o atenuare $\tau < 1$ împreună cu schimbarea de fază – δj• la F. Atunci, pentru o valoare generală a δj- avem

\m mJ   \m mj

(7.184)

și

Iτ | 2 ≈ τ2 + <52 – 2τδ cosí ÷ δf

(JAZS)

Acest lucru va produce contrast maxim atunci când $\delta f = + \pi/2$ și $\tau \approx |\delta|$.

Microscoapele practice cu contrast de fază folosesc adesea un condensator astfel încât sursa eficientă să aibă mai degrabă forma unui inel subțire decât a unui punct. Partea înălțată a plăcii de fază trebuie să se potrivească cu imaginea acestei surse în planul filtrului și va fi apoi în formă de inel, așa cum se arată în Fig. 7.65b. Fotomicrografiile sunt prezentate în Fig. 7.66 care relevă clar îmbunătățirea contrastului vizual atunci când este utilizată metoda contrastului de fază.

d. Rezoluție cu iluminare coerentă. În capitolul 6, înainte de a discuta despre difracție și rezoluție limitată, am presupus că obiectele în două puncte în cauză au emis o lumină care nu era coerentă reciproc. Aceasta este o presupunere rezonabilă pentru Iight de la două stele îndepărtate. Fiecare stea acționează ca o sursă punctuală care poate trece la difracție la deschiderea Iens. Cu toate acestea, emisia din surse nu este corelată.

La microscop situația poate fi destul de diferită. Când o sursă foarte mică este defocalizată de condensator pentru a produce un fascicul paralel la obiect, obținem coerență transversală pe întregul câmp vizual dacă sursa este Suficient de mică. În acest caz, rezoluția a două puncte din planul obiect trebuie abordată considerând cele două puncte ca un singur obiect cu structură.

Puterea de rezolvare a unui sistem optic iluminat coerent este destul de dificil de definit. Un criteriu timpuriu a fost dezvoltat de Abbe ca o consecință a teoriei sale de difracție a formării imaginii unui obiect periodic. El a susținut că punctele de difracție de ordinul zero și de ordinul întâi sunt necesare pentru a păstra o aparență a semnalului periodic original. Figura 7.49 arată că acesta este într-adevăr cazul.

Să presupunem că un obiectiv de microscop este configurat să funcționeze așa cum se arată în Fig. 7.43 și că opritorul de deschidere al sistemului este în planul focal al obiectivului. Daca

Fig. 7.66 Celulele epiteliale ale gurii relevate de două tipuri de microscopie: (a) câmp luminos obișnuit; (b) contrast de fază. (Fotografii prin amabilitatea lui Carl Zeiss, Inc.)

are o rază rf, avem pentru transmisia Funcția care trebuie introdusă în Ec. (7.140) următoarele:

1, u2 + υ2 ≤ w2

0, u2 + V2 > w2

(7.186)

Aceasta are efectul de a bloca toate frecvențele spațiale u, v care satisfac U2 + V2 > W2

Unde

w = -i•

V

Integrai din Ec. (7.140) este apoi limitată la domeniul

λ/u2 + V2

< W

1

a > — = w

λL

rf

θz,

(7.187)

Ecuația (7.187) reprezintă o expresie pentru rezoluția limită a unui sistem iluminat coerent. Putem arăta că pentru sistemele optice cu unghi mare care respectă condiția sinusului (secțiunea 4.3A4) ar trebui să înlocuim θzm cu sin θzm. Dacă rezultatul este extins pentru a acoperi cazul în care indicele de refracție la obiect este n, valoarea minimă rezolvabilă a distanței dintre rețele este

λ n sin θz m

(7.188)

Această expresie este adesea luată ca definiția rezoluției unui microscop sub iluminare coerentă la incidență normală, dar are o semnificație clară numai pentru un obiect periodic. Rețineți că αraiπ în Ec. (7.188) este de 1,6 ori mai mare decât valoarea

0,6U

dat pentru iluminare incoerentă în Eq. (6.148).

Dacă suntem dispuși să suferim o pierdere de contrast și alte efecte uneori nedorite, rezoluția poate fi îmbunătățită prin iluminare oblică cu lumină coerentă. Să presupunem că punctul difractat de ordinul zero de la F din Fig. 7.46 nu mai este pe axă, ci este deplasat în jos până când se află chiar în interiorul marginii inferioare a deschiderii până la locul în care era punctul F~1. Apoi, dacă punctul de ordinul doi se află acum chiar în interiorul marginii superioare, am dublat frecvența spațială Iimitatoare și, prin urmare, am înjumătățit dimensiunea minimă a obiectului rezolvabil la

care este cu 22% mai bună decât valoarea pentru iluminare incoerentă.

Cu acest aranjament oblic toate punctele de difracție de ordin negativ sunt blocate. Acest lucru va tinde să reducă contrastul, cu excepția cazului în care ordinul zero este atenuat artificial. Asimetria comenzilor lipsă poate produce alte efecte, dar nu le vom urmări aici.

Fig. 7.67

Observator

3. Holografie. În fotografia obișnuită, imaginea obiectului este aranjată să cadă pe film, unde este înregistrată o hartă bidimensională a distribuției densității fluxului în planul imaginii. Pentru a vizualiza fotografia observăm filmul direct sau prin transmisie și astfel simulăm în ochii noștri aspectul obiectului original. Această metodă nu poate reproduce adevărata distribuție a câmpului optic care a fost prezentă inițial în planul imaginii, deoarece informațiile despre faza câmpului sunt mai puțin în procesul de fotografiere. Filmul răspunde numai la densitatea de flux medie în timp.

În holografie se reconstituie fronturile de undă în sine. Ele conțin toate informațiile optice conținute în undele de lumină originale care provin de la obiect. Acest lucru este indicat schematic în Fig. 7.67, care arată un obiect fiind aluminat de lumină de la o sursă. Valurile de lumină împrăștiate cad apoi în ochii unui observator. Dacă avem vreo modalitate de a înregistra aceste unde, de exemplu, în planul arătat întrerupt în figură și apoi de a le reproduce la un moment ulterior, astfel încât aceleași unde să se îndrepte către observator, atunci ceea ce va vedea el sau ea este o imagine a obiectul original. Cu toate acestea, spre deosebire de cazul fotografiei normale, imaginea va

apărea în trei dimensiuni cu poziția relativă adecvată a diferitelor sale părți. În situația ideală, observatorul nu ar putea spune dacă lumina provine de la un front de undă reconstruit sau de la obiectul original.

A. Înregistrarea fazei. Înregistrarea de fază necesară este produsă cu film fotografic într-un mod special. Rezultatul este o înregistrare spațială într-un anumit plan a relațiilor relative de fază în lumina care vine de la obiect. Măsurătorile de fază sunt gestionate cel mai eficient prin interferometrie. Fasciculul optic care conține informațiile dorite este cauzat să interfereze cu un fascicul de referință care este caracterizat de un front de undă lipsit de caracteristici. Densitatea de flux rezultată este sensibilă la diferența de fază dintre fasciculul de informații și fasciculul de referință. Conceptul este ilustrat în Fig. 7.68. Modelul de interferență în planul de înregistrare este o înregistrare a distribuției de fază și amplitudine a luminii care provine de la obiect. O placă de film expusă în acest plan va purta o înregistrare permanentă a acestei distribuții. Ecuația (6.24) oferă expresia cantitativă pentru distribuția spațială a densității fluxului mediat în timp în planul de înregistrare,

S = S1 + Sr + 2√Sau ∞s(^r - ^1) (7,190)

unde S1 este densitatea fluxului în fasciculul care vine de la obiect, Sr este densitatea fluxului în fasciculul de referință și cj>r — $ 1 este diferența de fază dintre cele două

(b)

Fig. 7.60

grinzi la planul de înregistrare. Densitățile și fazele fluxului sunt funcții ale lui x, y, Coordonatele din planul de înregistrare.

În acest moment, este convenabil să ajustați Puterile relative astfel încât fasciculul de referință să fie semnificativ mai luminos decât fasciculul de informații (Sr > S1). O inegalitate de trei până la cinci ori este suficientă în practică. Acest lucru ne permite să scriem o formă aproximativă pentru Eq. (7.190) care este mai ușor de manevrat.

Sb Sr

cos(^r —)

cos(^r - ^1)

(7.191)

Aceasta este distribuția densității la care este expus filmul de fotografie, unde S1 = | E1 | 2, Sr= | Er | 2 cu

Er(x, ÿ) = Xr ei<ωt+≠-•<i'(7.192) și

E1(x, y) = A1(x, y)ei<ωt+*l^'yn   (7.193)

Pentru filmul de fotografie relația dintre densitatea fluxului incident și transmisia filmului după dezvoltare este dată de

τ = KS~y

(7.194)

Variabilele K și γ depind de Lungimea expunerii și de Caracteristicile filmului. Deoarece Eq. (7.191) are forma

S = Sr(1 + Δ)

unde Δ <ξ 1, putem scrie

τ = K[Sr(l + Δ)]''

⅛ K5/Ч1 - rʌ)

≥ τ0 1 - 2yfiΛ c°s(^r - $i)

(7.195)

Unde

⅞ = κsr-'

Această placă astfel dezvoltată se numește hologramă și a primit acest nume pentru prima dată de Dennis Gabor, inițiatorul tehnicii, în 1948. O microfotografia a unei holograme este prezentată în Fig. 7.696. Frigidele la scară mică poartă informațiile.

b.   Reconstruirea frontului de undă. Pentru a obține reconstrucția exactă a fasciculului inițial din obiect, punem placa dezvoltată înapoi în locul inițial și o iluminăm cu fasciculul de referință original. Cu alte cuvinte, păstrăm geometria originală din Fig. 7.68, dar eliminăm obiectul original. Incidentul de lumină de pe placă va avea o distribuție de câmp dată de Ec. (7.192).

Folosind Eq. (7.195) obținem câmpul electric transmis de placă

Et = τEr = τ0

1 — 2γ(ɪ j cos(<‰. — ≠ι) Ar e,^ωt+^)

= ⅞ 1 - 7 |

__1 V^i(Φr-ψl) _|_ e~i<Φ' ArI

-<À')) Д ei(ωt + φr)

sau

Et = τ0Er - γτ0E1 ei2^r ≠1> - γτ0Eι

(7.196)

Primul termen din Ec. (7.196) este ceea ce placa ar transmite dacă ar fi fost expusă numai fasciculului de referință. Al treilea termen este proporțional cu câmpul electric original și reprezintă undele de lumină reconstruite. Dacă ar fi prezent, un observator ar vedea o imagine virtuală a obiectului original în poziția sa inițială. Al doilea termen oferă adesea o imagine reală a obiectului, așa cum vom vedea mai târziu. Acesta și primul termen pot fi separate de al treilea termen dorit din cauza direcțiilor diferite parcurse de grinzile pe care le reprezintă.

c. Geometrie punct-sursă. Pentru a descrie efectul celui de-al doilea termen din Ec. (7.196) și pentru a trata cazurile în care holograma este văzută într-o geometrie diferită de cea a fasciculului de referință la care a fost expusă, este convenabil să ne schimbăm punctul de vedere. Acum ne concentrăm asupra Iight dintr-o sursă punctuală ca referință

fascicul și un anumit punct de pe obiect. Acest lucru duce la un front de undă de referință sferic care interferează cu frontul de undă dintr-o anumită parte a obiectului. Pentru a descrie influența întregului obiect trebuie să suprapunem câmpurile din toate punctele obiectului cu fazele și amplitudinile lor corespunzătoare. În loc de Eq. (7.191), în analogie cu Eq. (6.34) avem

S ≤ Sr

1 +

X Un cos(- ‰)

(7.197)

unde suma este peste toate punctele de pe obiect. Acest lucru duce la forma mai generală pentru Eq. (7.196). Dacă câmpul din obiect este scris ca

E1→∑En = eiωt∑Anei^ (7.198)

n n

avem

E,½τ0Er-γτ0

n

7⅛ ∑ En

n

(7.199)

pentru câmpul transmis în cazul în care fasciculul de reconstrucție este identic cu fasciculul de referință. În limitele în care punctele sunt foarte apropiate, suma devine integrală. Nu vom merge atât de departe cu teoria noastră, ci vom dezvolta ideile necesare pentru a înțelege reconstrucția unui punct. Obiectul real va necesita un câmp care este o sumă a rezultatelor datorită unei colecții de puncte.

Luați în considerare Fig. 7.70, unde este identificat planul de înregistrare. Originea sistemului nostru de coordonate este la Õ cu x și y în plan și z perpendicular pe plan. În expunerea hologramei ne interesează faza unei unde de referință dintr-un punct la Pr = (xr, yr) într-un plan perpendicular pe și la o distanță Dr de-a lungul z, așa cum se arată. În aproximarea parabolică câmpul la P în planul de înregistrare datorat sursei punctului de referință va fi

'A

D

Unde

= kR•o,r

— k(arx + βry)

(7.200)

Am folosit ecuațiile. (7.85a și c) pentru a defini cosinusurile direcției pentru o rază de la Pr la P.

În plus față de acest front de undă, la P avem nevoie de câmpul din punctul de pe obiect,

(A)

(b)

Fig. 7.69 (continuare pe pagina următoare)

(c)

Fig. 7.69 Holografie: (a) fotografia unui obiect tridimensional; (b) microfotografie a hologramei; (c) reconstrucție holografică. (Fotografii prin amabilitatea Conductron Corp.)

Fig. 7.70 Geometrie pentru specificarea fazei dintr-o sursă punct de referință măsurată în planul de înregistrare.

Di

Fig. 7.71 Reprezentarea schematică a punctului de referință, a punctului obiect și a sursei punctuale utilizate în reconstrucție. Acestea sunt Pr, P1 și Ps, respectiv.

P1. Acest lucru este prezentat schematic în Fig. 7.71. Cu indicele adecvate găsim câmpul la P datorită punctului obiect la P1 să aibă aceeași formă la Eq. (7.200).

'ΛΔ · , -r

— | e'ωt elφi

DJ

Unde

= ^o,ι ~

- k(μ1x + β1y)

(7.201)

Funcția de transmisie a hologramei dezvoltate va fi dată de Ec. (7.195) unde (φr — ^1) este

 țț   Jr2 \ (ɪ 1

Φr ~ Φι = ~k(Ro,r ~ ŋ ^~ I ^2/(- J)

-k[(ocr - α1)x + (βr - β1)y]

(7.202)

Considerăm acum reconstrucția în care sursa punctiformă Ps pentru fasciculul de reconstrucție nu este orientată exact în același mod ca sursa Pr pentru fasciculul de referință. În plus, se consideră că lungimea de undă λ' — 2π/kr = 2πc/ω' a Iight-ului utilizat pentru reconstrucție să fie diferită de cea folosită pentru a expune holograma (A = lit/k = 2πc/ω). Cu distanța sursei și direcția cosinus notate cu Ds și αs, câmpul electric incident la hologramă va fi apoi

cu

fk,r%'' \

s ~ -/c'K0,s ~ TFT - k^ + O

(7.203)

iar lumina transmisă va fi dată în analogie cu Eq. (7.196) de către

~   ~/ AAD \

Et I τ0 Es- γτ0 eiω't + ≠≈'

z 0 IkDl DA

— γτ0 eiω', |

A1 A. Dr \ .lr χ,r1

— —? —£ I ~Φr + φs)

DlDsArI

(7.204)

Faza dependentă spațial a celui de-al treilea termen din Ec. (7.204) poate fi scris aproximativ

(k'f2 1 \

-γjt]-k'(<x,x + β,y) (7,205)

Aceasta este echivalentă cu faza Iight dintr-o sursă punctiformă P' având cosinus de direcție α', β' și distanța D' unde

J___fc/1_____Π 1 JA ɪ

D' ~ k' \ D1 Dr) + Ds ~ Í [d^1 ~ Wr) + Ws

(7.206)

și

≈' = ɪ («ï - α,) + «s; β' = J (β1 - βr) + βs (7-207)

Dacă Pr coincide cu Ps și λ cu λ', atunci P1 va coincide cu P1.

Dacă punctul obiect este deplasat iateral pe o distanță Δx1 ⅛ Δα1D1, atunci P' se mișcă lateral pe o distanță Δx' Δα'D'. Putem defini apoi o mărire transversală care este dată de ordinul întâi în α1 și x/D1

Δx' _ Ш

Δx1 λD

(7.208)

după cum este indicat în fig. 7.72.

O mică modificare în D1 va rezulta într-o modificare corespunzătoare în D' obținută prin diferențierea ecuației. (7,206). Pentru mărirea longitudinală obținem apoi

ΔD' λ'D,2

AD1 λD2

(7.209)

Fig. 7.72 Demonstrarea măririi transversale dintre un obiect punctual și imaginea sa reconstruită.

Un tratament similar poate fi dat celui de-al doilea termen din Ec. (7,204). Partea spațială a fazei sale este dată de

'   /,k'r2 1 \

(& -⅛i + $s) ≡ -k'R" = -k'R'é -   - k'^'× + β"y^ <7•21°)

Aceasta corespunde cu Iight dintr-o sursă punctuală la P" cu cosinus de direcție

v   λ'

oc" = j(ocr- α1) + αs, β" =~λ(βr- β1) + βs   (7,211)

si distanta D" data de

J__£/J_

D7'~λ \ Dr

JA J_

DJ + Ds

(7.212)

În acest caz, orientarea unghiulară a Iight tinde să fie opusă celei din P'. Căci, dacă atât αr cât și αs sunt zero, avem

α" = aA,/λ = —oc'

Mărirea transversală pentru această imagine este

Δx" _ P" Δα" _ _ λ'D"

Ax1 Di Δα1 AD1

iar mărirea longitudinală este

AD" _ λ' D"2

ΔD \ ~ ~~λ~Cf

(7.213)

(7.214)

d. Holografie cu transformată Fourier. În holografia cu transformată Fourier, obiectul și sursele de referință sunt echidistante de planul de înregistrare, astfel încât $D1 = Dr$. Partea dependentă de spațiu a diferenței de fază în Ec. (7.202) are doar termenii liniari,

$-fc[(\alpha r - a1)x + (\beta r - \beta 1)y]$ (7,215)

Holograma constă din franjuri sinusoidale echidistante cu o separare

2

Ax =--------- (7,216)

αl - ar

Ecuațiile (7.206) și (7.212) ne dau atunci

$D' = D'' = Ds$

Situația este deosebit de simplă când $A = A'$ și $\alpha r = \alpha s = 0$. Atunci a' = a1 și a" = – a1. Figura 7.73 prezintă schematic cele două imagini ale unui obiect în trei puncte P1, P2, P3. Rețineți că reconstrucția tridimensională a obiectelor cu amorsare dublă are o perspectivă greșită, adică P2 ar părea a fi în fața lui P3, chiar dacă este mai mare. (Pentru punctul P3 condiția $D3 = Dr$ nu este îndeplinită și

Hg. 7.73 Holografie cu transformată Fourier. Aici Ds = l | 2Dr.

(<^>1 – <‰) va conține un termen pătratic în r.) Aceasta este caracteristică „imaginei false” care provine din al doilea termen din Ec. (7,204). Imaginea reconstruită Pr1, P'2, P3 este distorsionată. Mărirea transversală este de jumătate (din ecuația (7.208)), dar mărirea longitudinală este de un sfert (din ecuația (7.209)).

Denumirea „transformată Fourier” este aplicată acestui tip de holografie deoarece funcția de transmisie $\tau(x, y)$ a hologramei este legată de transformata Fourier a câmpului electric la obiect.

e. Holografie cu transformată Fresnel în lumină paralelă. Când condiția $D1 = Dr$ nu este îndeplinită, astfel încât să existe termeni în f>l – < ‰. care variază cu f2, avem ceea ce este cunoscut sub numele de holografie cu transformă Fresnel. Un exemplu simplu apare atunci când ambele grinzi de referință și de reconstrucție sunt paralele, adică Dr = Ds = oo. Pentru simplitate, presupunem din nou că $\lambda r = \lambda$ și αr = ca - O. Atunci a' = a1 și a" = - a1. Avem și Dr-D1 și D" --D1. Aceasta înseamnă că „imaginea falsă”, P”, se află pe partea opusă a planului de înregistrare. Aceasta înseamnă că Iight se află de fapt către un focus la P”. Situația este ilustrată în Fig. 7.74. Observați din nou perspectiva greșită în „imaginea falsă”, Pr1, Prr2, P3.

Fig. 7.74 Holografie cu transformată Fresnel. Aici Ds și Dr sunt amândoi amplasați la o distanță foarte mare de partea stângă a desenului.

REFERINȚE

Abramson, Nils H. Realizarea și evaluarea hologramelor. Académie Press, New York, 1981. „i” · ..

Arfken, G. Metode matematice pentru fizicieni. Académie Press, New York, 1970.

Born, Max și Emil Wolf. Principii de optică. Pergamon Press, Oxford, 1980.

Cagnet, Michel, Maurice Françon și Jean-Claude Thrierr. Atlasul fenomenelor optice. Springer-Verlag, Berlin, 1962. \

Cathey, WT Procesarea optică a informațiilor și holografie. Wiley Interscience, New York, 1974.

Collier, RJ, CB Burckhardt și LH Lm. Holografie optică. Académie Press, New York, 1971.

De Velis, John B. și George O. Reynolds. Teoria și aplicarea holografiei. Addison-Wesley, Reading, Mass., 1967.

Duffieux, PM Transformarea Fourier și aplicarea ei în optică. Wiley, New York, 1983. Fowles, Grant R. Introduction to Modem Optics. Holt, Rinehart și Winston, New York, 1968.

Françon, Maurice. Difracţie; Coerența în optică. Pergamon Press, Oxford, 1966.

Françon, Maurice. Formarea și procesarea imaginii optice. Académie Press, New York, 1979.

Goodman, Joseph W. Introducere în optica Fourier. McGraw-Hill, New York, 1968.

Kline, Morris și Irwin W. Kay. Teoria Electromagnetică și Optica Geometrică. Interscience, New York, 1965.

Lengyel, Bela A. Introducere în fizica laserului. Wiley, New York, 1966.

Linfoot, EH Fourier Methods in Optical Image Evaluation. Focal Press, Londra, 1964.

Martin, LC Teoria microscopului. Elsevier, New York, 1965.

Mertz, Lawrence. Transformări în optică. Wiley, New York, 1965.

Pearcey, T. Table of the Fresnel Intégral to Six Decimal Places, Cambridge University Press, Cambridge, 1956.

Rossi, Bruno. Optica. Addison-Wesley, Reading, Mass., 1957.

Smith, Howard M. Principiile holografiei. Wiley, New York, 1975.

Smith, William V. și Peter P. Sorokin. Laserul. McGraw-Hill, New York, 1966.

Soroko, Lev Markovich. Holografie și optică coerentă. Plenum Press, New York, 1980.

Stark, Henry. Aplicații ale transformatelor optice Fourier. Académie Press, New York, 1982. Steward, EG Fourier Optics. Wiley, New York, 1983.

Stone, JM Radiation and Optica. McGraw-Hill, New York, 1963.

Stroke, George W. O introducere în optică coerentă și holografie. Académie Press, New York, 1969.

Verdeyen, Joseph T. Laser Electronics. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1981.

Yu, Francis TS Procesarea optică a informațiilor. Wiley, New York, 1982.

Prodlems

Secțiunea 7.1 Transformări Fresnel

1. Estimați cerințele privind deplasarea (x – x) ~ (y _ ÿ) ~ (x _ χ') ~ (ÿ - y') pentru D = D', astfel încât primii termeni din Ec. (7.16) poate fi neglijat în siguranță. Do

aceasta numeric pentru cazul D = D' = 2m, λ = 500 nm.

2. Cum se schimbă forma transformării Fresnel dacă suprafața de integrare este modificată pentru a fi definită de o sferă centrată pe P'?

3. Este posibil să se proiecteze un propagator pentru limitele îndepărtate ale transformării Fresnel? Situația câmpului îndepărtat este valabilă atunci când P1 și P2 sunt separate printr-o distanță care este mare în comparație cu intervalul de integrare pe pian x1y1. Discutați răspunsul dvs.

4. Fili în pașii dintre ecuații astfel încât să se demonstreze în mod explicit că propagatorul h(P1 → P2) în aproximarea parabolică ia formele echivalente reprezentate de ecuațiile. (7.18), (7.20a) și (7.20b).

5. Descrieți un propagator care este o aproximare a ecuației. (7.2) și care duce următoarea ordine dincolo de aproximarea parabolică din specificația pentru R12.

6. Într-o situație imaginară presupuneți că trebuie să găsiți distribuția transversală a densității fluxului într-un fascicul coerent într-un loc care este inaccesibil. Puteți măsura densitatea fluxului într-o poziție care se află la o distanță D înainte de locația dorită. Știți că în această poziție frontul de undă este o undă plană și posedă distribuția fluxului dată de

zero,

A

pentru x1, y1 între + -

In caz contrar

Utilizați transformarea Fresnel pentru a determina densitatea fluxului pe axa optică în locația dorită D dincolo de planul de măsurare.

7. Să presupunem că avem două sisteme optice coerente care utilizează o lumină de aceeași lungime de undă. Sistemul 2 are un câmp electric în pian z = 0 care este același cu cel pentru Sistemul 1, dar cu o schimbare de scară, adică

E2(x, y, O) = El(mx, тy, 0)

Arătați că, cu excepția unui factor de fază constant, o transformare Fresnel dă

E2(x', ÿ, L) = E1(mx', my', m2L)

Secțiunea 7.2 Difracția FresneI

8. În laborator putem observa modelul de difracție Fresnel al unei margini drepte folosind configurația din Fig. 7.75, cu o sursă difuză în spatele unei parații înguste! până la marginea dreaptă. Explicați cum va funcționa acest lucru considerând că regiunea deschisă a fantei este compusă din multe surse punctiforme incoerente. Descrieți semicantitativ efectul asupra modelului de difracție al fiecăruia dintre următoarele acționând separat.

Fig. 7.75

(a) O mică răspândire Az în lungimea de undă.

(b) O lățime finită w în fantă.

(c) O mică aliniere unghiulară între fantă și marginea dreaptă.

(d) O muchie aspră pe muchia dreaptă cu o variație Ax.

Răspunsurile dvs. pot fi făcute mai precise dacă utilizați rezultatele problemei 7.13.

9. O undă plană monocromatică cu lungimea de undă de 400 nm este incidentă în mod normal pe un ecran opac în care există o fantă orizontală lungă, îngustă, cu lățimea de 0,2 mm. Dacă lumina incidentă

la fantă are o densitate de flux de 100 mW/cm2, găsiți densitatea de flux în centrul modelului de difracție pe un ecran la 4 m de fantă folosind spirala lui Cornu. Localizați poziția primului minim folosind spirala lui Cornu. Comparați această soluție cu cea care s-ar obține folosind aproximarea câmpului îndepărtat, Ec. (6,35).

10. O sursă punctiformă cu lungimea de undă de 500 nm se află la 8 m de un ecran. Un alt ecran opac este plasat la jumătatea distanței dintre sursă și primul ecran. Acest al doilea ecran Conține o gaură pătrată cu laturile de 2 mm care este centrată pe o linie perpendiculară pe ambele ecrane și care trece prin sursă. Utilizați spirala lui Cornu pentru a determina locația primelor două minime cele mai apropiate de centrul modelului. Folosind tabelele pentru Fresnel intégrais, calculați densitatea fluxului în centrul modelului și la primul minim dacă sursa punctuală emite 50 W de radiație.

11. O undă plană monocromatică cu o lungime de undă de 400 nm este incidentă perpendicular pe un ecran plan opac delimitat de o muchie dreaptă. Folosind spirala lui Cornu, determinați pozițiile primelor trei maxime și minime dintre ele în modelul de difracție observat pe un plan paralel cu ecranul la o distanță de 2 m.

12. Un fir drept de 1 mm în diametru se află de-a lungul traseului unei unde plane Iight cu lungimea de undă de 500 nm, perpendicular pe direcția de propagare. Complotează

distribuția densității fluxului pe un ecran la 2 m de fir. Marcați marginile umbrei geometrice.

13. Comportamentul modelului de difracție Fresnel al unei margini drepte în regiunea brighi departe de umbra geometriei poate fi obținut prin studierea integralei Fresnel Ec. (7.46c) cu Iimit de integrare inferioară înlocuit cu minus infinit și Iimit superior considerat a fi mare. Fie $\eta = \eta_0 + \Delta t/$, unde $\eta_0 > 1$ și $\Delta\eta <\zeta 1$. Să se arate că se poate obține apoi o expresie aproximativă pentru integrala care oscilează Corespunzător unei oscilații sinusoidale a lui $S(\eta)$ în jurul lui Sno cu amplitudinea $\Delta S = S(\eta)$ - Sna = Sno[v/2/(πi70)] și cu o perioadă de $2/\eta_0$.

14. Un fascicul colimat cu lungimea de undă luminoasă 546 nm este incident în mod normal pe un ecran opac subțire care conține o deschidere circulară cu diametrul de 5 mm. Aflați pozițiile punctelor axiale de densitate de flux maximă și minimă.

15. Luați în considerare difracția prin obstrucția prezentată în Fig. 7.76. Radiația incidentă provine dintr-o sursă punctuală îndepărtată și are o lungime de undă de 500 nm. Observatiile se fac la P' pe axa obstacolului la o distanta de 2 m. Găsiți densitatea fluxului.

16. Care este câmpul electric într-un punct axial din planul de observare dacă deschiderea este o secțiune deschisă a unghiului panei y? (vezi Fig. 7.77.)

17. Undele plane monocromatice cu lungimea de undă λ sunt incidente în mod normal pe o deschidere circulară a unui ecran de

Fig. 7.77

raza f0 și apoi cad pe un plan de observație la o distanță D'. Să presupunem că $r_0 = \chi/2N\lambda D'$ unde N este un număr întreg. Fie P_1 punctul din planul de observație care se află în centrul regiunii geometrice brighi.

(a) Câte zone de semiperioade sunt în deschidere văzută din P'? Numiți acest răspuns M. În ceea ce privește M: Care este raportul dintre câmpul electric de la P' și câmpul electric fără ecran?

(b) Când o placă de zonă este introdusă în deschidere care blochează orice altă zonă de jumătate de perioadă și permite trecerea la lumină din celelalte zone?

(c) Când o placă de zonă este introdusă în deschidere care schimbă faza oricărei alte zone de jumătate de perioadă cu π radiani și nu afectează celelalte zone?

(d) Când se pune un Ien perfect în deschiderea care focalizează razele la P'? Puteți neglija factorii de înclinație.

18. O sursă punctiformă monocromatică P emite o lumină cu lungimea de undă de 600 nm. Se fixează pe o deschidere Ã 10 cm distanță și apoi pe un ecran la 20 cm dincolo de Ã.

(a) Care este valoarea lui r_1, raza primei zone de semiperioada Fresnel la À?

(b) Diafragma À este un cerc cu raza de 1 cm. Câte zone de semiperioada Fresnel conține?

(c) O placă de zonă cu fiecare altă zonă blocată și cu raza primei sale zone = rɪ este plasată la A. Aceasta concentrează Iight de la P' pe ecran. Ecranul este mutat spre Ã. Unde se vor forma imagini suplimentare?

19. Să se arate că pentru valori mici ale lui ó factorul de înclinare Q(δ) din Ec. (7.61) poate fi scris

Q(<5)≈

$A\ D^2 + (P')^2\ 4\pi\ DD'(D + D')$

20. Estimați o valoare pentru integrala $I(\delta_0)$ din Ec. (7.62) prin integrarea pe părți. Acum folosiți aproximarea problemei 7.19 pentru a obține o expresie explicită pentru $I(\delta_0)$.

21. Să considerăm o zonă care are funcția de transmisie prezentată în Fig. 7.78 (reprezentată în funcție de r^2/r^2). Fiecare regiune deschisă are o lățime de B < 2. Schițați curba fazorială într-un punct axial P'

când o astfel de zonă este folosită ca deschidere cu r1 = yfλd. Care este câmpul la P' dacă există zone N în piate? (A este par). Când B ≠ 1 zona piata poate da un focus la un punct P' pentru care F1 = y/2λd, spre deosebire de zona piata din Fig. 7.326. Explica.

Secțiunea 7.3 Formarea imaginii

22. Să presupunem că un sistem optic care este lipsit de defecte (și pentru acest exemplu rămâne nespecificat) creează o undă sferică care converge spre punctul P'o. Fie introdusă o deschidere la o distanţă L' de P,o. Utilizați formalismul de transformare Fresnel pentru a determina forma funcțională pentru distribuția câmpului în vecinătatea lui P10 pe un plan de observație paraficiat de planul de deschidere. Utilizați aproximarea parabolică pentru faza undei sferice în planul deschiderii.

23. Un obiect mic în formă de disc cu raza a este iluminat de o undă plană și imaginează de un Iens cu raza b care este plasat la o distanță 2f de obiect. Configurația este cea din Fig. 7.37 cu excepția faptului că obiectul se află la originea planului obiect. Folosind Eq. (7.92) notați integrala care trebuie calculată pentru a putea fi determinată distribuția câmpului în planul imaginii. Simplificați integrala cât mai mult posibil. Acum utilizați extinderea seriei pentru funcția Bessel pentru a simplifica și mai mult rezultatul.

∞ (-1)" J1(W) = ∑0 n!(n + 1)!

24. Folosind Eq. (7.92), găsiți forma analitică pentru câmpul electric optic în imaginea unei găuri pătrate cu laturile a centrate pe o perpendiculară pe axa z. Gaura este iluminată din spate de o undă plană monocromatică. Iens are o lungime focală de f și o deschidere definită de o gaură pătrată (ale cărei laturi sunt

paradei la gaura obiectului si sunt de marimea b > a) intr-un ecran care se afla in contact cu lentila. Să presupunem că planul obiectului este la 2/ de lentilă.

25. Deduceți Ec. (7.130), distribuția câmpului în planul focal, printr-o transformare Fresnel înainte direct din obiect, mai degrabă decât prin transformarea înapoi din imagine, așa cum sa făcut în text.

26. Demonstrați echivalențele exprimate în Ec. (7.96a) pentru argumentele transformării Fourier a Funcției de transmisie a pupilei în relația pentru câmpul electric în planul imaginii datorat unei surse punctuale.

27. Deduceți justificarea pentru Ec. (7.111b) în etape similare celor prezentate în text pentru a justifica Ec. (7.111a). O diagramă similară cu Fig. 7.41 ar fi utilă.

28. Deduceți o expresie pentru distribuția câmpului în planul focal al unei lentile cu deschidere infinită care este iluminată de o undă plană monocromatică în cazul în care obiectul este o pană transparentă. Fie ca pană să fie un pătrat cu laturile a în planul xy și să aibă o grosime crescândă pe măsură ce y crește. Să presupunem că pana este realizată dintr-un material cu indice de refracție n. Pena ar trebui să

fie poziționată la o distanță de 2f de lentilă, unde este distanța focală a lentilei. Utilizați aproximarea parabolică pentru fronturile de undă sferice.

29. Considerăm situația prezentată în fig. 7.43 cu iluminare printr-o undă plană de lungime de undă λ. Fie obiectul o lentilă subțire cu lungime focală/' și rază a. În cazul în care putem neglija dimensiunea diafragmei lentilei de imagistică din Fig. 7.43 (din cauza dimensiunii sale mari), calculați intensitatea și faza câmpului optic în planul imaginii în funcție de poziția în acel plan.

30. Determinați modificările care trebuie făcute în teoria difracției formării imaginii în aproximarea parabolică dacă lentila este mai degrabă cilindrică decât sferică. Este posibil să se recupereze rezultatul lentilei sferice cu două Ienses cilindrice diferite ale căror axe sunt perpendiculare?

31. În experimentul de iluminare a rețelei prezentat în Fig. 7.48, găsiți distribuția densității fluxului în planul focal al lentilei atunci când obiectul este similar cu rețeaua obișnuită din Fig. 7.47, cu excepția faptului că „cutiile” au fost centrate pe multipli impari de + a lipsesc. Acesta este un grătar infinit cu funcții de cutie centrate pe 0, + 2a, ±4a..., fiecare cutie având lățimea a/2.

4 τ(x)

Rg. 7,79

32. Experimentul de iluminare a grătarului ilustrat în / Ж Fig. 7.48 este repetat cu o funcție de transmisie la obiectul ,s dată de forma de undă infinită din dinți de ferăstrău, Fig.

7,79. Găsiți expresia pentru densitatea fluxului în obiectul '. Determinați locația și dimensiunea unui filtru spațial

care va permite trecerea ordinului zero și a primelor două puncte de ordine diferită de zero din model, așa cum se arată în Fig. 7.48. Calculați distribuția spațială a densității fluxului în imaginea rezultată.

33. O diapozitivă de fotografie este folosită ca obiect într-un sistem care este iluminat de o undă plană incidentă în mod normal cu lungimea de undă λ. Un Iens este folosit pentru a produce o imagine, așa cum se arată în Fig. 7.43. Câmpul electric optic este modulat de funcția de transmisie a obiectului astfel încât să poarte forma funcțională

$$E(x) = E_0 \cos^2(2\pi u_0 x)$$

Nu există nicio variație în direcția y. Găsiți distribuția câmpului în planul focal al lentilei. Proiectați un filtru spațial care va modifica câmpul electric optic astfel încât să rezulte o densitate a fluxului în imagine care este dată de S' (χ') = .S0sin4 (2mι0x7m).

34. Luați în considerare obiectul (o transparență) care este definit de suma acestor două funcții:

— b/2 < x < b/2’

In caz contrar

∏τb | cos(20πx/i>),

^(ɪ) = <θ

-b/2≤x≤b/2

In caz contrar

l⅞l « | τfl |

Dacă această sumă este reprezentarea intensității câmpului electric din obiect, proiectați un filtru spațial care va produce o imagine care este o redare mai bună a părții „cutie” a obiectului. (Filtrul ar trebui să elimine funcția cosinus cu o distorsiune cât mai mică a funcției casetei

posibil.) Să presupunem că iensele din sistemul dumneavoastră au deschideri infinite.

35. Descrieți cum ar putea fi folosit un „calculator optic” pentru a identifica toate „a” dintr-un paragraf de text.

36. Determinați cantitativ forma funcției de transmisie a unui strat care, aplicat pe o lentilă, ar elimina inelele Airy din imaginea unei surse punctuale, lăsând doar punctul central.

37. Demonstrați că o cavitate laser poate menține un mod transversal care are următoarea dependență

. . ,,, x'w0

E(x',V;z) = He-23'^

___________f•r^• ɩcrf2I X exp 2- - i —— - ikz + i2</>(z)
_[w(z)]22K(z)J

Acesta se numește modul TEM10. Se caracterizează prin doi lobi de fază opusa de fiecare parte a planului yz.

38. Luați în considerare cavitatea laser semisimetrică proiectată să funcționeze cu lungimea de undă de 524,5 nm. Lungimea sa este de 2,3 m, iar raza oglinzii este de 5 m. Determinați raza fasciculului în mijlocul cavității. Dacă oglinda plană este oglinda de ieșire, găsiți raza fasciculului la o distanță de 5 m în afara cavității.

39. Un laser cu heliu-neon (lungime de undă 632,8 nm) are o divergență a fasciculului de 1 mrad și un diametru al fasciculului de 0,81 mm la oglinda de ieșire a cavității sale simetrice. Proiectați un

expansor de fascicul care va produce un nou fascicul cu un diametru care nu scade sub 1 cm pe o lungime de 2 m.

40. O cavitate semisimetrică este proiectată să funcționeze la 632,8 nm. Oglinda sferică are o rază de 1 m. Oglinda plană se află la 0,75 m de oglinda sferică și este proiectată pentru a fi oglinda de ieșire. Găsiți dimensiunea fasciculului și divergența la ieșire. Care va fi dimensiunea spotului pe oglinda sferică din cavitate?

41. În tehnica Schlieren pentru examinarea fazei unui obiect, un filtru spațial este introdus într-un sistem de imagistică similar cu Fig. 7.43, astfel încât jumătate din planul focal să fie străbătută. Adică funcția de filtru este

rʃ(u, υ) =

T,

0,

и > 0̃I w ≤ Oj

Probleme 505

Cu un obiect de forma dată de Ec. (7.180) (variații mici de fază într-un obiect transparent, așa cum ar fi de așteptat de la variațiile de densitate ale modelelor de aer într-un tunel de vânt), descrieți Caracteristicile imaginii.

42. Se folosește un obiectiv cu imersie în ulei cu iluminare coerentă la 500 nm. Dacă deschiderea numerică este 1,2, găsiți dimensiunea minimă a unui obiect care poate fi rezolvată. Comparați acest lucru cu rezoluția pentru iluminare incoerentă.

43. Arătați că o fotografie negativă a unei holograme realizată cu unitatea Hiagnification va oferi aceeași imagine observabilă ca și holograma originală.

44. Să presupunem că o hologramă este realizată folosind Iight de lungime de undă λ cu o distanță de referință sursă-hologramă Dr. O fotografie copy este făcută acum la Tnagnification m. copy este apoi utilizat cu o sursă de reconstrucție cu lungimea de undă $\lambda' = m\lambda$, același unghi și distanța Ds –

mDr. Să se arate că se formează o imagine virtuală perfect reconstruită care este amplificată în toate dimensiunile de un factor m.

45. O anumită hologramă este proiectată astfel încât fasciculele de referință și de reconstrucție să facă un unghi de aproximativ 45° cu placa de hologramă. Obiectul și imaginea reconstruită sunt într-o direcție aproximativ normală cu planul hologramei. Care este rezoluția necesară a plăcii de hologramă dacă pentru a realiza holograma se folosește o lumină laser de 633 nm de lungime de undă? Explicați de ce nu se observă nicio „imagine falsă” în acest caz.

46. Descrieți natura imaginilor reconstruite atunci când o hologramă este expusă ca în Fig. 7.73, dar reconstruită ca în Fig. 7.74 și invers. Presupunem $\lambda = \lambda'$.

47. Arătați că cu un obiect punctual la P1 și o sursă de referință punctuală la Pr, modelul marginilor de pe hologramă se obține ca intersecție în planul său a unei familii de hiperpoloide de revoluție având ca focare P1 și Pr.

8 Coerență

În capitolele anterioare ale acestui cârlig ne-am ocupat de lumină monocromatică care era perfect coerentă. Adică, diferențele de fază între fasciculele componente în interferență sau undelele contributive ale lui Huygens în difracție au rămas constante în timpul măsurării. În practică, coerența perfectă nu este niciodată posibilă. Orice sursă reală va fi doar parțial coerentă. Aceasta este legată de o lățime de bandă finită în jurul frecvenței optice medii a sursei. În plus, pentru orice sursă extinsă (chiar dacă este monocromatică) ale cărei părți componente nu sunt în fază perfectă între ele, câmpul optic radiat va afișa un grad de incoerență din cauza suprapunerii în funcție de timp a câmpurilor din fiecare componentă.

Aceste efecte sunt legate între ele. Prima este clasificată ca incoerență temporală, a doua este incoerență spațială. Ne ocupăm de ei separat în cea mai mare parte; totuși, ambele implică timpul în care părțile componente ale unui câmp optic rezultat mențin relații de fază bine definite.

Notația noastră din acest capitol diferă ușor de cea folosită în alte părți ale cărții. Câmpurile din acest capitol sunt, dacă nu se specifică altfel, reale, în timp ce în restul cărții folosim câmpuri complexe pentru a reprezenta perturbația optică reală și apoi luăm partea reală a câmpului complex atunci când este necesar. aici, în loc să folosim notația exponențială pentru a descrie fazele câmpurilor optice, folosim formalismul cosinus. În acest fel evităm complicaţii în mediile temporale, care implică producţia câmpurilor.

Ô.1 Coerenţa temporală

În experimentul cu dublă fantă al lui Young, două fascicule de lumină obținute de la sursa originală sunt reunite după ce s-au împărțit și au parcurs diferite lungimi de cale optică. Un rezultat similar este obținut în interferometrul Michelson. În

în orice caz, dacă este prezentă o frecvență bine definită, observăm franjuri regulate de interferență în funcție de diferența de cale optică. Dacă există mai mult de o frecvență, trebuie să adăugăm densitatea de flux care ar fi produsă de fiecare acționând separat. Apoi, dacă, de exemplu, densitatea totală a fluxului este împărțită în mod egal între două frecvențe, vedem un model de ritm care variază într-un mod periodic regulat de la franjuri de contrast maxim la

franjuri de contrast zero. Vom arăta că, în general, modelul marginal observat este determinat în mod unic de distribuția densității fluxului între diferitele frecvențe componente și vom descrie metoda de recuperare a spectrului din modelul de interferență.

A. Introducere în coerența temporală

1. Ipoteza fundamentală. Faptul de bază care ne simplifică considerațiile este că, în circumstanțe obișnuite, semnalele luminoase de frecvență diferită nu interferează. Problema interferenței versus noninterferenței poate fi clarificată prin examinarea celui mai simplu caz posibil. Luați în considerare un semnal optic fictiv care este suprapunerea a două Componente monocromatice pure:

$E = E_i + E_j$

$E_i = A_i \cos(2\pi v1 \bullet t + \varphi_i) = A_i \cos \varphi_i$

$E_j = A_j \cos(2\pi v_j t + \varphi_j) = A_j \cos \varphi_j$

Aici Ai, Aj, φi și φj sunt constante. Presupunem că densitatea de flux determinată experimental la momentul t0 este media densității fluxului instantaneu pe intervalul de la r0 - T/2 la t0 + T/2, unde T este „timpul de măsurare”. Densitatea fluxului instantaneu este o constantă ori E2. Luăm media, ca înainte

1 i'to + T/2

<E2> = -

E2(t) dt

ɪo - T/2

Obținem astfel

<E2> = <E?> + <E2> + 2<EiEj>

= M2 + M2 + AiA j< cos φi cos φjy (8.1)

Factorii de 1/2 corn din luarea mediilor cos2φi și cos20j, așa cum sa discutat în capitolele 1 și 5. Dacă trebuie să existe vreo interferență, aceasta trebuie să provină din al treilea termen. Folosind o identitate trigonometrică, rescriem acel termen ca

2AiAj•<cos φi cos φj) = AiAj(cos(φi - φj)) ÷ AiA/cos(0i + 0.)> Pentru frecvențele optice,

$\cos(0i + \varphi_j) = \cos[2\pi(v_i + v_j)t + \varphi_i + \varphi_j]$

oscilează de aproximativ 1015 ori pe secundă și are o medie la zero, indiferent cât de scurt

timpul de măsurare T este. Termenul de diferență

$\cos(\neq i - \varphi j) = \cos[2\pi(vi - vj)t + \varphi i - \varphi j\bullet]$

De obicei, oscilează de multe ori în timpul unei măsurători, deoarece de obicei avem (vi – vj)T> 1. Termenul de interferență este atunci zero.

2. Lumină monocromatică și cvasimonocromatică Câmpul electric dintr-o sursă cu adevărat monocromatică ar fi sinusoidal și ar avea o amplitudine A și fază cp constante:

$E(f) = A \cos(2\pi vt + \varphi)$

(8,2)

Sursele reale nu sunt cu adevărat monocromatice. Ieșirea lor poate fi reprezentată ca o suprapunere de termeni ca Ec. (8.2). Este necesară o distribuție continuă a frecvențelor pentru a descrie această suprapunere din punct de vedere matematic.

i' ∞

$A(y) \cos[2\pi vt + \varphi(v)]\, dv$

o

(8.3a)

Aici A(v) dv este amplitudinea câmpului într-o bandă de frecvențe de la v la v + dv. Л(v) este o funcție continuă numită amplitudinea câmpului spectral.

Dacă frecvențele v implicate în această suprapunere sunt concentrate în jurul unei anumite frecvențe v0, Iight se numește cvasimonocromatic. Apoi devine posibil să scrieți câmpul optic în formular

$E(t) = A(t) \cos[2\pi v0t + \varphi(t)]$

(8.3b)

unde A(t) și φ(t) sunt funcții care variază lent în comparație cu cos 2πv0t. Adică, ele se modifică doar ușor în timpul unei perioade l/v0.

O mărime experimentală importantă este funcția de distribuție a frecvenței sau spectrul care poate fi determinat prin spectroscopie. Prin urmare, trebuie să examinăm un experiment de spectroscopie idealizat.

3. Spectrometre și funcții spectrale. Fără interferență între câmpuri cu frecvențe diferite, două surse optice independente vor contribui separat la fluxul măsurat. Pătratele câmpurilor electrice individuale se adună pur și simplu

$\langle E2\rangle = \langle E2\rangle + \langle E2\rangle$

Pentru a generaliza, spunem că atunci când frecvențele vi, vj, vk,... sunt prezente în fasciculul măsurat, densitatea fluxului va fi proporțională cu

<e2> = <e2> + <e2> + <e2> + •••

Aceasta înseamnă

$S0 = Si + S j + Sk + \cdot \cdot \cdot$ (8.4)

unde Si este fluxul care ar fi detectat dacă numai frecvența vi ar fi prezentă în

fascicul și S0 este densitatea totală a fluxului la toate frecvențele. Deoarece sursele reale au o distribuție continuă a frecvenței, trebuie să generalizăm Ec. (8.4) în continuare

S(v) dv

(8-5)

Aici S(y) dv poate fi interpretat ca cantitatea de densitate a fluxului optic în intervalul de frecvență de la v la v + dv. Aici S(v) se numește densitatea fluxului spectral. Poate fi măsurată prin trecerea fasciculului printr-un spectrometru ideal. Acesta poate fi definit ca un instrument care trece toată lumina în intervalul de frecvență v la v + Δv și nimeni altcineva. Dacă Δv este suficient de mic, aceasta va aproxima S(v) dv.

Spectrometrele de tip obișnuit funcționează deoarece conțin un element, cum ar fi o prismă, pentru a dispersa Iight Spațial în funcție de frecvența sa. O prismă însoțește acest lucru deoarece indicele de refracție și unghiul de deviație depind de frecvență - în mod normal, frecvențele mai mari sunt deviate mai mult decât frecvențele inferioare. Acest lucru este ilustrat în Fig. 8.1. Dacă lățimile fantelor sunt mici, ieșirea va fi proporțională cu S,(v) (cu excepția complicațiilor din cauza puterii de rezoluție limitate de difracție, pe care acum le ignorăm). De asemenea, pot fi utilizate grătare sau alte dispozitive pentru a obține dispersia dorită. În situații reale, eficiența instrumentului,

Fig. 8.1 Spectrometru cu prismă de scanare. Partea instrumentului dintre sursă și detector este monocromatorul. Spectrul este mutat prin fanta de ieșire prin mișcarea oglinzii, care se numește oglindă Wadsworth.

inclusiv cea a detectorului, trebuie cunoscută dacă se dorește obținerea unei măsuri absolute a lui S(v). De cele mai multe ori suntem dispuși să ne mulțumim cu o măsurare relativă a S(v). Acesta va fi descris de funcția de distribuție spectrală normalizată P(v)

(având unități de v 1) P(v) = ~(8.6) ɔo

Această funcție este normalizată la unitate:

(8,7)

Tipurile de curbe ale lui S(v) de așteptat sunt indicate în Fig. 8.2.

Metoda tradițională de măsurare a S(v) este cea care tocmai am discutat. Se folosește o prismă sau un grătar pentru a dispersa lumina în funcție de v. Semnalul produs atunci când lumina dispersată ajunge la un detector este apoi înregistrat electric. O altă metodă, cea a spectroscopiei de interferență, determină S(v) din franjele produse într-un interferometru Michelson sau un instrument similar. În practică această metodă

(d)

Fig. β.2 Densitatea fluxului spectral pentru mai multe tipuri de surse: (a) sursă monocromatică ideală; (b) sursă cvasimonocromatică; (c) sursă idealizată cu două frecvențe; (d) sursă reală cu două frecvențe; (e) distribuția frecvenței în bandă largă ca de la o sursă termică (Wackbody).

sa dovedit deosebit de valoroasă în regiunea infraroșu îndepărtat a spectrului, dar au existat și aplicații specializate în infraroșu vizibil și apropiat. Spectroscopia de interferență formează, de asemenea, o bază ideală pentru o discuție despre coerența temporală.

B. Spectroscopie de interferență

\

Un spectrometru de interferență este un interferometru Twyman-Green (Fig. 5.33). Acesta este un interferometru Michelson modificat pentru a utiliza lumina colimată. Ecuația (5.69) furnizează schimbarea de fază pentru Iight a unei lungimi de undă A1 sau frecvență v1• reflectată de cele două oglinzi.

<5 =

4π d ʌ /2d

—— – 2πv.• – λi \ c

Aici d este separarea efectivă de-a lungul căii optice a oglinzii I2 de oglinda I1. Dacă o singură frecvență vi este prezentă la sursă și divizorul de fascicul împarte în mod egal fasciculul incident, atunci pentru densitatea de flux medie în timp la detector din Eq. (5.25a) putem scrie

S = Si[l + cos <5]

(8,8)

unde Si este suma densității fluxului de la ambele fascicule. Este convenabil să exprimați schimbarea de fază în unități de timp. Deci definim

$2d\ \tau \equiv -\ c$

(8-9)

care reprezintă timpul de întârziere suferit de fasciculul din brațul 2 al interferometrului față de fasciculul din brațul 1.

Ecuația (8.8) poate fi apoi scrisă

$S(\tau) = Si[l + \cos(2\pi v,\bullet\tau)]$ (8.10)

Când este considerat în funcție de τ, S constă dintr-un termen mediu Si plus un termen oscilator

$Sosc = si \cos(2\pi v\tau)$

care este în medie la zero pe măsură ce τ este variat. Termenul oscilator poate fi normalizat prin împărțirea la Si pentru a obține o cantitate importantă

c

$7(\tau)=f$ (8,11)

Pentru exemplul de față,

$y(\tau) = \cos(2\pi vi\tau)$

(8,12)

vârf infinit având aria unitară la v = vi; adică P(v) este o funcție delta.

$P(v) = <5(v - vi)$ (8,13)

Densitatea fluxului spectral este simplu

$S(v)-SiP(v)$ (8,14)

Funcțiile S(v), P(v), S(τ) și y(τ) sunt schițate în Fig. 8.3.

1. Sursă cu două frecvențe. Să considerăm o sursă care emite Iight de două frecvențe, vi și Vj având densitățile totale de flux Si și Sj. După ce un fascicul de la această sursă este trecut prin interferometru, densitatea de flux detectată va fi suma efectelor de interferență rezultate din fiecare frecvență separat.

$S(\tau) = Si[l + \cos(2\pi vi\tau)] + Sj\bullet[l + \cos(2\pi vj\bullet\tau)]$ (8.15)

Din nou, aceasta constă dintr-o sumă independentă de τ

$S0 = Si + Sj$ (8,16)

plus un termen oscilator

$Sosc(\tau) = Si \cos(2\pi vi\tau) + Sj \cos(2\pi vj\tau)$

care poate fi scris

$Sosc(\tau) = S0\gamma(\tau)$

(8.17a)

furnizate

$y(\tau) = /i. \cos(2\pi vi\tau) + (1- /i) \cos(2\pi v7-\tau)$

(8.17b)

cu

fracțiunea densității fluxului total la vi și (1 — Д) fracțiunea densității fluxului la vj.

Densitatea fluxului la un detector are aceeași formă găsită pentru cazul cu o singură frecvență, și anume:

$S(\tau) = S0[l + \gamma(\tau)]$

(8,18)

dar cu $\gamma(\tau)$ dat acum de Ec. (8.17b).

Pentru acest caz, funcția de distribuție spectrală normalizată este o sumă a două funcții delta

P(v) = /ιi0(y - vi) + (1 - /i) <5(v - vj•)

(8,19)

iar densitatea fluxului spectral este stili $S(v) = S0\ P(v)$.

O comparație a Eq. (8.17b) cu (8.19) arată că termenii cosinus și funcțiile delta au aceiași coeficienți.

Figura 8.4α prezintă comportamentul funcțiilor relevante pentru cazul /ιi = 1/2; Fig. 8.4h arată ce se întâmplă când fιi ≠ 1/2. $V(\tau)$ prezentată de asemenea în aceste figuri este o măsură cantitativă a contrastului marginilor și va fi discutată mai târziu.

Dacă s-ar întâmpla ceva care să distrugă interferența - de exemplu, o aliniere greșită a uneia dintre oglinzile interferometrului - nu ar exista franjuri, γ ar fi zero, iar fluxul detectorului $S(\tau)$ ar fi pur și simplu o constantă S0. Atunci nu învățăm nimic despre natura luminii

din fasciculul originar. Astfel, funcția $\gamma(\tau)$ este cea care conține cu adevărat informațiile utile în acest experiment.

„Bătăile” din Fig. 8.4 se realizează prin întărirea alternativă sau înclinarea celor doi termeni cosinus la frecvențe diferite. Întărirea are loc ori de câte ori | v7• — vi | τ este un întreg par; atunci pentru o gamă limitată de τ ambele cosinusuri oscilează împreună între +1, dând ay care, de asemenea, oscilează între +1. Anularea are loc ori de câte ori | vj•- vi | τ este un număr întreg impar și este completă dacă fιi = 1/2; În caz contrar, franjuri sunt încă prezente, dar cu rezistență redusă.

Franjurile de interferență din Fig. 8.3 și 8.4 continuă periodic pentru toate valorile timpului de întârziere τ. Acest comportament este ireal și este o proprietate a naturii discrete a funcțiilor de distribuție pe care le-am folosit până acum.

2. Caz general, Frecvențe multiple. În cazul general, densitatea fluxului spectral va fi descrisă printr-o funcție continuă S(v) de tipul prezentat în Fig. 8,2 h, d sau e. Suma din Ec. (8.15) se generalizează apoi la o integrai

$$S(\tau) = S(v)[l + \cos(2\pi v\tau)]\, dv$$

(8,20)

Din nou, acest rezultat constă dintr-un termen constant

$$S0 = f\, S(v)\, dv$$

Jo

plus un termen oscilator

Í'00

$$S(v) \cos(2\pi v\tau)\, ds$$

o

[Rețineți că S(v) dv are aceleași unități ca și S(τ).]

Putem rescrie din nou Ec. (8.20) sub forma Eq. (8,18)

$$S(\tau) = S0[l + \gamma(\tau)J$$

furnizate

(8,21)

$$\gamma(\tau) = P(v) \cos(2\pi v\tau)\, dv$$

Jo 4

este termenul oscilator normalizat și unde P(v) este definit de Ec. (8,6),

S(v) P(v) = v2 ðo

Referiți-vă înapoi la Ec. (6.82), unde a fost introdusă transformata Fourier reală. Acolo am derivat

/(x) = f Fc(u) cos(2πux) du + Fs(u) sin(2πwx) du

Jo Jo-

unde Fc(u) și Fs(u) sunt transformările Fourier cosinus și sinus, respectiv, ale lui f(x). Când f (x) este o funcție pară a lui x, atunci Fs(u) = 0. Aceasta ne lasă exact aceeași formă ca Ec. (8.21). Prin urmare, cu $x \to \tau, u \to v, f \to \gamma$ și $F_c \to P$, vedem că P(v) este transformata Fourier cosinus a lui y(τ). Putem recupera P(v) din cunoașterea experimentală a lui γ(τ) luând transformarea inversă a lui γ(τ).

Conform Eq. (6.81a)

P(v) — 2 Γ γ(τ) cos(2πvτ) dτ

J — ∞

= 4 I γ(τ) cos(2πvτ) dτ (8.22)

Jo

Inversarea este de obicei efectuată de un computer. Există o valoare maximă a lui r dată de τmax = 2 dmax/c, iar aceasta introduce câteva complicații care vor fi discutate mai târziu într-una dintre probleme.

C. Proprietățile lui γ(τ)

1. Limite. Din ecuația sa definitorie (8.21) vedem că γ(τ) este întotdeauna unitate la T = O. Deoarece P(v) este nenegativ, dacă îl înmulțim cu cos(2πvτ) și integrăm, nu putem obține niciodată un rezultat mai mare în mărime decât valoarea obţinută la r = 0. Astfel

$|\gamma(\tau)| \leq 1$ pentru toți τ

7(0) = 1

(8,23)

2. Suprapunerea. Deoarece γ(τ) este dat ca o transformare integrală a lui P(v) și deoarece integrala unei sume este suma integralelor, o funcție de distribuție spectrală normalizată P(v) care este o suprapunere a funcțiilor de distribuție individuale va avea o

γ(τ) care este o suprapunere similară. Lăsa

$P(V) = \sum CjPlM$ (8,24)

J

unde fiecare dintre $Pj(v)$ este normalizat la unitate și unde

$\sum Cj = 1$ (8,25)

J

Atunci dacă $\gamma(\tau)$ este termenul oscilator normalizat pentru $P(v)$ și $\gamma j(\tau)$ este acela pentru $Pj(y)$, avem

$y(\tau) = \sum Cj\gamma j(\tau)$

(8,26)

3. $\gamma(\tau)$ pentru lumina cvasimonocromatică Pentru lumina cvasimonocromatică, funcția de distribuție spectrală are vârful în jurul $v - v0$ și tinde la zero destul de rapid, deoarece v pleacă mult din vecinătatea lui $v0$. Dacă Δv este o măsură a intervalului de valori nenule ale lui P, adică de la $V0 - Av/2$ la $v + \Delta v/2$, atunci trebuie să avem Δv $v0$. Este util să scrieți P sub forma

$P(v) = D(v - v0)$ (8,27)

unde $D(\mu)$ este mic cu excepția $-Av/2 < \mu < \Delta v/2$. Normalizarea lui P dă atunci

$P(v)\ dv =$

$D(\mu)\ du$

$D(\mu)\ d\mu$

(8,28)

Atunci pentru γ obținem

Í' 00   Λ 00

$P(v) \cos(2\pi v\tau)\ dv = D(y - v0) \cos(2\pi v\tau)\ dv$

o   Jo

Fie $\mu = v - v0$. Atunci avem aproximativ

Í00

$D(\mu) \cos[2\pi(v0 + \mu)\tau]\ d\mu$

-VO

$P(\mu) \cos[2\pi(v0 + \mu)\tau]$

dm

$= \cos(2\pi\nu_0\tau)$

, 00

f>(μ) cos(2μm) dμ

Í00

D(μ) sin(2μm) dμ

– 00

(8,29)

Definim functiile Dc(τ) si Ps(τ):

Dc(τ) =

* 00

D(μ) cos(2μm) dμ

Í00

D(μ) sin(2μm) dμ

– 00

(8.30a)

(8.30b)

[Rețineți că Dc(O) = 1, Ds(O) = 0.] Atunci putem scrie

$y(\tau) = D_c(\tau)\cos(2\tau\nu_0\tau) + D_s(\tau)\sin(2\pi\nu_0\tau)$ (8.31)

Acest rezultat poate fi scris și în formular

$\gamma(\tau) – U(\tau)\cos[2\pi\nu_0\tau + \Phi(\tau)]$ (8,32)

$(7(\tau)\cos\Phi(\tau) – D_c(\tau)$ ` (8.33a)

$– U(\tau)\sin\Phi(\tau) = D_s(\tau)$ (8.33b)

$U(\tau) = + \sqrt{D_c(\tau)^2 + D_s(\tau)^2}$ (8.33c)

Deoarece conform Eq. (8.23) $|\gamma(\tau)| \leq 1$, avem întotdeauna

$0 \leq I7(\tau) \leq 1$ (8,34)

Funcțiile Dc, Ds, U și Φ se compară încet cu $\cos(2\pi\nu_0\tau)$ sau $\sin(2\pi\nu_0\tau)$. Este greu de oferit o justificare generală pentru această remarcă, care este atât riguroasă, cât și simplă. Ideea de bază este că oscilațiile rapide în Dc sau Ds ar necesita ca acestea să fie suprapuneri de componente cosinus sau sinus care oscilează rapid. Dar deoarece D(μ) este limitat la un interval de $+ \Delta\nu/2$ care este mult mai mic decât ν_0, Dc și Ds rezultate nu pot oscila la fel de rapid ca $\cos(2\pi\nu_0\tau)$ sau $\sin(2\pi\nu_0\tau)$.

Din γ(τ) putem calcula funcția de distribuție spectrală normalizată folosind Eq. (8.22).

J1 00

Dc(τ) cos(2πv0 τ) cos(2πvτ) dτ o

Í' oo

Ds(τ) sin(2πv0τ) cos(2πvτ) dτ o

= 2

Dc(τ) cos[2π(v + v0)τ] dτ

Dc(τ) cos[2π(v – v0)τ] dτ

f*

+ 2 Ds(τ) sin[2π(v + v0)τ] dτ Jo

Í' QO

Ds(τ) sin[2π(v – v0)τ] dτ

o

sau

J1 00

Dc(τ) cos[2πμτ] dτ o

– 2

o

Ds(τ) sin[2πμτ] dr

(8,35)

unde ultimul pas decurge din variația rapidă a funcțiilor sinusoidale în primul și al treilea termen al ecuației anterioare.

4. Spectrul cvasimonocromatic simetric. Pentru Iight cvasimonocromatic cu o funcție de distribuție spectrală P(y) care este simetrică față de v – v0, avem D(μ) = D(- μ). Acum sin(2πμτ) este o funcție impară a lui μ, iar produsul dintre o funcție impară și o funcție pară este o funcție impară. Aceasta înseamnă că contribuția la integrală

D(μ) sin(2πμτ) dμ

din valorile pozitive ale lui μ va anula pe cea din valorile negative ale lui μ, dând Ds(τ) – 0. Atunci avem pur și simplu

$y(\tau) = Dc(\tau) \cos(2\pi v0\tau)$

Exemple de funcții de distribuție spectrală și D sunt prezentate pentru cazuri simetrice și asimetrice în Fig. 8.5. Astfel, D(μ) este pur și simplu P(v) centrat pe frecvența zero.

5. Contrastul. Intensitatea măsurată este dată de

S(τ) = S0El + T(T)J

Pentru Iight cvasimonocromatic cu γ dat de Ec. (8.32) aceasta devine

$S(\tau) = S0[l + U(\tau) \cos[2\pi v0\tau + \Phi(\tau)]]$ (8,36)

care trebuie comparat cu Eq. (8.10), rezultatul pentru sursa idealistă, dar de nerealizat pur monocromatic. Vor exista oscilații ale lui y între Iimits + (7(τ) și, deoarece U variază lent în comparație cu aceste oscilații, le putem considera a fi „franjuri” bine definite. În modelul de franjuri, intensitatea variază între maxim de

S(τ)max = S0[l + i/(τ)] (8.37a)

^P(v)∫tl
0 VO

D(μ)

'P(v) /i Asimetric
J κ>
0 10

Fig. β.5

Asimetric

iar minimul adiacent de

S(τ)min = S0El - BД]

Vizibilitatea V(τ) a modelului este definită de

w λ — ^(τ) max S(τ)min

w ^ S(τ)max + S(T)min v

În acest caz, ecuațiile (8.37) și (8.38) rezultă atunci pur și simplu

F(T) = L/(t)

(8.37b)

(8,38)

(8,39)

6. $\gamma(\tau)$ pentru o sursă cu două frecvențe. Pentru două Iines monocromatice la frecvențele Vi și Vj, Eq. (8.17b) ne dă pentru y(τ):

$\gamma(\tau)$ = /i cos(2πviτ) + (1 – /i) cos(2πyiτ)

Acum să presupunem că vi > vj și scrieți

Δv

v, = v0 + y

Δv

Vj = v0-y

unde v0 este media l/2(vi + vj•) și Δv este diferența,

Δv = vi – vj

Obținem apoi cu ușurință

$\gamma(\tau)$ – cos(πΔvτ) cos(2πv0τ) – (2Д; – 1) sin(πΔvτ) sin(2πv0τ)

= L/(τ) cos[2πv0τ + Φ(τ)J (8,40)

cu

L7(τ) = + √1 – 4/i(l – /i) sin2(πΔvτ) (8.41)

iar Φ(τ) se poate obţine din

L/(τ) cos Φ(τ) = cos(πΔvτ) (8.42a)

L7(τ) sin Φ(τ) = (2^i – 1) sin(πΔvτ) (8.42b)

Pentru Δv < v0, Eq. (8.40) oferă un model de ritm care variază lent, reprezentat în Fig. 8.4α pentru fa – 1/2 și în Fig. 8.4b pentru fa ≠ 1/2. Vizibilitatea F(τ) = L/(τ) dată de Ec. (8.41) este, de asemenea, reprezentat grafic în Fig. 8.4. Vizibilitatea se modifică periodic de la Fmax = 1 tɑ Fmin = |1- 2/i | .

7. $\gamma(\tau)$ pentru o sursă de distribuție gaussiană. Când interferometrul Michelson este utilizat cu orice semnal optic real, există un interval finit de timp de întârziere $\tau = 2d/c$ peste care pot fi observate franjuri de interferență. În cele din urmă, maxima în the

Interferența se întinde de la o frecvență între minimele de la o altă frecvență, iar funcția oscilativă normalizată ajunge la zero.

Acest efect va fi ilustrat printr-un exemplu specific. Să presupunem o lumină cvasimonocromatică cu o funcție de distribuție spectrală sub forma unui gaussian

$P(v) = D(v - v_0) = ɪ \exp$

Av

(8,43)

sau

n, ∧ 1 Γ fp \ 2

2>⅛) = -e4^-^-χ

cu

$\mu = V - v_0$

Parametrul Av Caracterizează lățimea liniei deoarece P(v) scade la 1/e din valoarea sa maximă atunci când $v = v_0 + \Delta v/\chi/\pi$. Pentru ca lumina să fie cvasimonocromatică este necesar ca $v/\Delta v > 1$. Când această condiție este îndeplinită, integrais peste v pozitiv poate fi extins la v negativ fără risc.

Deoarece funcția $D(\mu)$ este simetrică față de $\mu = 0$ în acest caz, Ec. (8.35) este valabil, iar termenul oscilator normalizat care descrie modelul de interferență este

$y(\tau) = D_c(\tau) \cos(2\pi v_0 \tau)$

unde $D_c(\tau)$ este dat de Ec. (8.30a):

Dc(τ) — f D(μ) cos(2πμτ) dμ = Re< f D(μ)el2πμτ dμ \

J — 00   VJ - ∞J

= Re{J≡r-1[D(μ)]}   (8,44)

Am întâlnit deja transformata Fourier și transformata inversă a unui Gaussian. Aceste relații sunt documentate în Tabelul 6.2. Cu $x \to \tau, u \to \mu$ și $b \to Av$ găsim transformarea inversă a lui $D(\mu)$

<^~1[D(μ)] = $\exp[-\pi(\Delta v\tau)2]$ (8,45)

și

$y(\tau) = \exp[-\pi(\Delta v\tau)2] \cos(2\pi v_0 \tau)$ (8,46)

Comportamentul lui $D(\mu)$ și $\gamma(\tau)$ pentru acest caz este schițat în Fig. 8.6. Rețineți că anvelopa $\exp[-\pi(\Delta v\tau)2]$ variază lent în comparație cu factorul cosinus, deoarece Av este mult mai mic decât v_0. Pentru valori mici ale lui τ(comparativ cu l/Av) avem aproximativ

$\gamma(\tau) \approx \cos(2\pi v_0 \tau)$ (8-47)

Acesta, desigur, este doar rezultatul cu o singură frecvență al Eq. (8.12). Pentru a vedea efectele extinderii finite Av în distribuția spectrală, trebuie să folosim timpii de întârziere τ

(b)

Fig. β.6 Termen oscilator normalizat (a) și distribuție spectrală Funcția (b) pentru o linie cvasimonocromatică cu formă gaussiană.

de ordinul lui l/Δv, căci atunci anvelopa este semnificativ redusă – în acest caz cu factorul 1/e.

Putem folosi aceasta pentru a defini timpul de coerență τc pentru acest exemplu

1

τ'≈Δ^

(8,48)

Relația (8.48) este una generală care leagă timpul de coerență și răspândirea frecvenței și va fi discutată mai pe larg mai târziu.

Ô.2 Optica Stotistică

La sfârșitul secțiunii 8.1 am luat în considerare un exemplu specific de funcție de distribuție spectrală a continuilor pentru lumină cvasimonocromatică și am arătat prin calcul explicit că contribuția frecvențelor varionilor la modelul franjelor de interferență a provocat în cele din urmă o scădere a părții oscilatorii a modelului. Acest lucru a avut loc atunci când timpul de întârziere τ a fost comparabil cu reciproca lățimii distribuției de frecvență. Această lipsă de contrast de franjuri este o proprietate generală a tuturor surselor de lumină adevărată, iar interpretarea ei ca o completare a franjelor dintr-o frecvență cu cele ale unei alte frecvențe este una perfect validă.

Există un alt mod de a privi nivelul de interferență într-un interferometru Michelson. În această a doua metodă luăm în considerare aspectele statistice ale dependenței de timp a semnalului Iight. Pentru lumina cvasimonocromatică, semnalul Iight poate fi scris sub forma Eq. (8,3):

$$E(t) = A(t) \cos[2\pi v0t + \varphi(t)]$$

Toate semnalele Luminoase au o natură aleatorie. Anumite proprietăți nu pot fi prezise exact, dar pot fi definite valori medii. Câmpurile reale cvasimonocromatice vor avea amplitudini A(t) și faze φ(t) care variază aleatoriu. Acest lucru este valabil și în alte regiuni ale spectrului electromagnetic. Desigur, A(t) nu este întotdeauna fluctuant-

oscilatoarele de radiofrecvență și unele lasere dau naștere la câmpuri cu amplitudini constante — dar faza fluctuează din cauza derivelor inevitabile ale oscilatorului însuși. Aceste derive, care sunt de obicei de origine termică, pot fi reduse prin scăderea temperaturii anumitor Componente ale sursei, dar în cele din urmă, pentru sistemele foarte stabile, aceste fluctuații vor fi un simptom al naturii cuantice fundamentale a Luminii și a materiei.

Deoarece faza φ{t) [și de obicei amplitudinea Λ(t)] nu este o funcție bine definită a timpului, ea trebuie descrisă prin proprietățile sale statistice. Luați în considerare, de exemplu, modificarea sa pătrată medie (fluctuația pătrată medie) după un interval de timp Δt, pe care îl scriem sub forma

$$<[\Delta\varphi(\Delta t)]2> = <[\varphi(t + \Delta t) - \varphi(t)]2> = <[\varphi(t) - \varphi(t - \Delta t)]2>$$

Media <...) este peste t pentru Δt fix. Pentru a menține prezenta discuție simplă, presupunem că media se schimbă în fază

$$<\Delta\varphi(\Delta t)> = <\varphi(t + \Delta t) - \varphi(t)>$$

este zero. Atunci fluctuațiile pozitive ale φ sunt la fel de probabile ca și fluctuațiile negative. Fie τc acea valoare a lui Δt care dă o fluctuație pătrată medie <Δφ2) de un radian.

Acum imaginați-vă că această lumină este folosită într-un interferometru Michelson. Lumina dintr-un braț este întârziată de intervalul de timp τ — 2d/c față de cel din celălalt braț. Dacă timpul de întârziere este aproape de τc așa cum tocmai a fost definit, va exista o diferență de fază pătrată medie de 1 radian între Iight din cele două brațe. Acest lucru va reduce substanțial interferența care poate fi observată atunci când cele două fascicule sunt reunite.

Elaborăm acum o descriere cantitativă a procesului tocmai menționat. Subiectul fluctuațiilor de fază pătrată medie este dezvoltat cantitativ în probleme.

A. Funcția de autocorelare

1. Derivare. Dacă intensitatea câmpului electric optic la detectorul care vine de la un braț este £(t), atunci cea de la celălalt braț este E(t — τ), și anume E la momentul anterior t — τ. Detectorul măsoară o densitate a fluxului optic proporțional cu media în timp a pătratului total și este

S(τ) oc <[E(t) + E(t - τ)]2> = <[E(t)]2> + <[£(t - τ)]2> + 2<E(f) E(t - τ)>

(8,49)

Mediile de timp sunt definite ca de obicei

ï pto-T/2

<[E(i)]2>≡φ   [E(0]2A(8-50)

1 Jto + T/2

Presupunem că este atât de mare încât integrala este independentă de t0• Acest lucru este echivalent cu a lua Iimit ca T→ oo.

Termenii <[E(t)J2> și <[£(t - τ)]2> sunt proporționali cu fluxul respectiv

densitățile primite în fasciculele de la fiecare braț și pentru o sursă constantă sunt fiecare proporționale cu So/2, unde S0 este densitatea totală de flux detectată dacă nu are loc interferența. Termenul 2<E(()E(i - τ)> conține toate efectele de interferență. Îl normalizăm împărțind la <[E(t)]2>

γ(τ) =

<E(t)E(t - τ)>

<<£(012>

(8,51)

Atunci noi avem

S(τ) = S0El + 7(τ)J

Această ultimă ecuație are aceeași formă ca Eq. (8.18) și este scris în mod deliberat folosind aceeași funcție y(τ). De fapt, cele două definiții ale lui γ(τ), Ec. (8.21) și (8.51), sunt echivalente. Când este scris sub forma Eq. (8.51), γ(τ) se numește funcția de autocorelare normalizată a câmpului E(t). Descrie corelația medie a lui E cu el însuși la un moment anterior. Am introdus deja funcția de autocorelare în formă abstractă în capitolul 6. Acolo ne-am ocupat de funcții complexe.

În multe tratamente de coerență parțială, se folosește semnalul analitic Ec(t). Aceasta este o funcție complexă a timpului care este tratată în același mod în care am folosit notația complexă în trecut, și anume

E(t) = Re{Ec(t)}

O funcție de autocorelare normalizată complexă poate fi apoi definită

<Ec(t)Ec*(t - τ)> _ Яг)

< | Ec(t) | 2>   y(0)

(8,52)

unde γ este integrarea de autocorelare a ecuației. (6.100). Funcția reai a Eq. (8.51) se poate dovedi a fi

y(τ) = Re{/(τ)} (8,53)

Pentru a demonstra acest lucru, scriem densitatea fluxului spectral în termeni de amplitudine a semnalului analitic la frecvența v

S(v) = K\ A(v)21   (8,54)

unde K este o constantă. A(v) este componenta Fourier a semnalului analitic.

Ec(t) =

A(v)ei2πv,

(8.55a)

A(v) =

Ec(t)e~2πvt dt =

(8.55b)

Ecuația (6.98) definește corelația

f(ɪ) =

E(t)E*(t - τ) dt

(8,56)

β.2 Optică statistică 525

Aceasta este legată de transformata Fourier a lui E prin teorema Weiner-Khintchine a ecuației. (6.102).

= | ^[Ec] | 2 = | X(v) | 2 = K~iS(v)

(8,57)

Prin urmare,

Tratăm frecvențele negative prin definirea S(v) = S(— v); apoi

S(v)ei2nvτ dv

P(y)ei2πvτ dv

(8,59)

Prin urmare

γ(τ) = Re{yc(τ)}

(8,60)

și noi am arătat că

(8,61)

2. $\gamma(\tau)$ pentru o sursă cvasimonocroniatică generală. Anterior, când ne conectăm la funcția de distribuție spectrală, am definit Iight cvasimonocromatic ca Iight având o funcție de distribuție atinsă la o anumită frecvență v0 și apoi am arătat că termenul de interferență oscilativă normalizată poate fi scris sub forma Eq. (8.31) sau (8.32).

$$\gamma(\tau) = D_c(\tau) \cos(2\pi v0\tau) + D_s(\tau) \sin(2\pi v0\tau) \quad \gamma(\tau) = U(\tau) \cos[2\pi v\tau + \Phi(\tau)]$$

Acum vrem să arătăm că aceleași rezultate urmează din noul nostru punct de vedere al Concentrarii pe semnalul statistic.

Începem cu

$$E(t) = \Lambda(t) \cos[2\pi v0t + \varphi(t)]$$

Numărătorul Eq. (8.51) pentru $\gamma(\tau)$ devine atunci

$$<E(t)E(t - \tau)> = <A(t)4(t - \tau) \cos A \cos B)$$

Unde

$$A = 2\pi v0t + \varphi(t), B = 2\pi v0[t - \tau] + \varphi(t - \tau)$$

Utilizarea identităţii $\cos A \cos B = 1/2 \cos(A + B) + 1/2 \cos(\Lambda - B)$ dă $\cos A \cos B = 1/2 \cos[2\pi v0[2t - \tau] + \varphi(t) + \varphi(t - \tau)J + l/2\cos[2\pi v0\tau + \varphi(t) - \varphi\{t - \tau)]$.

Primul termen oscilează íapid cu t și dă zero când se ia media timpului. Aceasta pleacă

Numeratorul lui$(\tau) - | <\Lambda(t)\Lambda(t - \tau) \cos[2\pi v0\tau + \varphi(t) - \varphi(t - \tau)])$

Numitorul lui $y(\tau)$ este pur și simplu numărătorul la $\tau =\wedge\theta$, care este $l/2<[\Lambda(t)]2>$. Asa de,

$c(t) =$

$$<4(t)A(t - \tau) \cos[2\pi v0\tau \div \varphi(t) - \varphi(t - \tau)]> IW2\Gamma$$

(8,62)

Ecuația (8.62) exprimă exact ceea ce am încercat anterior să spunem imprecis cu cuvinte. Relațiază modelul de interferență, reprezentat de $\gamma(\tau)$, cu media unei funcții trigonometrice a diferenței de fază $[\varphi(t) - <p(t - \tau)]$. Acest lucru nu este surprinzător, deoarece faza este definită doar într-un multiplu integral de 2π și numai funcțiile trigonometrice ale acesteia sunt semnificative.

O interpretare calitativă a Eq. (8.62) poate fi dat după cum urmează. Dacă timpul de întârziere τ este suficient de scurt încât să existe o fluctuație mică de fază între timpii t și $t - \tau$, factorul cosinus poate fi bine aproximat cu $\cos 2\pi\nu_0\tau$ și luat în fața mediei integra! <.. .>. Este natura semnelor Iight că o mică fluctuație de fază implică o mică fluctuație de amplitudine, astfel încât în acest caz $A(t - \tau) \approx A(t)$ și Eq. (8,62) este aproximativ

$$\gamma(\tau) = \cos 2\pi\nu_0\tau$$

Acesta reprezintă pur și simplu modelul de interferență oscilator normalizat pentru o sursă monocromatică.

Când fluctuațiile de fază pătrată medie sunt de ordinul a 1 radian sau mai mult, factorul cosinus din Eq. (8.62) va fluctua puternic și va avea o medie la ceva considerabil mai mic decât $\cos(2\pi\nu_0\tau)$. Interferența a fost apoi redusă considerabil.

Când cosinusul din Eq. (8.62) este extinsă, Ec. (8.31) se obține, dar cu

$\langle A(t)A(t - \tau) \cos[\varphi(t) - \varphi(t - \tau]\rangle$ ^7cw>^

(8.63a)

_ dm _   - ɪ) sin[φ(O - φ(| - τ)]>

<U«)]2>   (8-63b)

Ecuațiile (8.32 și 8.33) urmează ca mai înainte. Ecuațiile (8.30) spun atunci că transformata Fourier cosinus și sinus a funcției $D(\mu)$ sunt date de laturile drepte ale ecuațiilor. (8,63).

Acest lucru este cât de departe putem ajunge dacă nu cunoaștem mai multe despre funcțiile A și φ. Pentru un semnal radio sau pentru semnalul Iight de la un laser ideal cu un singur mod, amplitudinea A poate fi o constantă. Apoi va ieși din mediile din discuțiile precedente, iar funcțiile varianilor y, D_c, D_s, U și Φ vor depinde

numai pe fluctuația de fază prin expresii precum

$$DM = \langle\cos[\varphi(t) - \varphi(t - \tau)]\rangle$$

și

$$-D_s(\tau) = \langle\sin[\varphi(t) - \varphi(t - \tau)]\rangle$$

3. $\gamma(\tau)$ pentru Lumina Termică. La cealaltă extremă față de Iight laser monomod se află un alt tip de lumină cvasimonocromatică cunoscut sub numele de lumină termică. Folosirea cuvântului... „termic” nu implică faptul că colțurile Iight provin dintr-o sursă de corp negru termic; se referă la proprietățile statistice ale amplitudinii luminii de activare, care sunt aceleași cu cele ale luminii corpului negru. Iluminarea termică rezultă din suprapozi- . semnalele luminoase provin

dintr-un număr mare de surse microscopice independente, cum ar fi atomii sau moleculele individuale. Semnalul rezultat este ceea ce este cunoscut în teoria probabilității ca o variabilă aleatorie gaussiană. Din acest motiv, lumina termică este adesea numită lumină gaussiană.

Nu este potrivit pentru noi să studiem în detaliu aspectele statistice ale luminii termice, dar putem discuta despre un model care va scoate în evidență multe dintre proprietățile sale importante. Să presupunem că câmpul electric este suma câmpurilor dintr-un număr mare de oscilatoare cvasimonocromatice independente având aceeași frecvență dominantă v0. Ei vor fi excitați de coliziuni sau alte mecanisme, vor emite radiații pentru un timp finit, vor fi reexcitați, reemiși și așa mai departe. Fiecare dintre aceste evenimente are loc la un moment aleator și nu există nicio pierdere de generalitate dacă presupunem că fiecare oscilator este excitat și emite lumină o singură dată.

Pentru a vizualiza ce se întâmplă, luați în considerare descrierea complexă în care semnalul luminos E este dat ca parte reală a unui semnal analitic complex Ec. Semnalul complex de la o sursă individuală va fi de formă

Ecj = Ajeiφei2πv°t

Toate semnalele complexe au factorul comun el2πv°t, care face ca diagrama fazorilor din planul complex să se rotească în sens invers acelor de ceasornic cu frecvența unghiulară 2πv0. Semnalul total în orice moment va fi partea reală a Rel2nvot unde R are amplitudinea A și faza φ și este suma

R = Aeiφ = ∑Ajeiφj

j

Acest lucru este prezentat schematic în Fig. 8.7α. La un moment ulterior, diferiți atomi radiază cu faze φj complet fără legătură cu fazele anterioare. Pentru sursele constante, numărul mediu de oscilatoare este constant, dar mărimea A a rezultatului R și faza lui φ se vor schimba Imprevizibil, ca în Fig. 8.7b. Timpul pentru o fluctuație importantă a amplitudinii și fazei lui R, timpul de coerență, este în esență durata radiației coerente de la un oscilator individual.

Deoarece oscilatorii individuali care contribuie la un semnal de lumină termică sunt independenți și pentru că experimentul interferometrului Michelson se face sub

Aje^

(A)

condiții care nu sunt capabile să detecteze interferența între surse independente, modelul de interferență rezultat este în esență o suprapunere a modelelor produse de fiecare oscilator individual. Cu

alte cuvinte, Semnalul Iight de la fiecare oscilator atomic sau molecular interferează numai cu el însuși. Câmpul optic va fi de formă

E(t) = £ Eft) = X Aft) cos[2πv0t + φj-(t)]

(8,64)

Dacă introducem funcția de autocorelare pentru j-lea oscilator,

y(j', ɪ) =

Aft) Aft — τ) cos[2πv0τ + φft — τ)]

LAft)γdt

(8,65)

Funcția de autocorelare pentru întreaga sursă este

γ(τ) =

[X7(t)]2 dt U(j; τ)

[4/t)]2 dt

(8,66)

Această expresie este o medie ponderată a funcțiilor de autocorelare individuale. Factorul de ponderare

W dt

este proporțională cu energia totală emisă de al j-lea oscilator.

Dacă oscilatorii individuali sunt identici în măsura în care fiecare are același y (J; τ) obținem pur și simplu

7(τ) = 7(j; ɪ)   (8,67)

În acest caz, funcția de autocorelare a macroscopiei, care este partea oscilativă normalizată a modelului de interferență și poate fi măsurată direct, reprezintă pur și simplu funcția de autocorelare a câmpului de la un oscilator microscopic individual. Acest rezultat este uneori cunoscut sub numele de teorema Campbel.

B. Exemple pentru surse „termice” model

Rezultatele anterioare pot fi aplicate modelelor simple ale oscilatorilor în sisteme radiante pentru a calcula autocorelațiile oscilatorului y(/;r), funcția de autocorelare globală și funcția de distribuție spectrală. Facem ipoteza Simplifyirtg că faza φ în lumina cvasimonocromatică este o constantă. Atunci amplitudinea Aj acționează ca o simplă anvelopă care modulează oscilațiile rapide ale cosinusului, ù Apoi Eq. (8.62) dă

7(τ) = y<J', ɪ) = cos(2πν0τ)   (8•68)

Renunțăm la indicele j, deoarece se înțelege că acum ne referim la un semnal de la un oscilator individual sau la o colecție de oscilatori identici. Ecuația (8.68) conține factorul cos(2πν0τ) Caracteristică ideală monocromatică Iight ori funcția de autocorelare pentru anvelopa sau amplitudinea A(t):

, ∧ (A(f)A(t - τ)>

?л(T)   <[Л(Γ)]2>

(8,69)

Astfel, în experimentul de interferență γA(τ) acționează ca o anvelopă care variază lent pentru oscilațiile cos(2πν0τ). Deoarece faza este constantă, Ec. (8.63a) dă rezultatele Pc(τ) = γy4(τ) și Ds(τ) = 0, iar prin Ec. (8.30a) constatăm că funcția de autocorelare a plicului se supune

Í00

D(μ) cos(2πμτ) dμ

— 00

Pentru funcția de distribuție spectrală, formula de inversare a Eq. (8.35) Înțeleg să

D(μ) = 2 j Dc(τ) cos(2πμτ) dτ

J — ∞

(8,70)

1. Lărgirea trunchiului. Să presupunem că oscilatorul emite un semnal sinusoidal pentru un interval de timp limitat. Aceasta este schițată în Fig. 8.8. Amplitudinea A(t) este constantă pentru I í I ≤ t1, iar zero În caz contrar. Deoarece Eq. (8.69) este independentă de mărimea anvelopei A(t), o considerăm fie zero, fie unitate, așa cum se arată în Fig. 8.8b. Funcția A(t — τ) este pur și simplu A(t) deplasată la dreapta pe o distanță τ. Aceasta dă pentru Λ(t) · A(t — τ) comportamentul prezentat în Fig. 8.8c. Numărătorul Eq. (8.69) este proporțională cu aria dreptunghiului umbrit, care este (2r1- | τ |)pentru | τ | ≤2t1, iar zero În caz contrar. Numitorul este numărătorul la τ = O. Aceasta dă

f>c(τ) = 7x(τ) = ɪ - | τ | ≤2tι

= 0,

| τ | > 2t1

(8,71)

Fig. β.β (a) Un puise pătrat; (h) plicul acestuia; și

(d) funcția de autocorelare a plicului.

(c) Arată principiul de autocorelare pentru o valoare a lui τ. (e) Funcția de autocorelare normalizată; (/) distribuția de frecvență pentru o undă sinusoidală modulată de o anvelopă pătrată.

Rezultatul este triunghiul prezentat în Fig. 8.8d. Funcția de autocorelare completă este reprezentată grafic în Fig. 8.8e.

Funcția de distribuție spectrală se obține din Ec. (8,70).

f2'1/ T \ 2tlsin2(2πμt1)

D{μ) = 2   1-z-cos(2πμτ) dτ = -ɪ- sau-ʌ(8,72)

Jo \ 2t1/(2πμt1)

și este reprezentat grafic în Fig. 8,8/.

2. Extinderea coliziunii. La descărcarea în gaz de înaltă presiune, lățimea liniei spectrale cvasimonocromatice este adesea limitată de ceea ce este cunoscut sub numele de coliziune sau extindere a presiunii. Mecanismul este după cum urmează. Fiecare atom sau moleculă care radiază emite o undă cosinus de frecvență v_0 cu o anvelopă pătrată. Anvelopa ar trebui să fie într-adevăr o funcție exponențială lentă din cauza amortizarii naturale a radiației a oscilatorului, dar adesea o putem aproxima printr-o constantă atunci când timpul de viață radiativ natural este mult mai lung decât timpul de coliziune. Procesul de emisie este întrerupt din cauza ciocnirilor cu alte molecule; se continuă apoi cu Iipic if any corelation of unghiul de fază. Timpul dintre coliziune t_c este atunci egal cu timpul de emisie $2t_1$ din cazul precedent, iar funcția de autocorelare pentru acei atomi cu timpul de coliziune t_c este

$$\gamma(t_c; \tau) = D_c(t_c; \tau) \cos(2\pi v_0 \tau)$$

cu

Dc(tc; τ) = Í1 - ɪ-ɪɪʌ, tc≥ | τ |

\ /

= O, tc < I τ I

Dacă se presupune că toate moleculele emit lumină cu aceeași amplitudine, factorul de greutate

pentru a fi folosit în Ec. (8.66) este proporțional cu tc. Suma peste j trebuie înlocuită cu integrala peste tc:

eu 00

(•••Wc)⅛

O

Aici /(tc) dtc este probabilitatea de coliziune în intervalul tc la tc + dtc. Și /(tc) este dat de

1 dW(tc)

_ Ã(Õ) dtc

unde A(tc) este numărul de molecule care nu au făcut încă coliziuni la momentul tc. Se supune ecuației diferențiale dN/dtc = — N/ιc și are soluția N =

N(0)e tclιc. Apoi

/(tc)dtc = (e

eu?

(8.73a)

Unde

ιc =

Jo

tc/(tc) dtc

(8.73b)

este timpul mediu dintre ciocniri.

Pentru funcția de autocorelare obținem astfel

Unde

Pentru t pozitiv avem

Dc(τ) =

$\gamma(\tau) = D_c(\tau) \cos(2\pi\nu_0\tau)$

Dc(tc; τ)tcfi(tc) dtc

----

tc^(tc) dtc

1 .lY⅛Vte/te⅛ = e-τ/Γe Fr / \ F. / Fc

Deoarece Dc(-τ) = Dc(τ), avem

Dc(τ) = e- | t | ^

Rezultatul final este

y(τ) = e |t|/,c cos(2πv0τ)

(8.74a)

(8,76)

Funcțiile Dc(τ) și γ(τ) sunt schițate în Fig. 8.9b.

Ecuația (8.70) Înseamnă la funcția de distribuție spectrală normalizată, care poate fi rescrisă într-o altă formă.

D(μ) = 2 e lτlz'c cos(2πμτ) dτ

Jo

= 2 ReJ I e- | τ | /⅛-i2πμτ jɪ

ÍJo

Acest lucru ne permite să folosim Tabelul 6.2 pentru transformarea Fourier a unei funcții descrescătoare exponențial.

D(μ) = ReJ ɪ I (Fc + ι2πμj

2Fc~1

Fc^ 2 + 4π2μ2

(8,77)

fr'

F⅛. β.9 Câmp electric (a), Funcția de autocorelare normalizată (b) și Funcția de distribuție a frecvenței (c) Pentru o undă sinusoidală modulată de o anvelopă exponențială. Curbele (b) și (c) se aplică și unei linii lărgite de coliziune pentru care tc = t¡.

Funcția D(μ) din Ec. (8.77) este o funcție lorentziană normalizată pentru a avea unitatea de suprafață. Are o valoare maximă de F 2fc la μ = 0 sau v = v0; lățimea sa jumătate la jumătatea maximă este (2πιc)~1. Este schițată în Fig. 8.9c.

Putem scrie Fc ca calea liberă medie ¿ împărțită la viteza medie v dacă moleculele sunt în echilibru termic la temperatura T:

/8κвT\112

v — ------

\ πm /

Aici kB este constanta lui Boltzmanrfs, iar m este masa moleculară. Calea liberă medie este dată de

unde σ este secțiunea transversală de coliziune și N este numărul de molecule de gaz pe unitate de volum. Dacă se presupune un gaz ideal Iaw, N este dat de '

P

n = Ut

unde P este presiunea din gaz. Timpul mediu de coliziune este atunci

1 /,πmkβT \ 112 σP \ 8)

(8,78)

3. Extinderea de-a lungul vieții. Dacă este permis să radieze netulburat, un oscilator excitat va radia o undă cosinus având o anvelopă exponențială:

E(t) = Ae~tlt' cos(2πv0t + φ), t ≥ 0

= 0, t < 0(8,79)

Parametrul T¿ reprezintă apoi timpul de viață radiativ natural al oscilatorului excitat. Funcția de autocorelare a plicului este ușor de calculat cu un rezultat care este același cu Eq. (8,76)

y(τ) = e~^lt' cos(2πv0τ) (8,80)

Funcția spectrală de distribuție a frecvenței produsă de o colecție de astfel de oscilatoare, fiecare cu același fz, este apoi dată de ecuația. (8.77) cu Tc înlocuit cu f¿. Aceste rezultate sunt ilustrate în Fig. 8.9. În mod obișnuit, T(este mult mai lung decât fc, astfel încât liniile lărgite pe durata de viață nu sunt de obicei văzute în practică.

4. Extinderea Doppler. O altă sursă importantă a lățimii liniilor este efectul Doppler. Când domină lărgirea, cum ar fi în cazul descărcărilor de gaze de joasă presiune, imaginea fizică este următoarea. Fiecare atom sau moleculă emite o linie ascuțită, cvasi-monocromatică la frecvența v0 în propriul său cadru de repaus. Dar dacă molecula se mișcă în raport cu observatorul cu o viteză relativă v

măsurată de-a lungul liniei care o leagă de observator, observatorul va vedea o frecvență

Dacă moleculele sunt în echilibru termic la temperatura T, vitezele v vor fi distribuite conform distribuției Maxwell Iaw

/мл m f-mυ2 \ ^dv^M^exi \ -2k^)dv

Aceasta înseamnă că funcția de distribuție spectrală va fi dată de

1 / μ \ 2

D(μ) = -eχp -π — Δv |_ \ Δv J

cu

Δv = ^°

C

Unde

Aceasta este aceeași formă ca Eq. (8.43), un gaussian centrat pe v_0 cu lățimea 1/e Δv/χ/π. Funcția de autocorelare este dată de Ec. (8,46).

$$y(\tau) = \exp[-\pi(\Delta v\tau)^2] \cos(2\pi v_0\tau) \quad (8,82)$$

Aceste funcții sunt reprezentate grafic în Fig. 8.6.

C. Timpul de coerență și răspândirea frecvenței

Exemplele din secțiunea B au unele caracteristici generale în comun. În cazul lărgirii timpului de viață sau al extinderii coliziunii, timpul mediu respectiv de emisie ιi, sau ιc, furnizează o măsură a timpului de coerență τ_c. Funcția de distribuție a frecvenței spectrale cvasimonocromatice are o lățime de ordinul τ~1. Cazul lărgit Doppler se comportă într-un mod similar, deși oscilatorii individuali emit mult mai mult timp decât τ_d. Răspândirea frecvenței este dată de Δv ~ τ~1, iar $\tau_c \sim \tau_d$ este o măsură a cât timp γ(τ) rămâne diferit de zero.

Suntem acum în poziția de a defini cantitativ noțiunile de timp de coerență τ_c și împrăștierea frecvenței Δv. Există mai multe modalități de a face acest lucru. Alegem o metoda datorita lui Mandel:*

$[y(\tau)]^2\, d\tau$

(8,83)

(8,84)

Pentru o lumină onocromatică quasim unde funcția de autocorelare ia forma $y(\tau) = t/(\tau) \cos[2\pi v_0\tau + \Phi(\tau)] = D_c(\tau) \cos(2\pi v_0\tau) + D_s(\tau) \sin(2\pi v_0\tau)$

L. Mandel, Proc. Fiz. Soc. (Londra), 74;233, (1959).

și unde $D_c(\tau)$ și $D_s(\tau)$ variază lent în raport cu cosinusul, Ec. (8.83) se simplifică la

Í.   '/* 00

[lʃ(t)]2 dτ = 2 ([Dc(τ)J2 + [Ps(τ)]2} dτ

o   Jo

Acest rezultat este ușor de stabilit odată ce se realizează că oscilațiile $\cos^2(2\pi\nu_0\tau)$ și $\sin^2(2\pi\nu_0\tau)$ vor avea o medie de 1/2 într-un interval de timp în care U, Φ, Dc și Ds sunt practic constante. Începând cu Eq. (8,21)

Í'00

P(v) cos 2πvτ dv

o

un calcul direct folosind delta Funcția reprezentare Eq. (6.66) va da atunci

4   Γ[y(τ)J2 dτ = Γ[P(v)J2 dv = Γ[Z)(μ)]2 dμ(8,85)

Jθ   JθJo

sau prin Ecs. (8,83) și (8,84)

ɪ Δ?

Expresiile pentru τc și Δv sunt ușor de calculat pentru exemplele discutate. Pentru o durată de viață sau extinderea coliziunii, avem o formă de linie lorentziană,

2

D(μ) =

1V

— 1 + 4π2μ2

dacă /

cu un plic exponențial pe funcția de autocorelare,

y(τ) = e ^lte cos(2πv0τ)

Apoi

(8.86a)

D(μ) — (Δv) 1 exp — π |

— 1

τc = ï(, Δv = _ Q

Pentru lărgirea Doppler unde forma liniei este Gaussiană,

>γ^

Δν

anvelopa funcţiei de autocorelare este tot gaussiană

$\gamma(\tau) = \exp[-\pi(\Delta v\tau)^2] \cos(2\pi v_0\tau)$

Putem obține cu ușurință

T--ζ=, Δv = √2Δv

Δv A v

(8.86b)

Tabelul β.1. Rezumatul coerenței temporale

P(v) sau D(μ)

y(τ)

cos (2πviτ)

Monocromatic

Dual monocromatic ftiδ(y — vi) + (1 — /i)<5(v — Vj)^icos(2πviτ) + (1 — ʌ) cos(2πvj•τ)
General /*co/•coi. ,. 4 c(τ) cos(2πvτ) dτP(v) cos(2πvτ) dv J0J0
Quasimonocromatic μ = V - V0 2 f \ (τ)cos(2πilτ)Λ--2 f *D,(1)
s,n(2πμτ) Л ∞s<2π,°τ> + °·(τ) „η <2π'»τ) JoJoor U(τ) cos[2πv0τ + Φ(τ)]

$\exp[-\pi(\Delta v\tau)^2] \cos(2\pi v_0\tau)$

gaussian

Doppler s-a lărgit

Ciocnirea sa extins

Durata de viață s-a lărgit

2fc~1 fc^2 + 4π2μ2

$e\ l\tau\ |\ z'c\ \cos(2\pi\nu_0\tau)$

Trunchierea s-a lărgit

$2t_1\ \mathrm{sinc}^2(2\pi\mu t_1)$

φ statistic = const

$\int'\ \infty$

$y_A(\tau)\cos(2\pi\mu\tau)\,d\tau$

o

$\gamma\surd\tau)\cos(2\pi\nu_0\tau)$

$D_c(\tau) \equiv f\ D(\mu)\cos(2\pi\mu\tau)\,d\mu;\ D_s(\tau) \equiv -\ j\ D(\mu)\sin(2\pi\mu\tau)\,d\tau$

I-OO J $-\infty$

$C(\tau) \equiv \{[D_c(\tau)]^2 + [D,(\tau)]^2\}^{1'2};\ \tan\Phi(\tau) =$

$y_x(\tau) \equiv \langle 4(t)A(t-\tau)\rangle/\langle[X(t)]^2\rangle$

D. Rezumatul coerenței temporale

Ca o trecere în revistă a acestei secțiuni prezentăm Tabelul 8.1, care arată relațiile dintre funcția de autocorelare normalizată $\gamma(\tau)$ și funcția de distribuție spectrală normalizată $P(\nu)$ sau $D(\mu)$.

Ô.3 Spotiole Coerență

Putem interpreta timpul de coerență τ_c ca o măsură a cât timp faza dintr-un fascicul de lumină cvasimonocromatic păstrează o „memorie” a valorii pe care o avea la un moment anterior. Dacă fasciculul este perfect colimat, ne putem deplasa de-a lungul unei distanțe

și să spunem că faza rămâne corelată pe această distanță, care se numește coerență longitudinală. Pentru un astfel de fascicul colimat faza este aceeași pe orice suprafață orientată perpendicular pe direcția de propagare. Spunem că există coerență transversală perfectă în fascicul.

Pentru o grindă incomplet colimată, coerența trans vers nu mai este perfectă. Pentru a-l descrie introducem coerența transversală Iength tl. Aceasta reprezintă o distanță într-un plan transversal față de direcția principală de propagare pe care fazele din două puncte rămân corelate. Fazele individuale pot fluctua, dar cele două fluctuează împreună. Deoarece pentru două puncte separate de o distanță Ies sau aproximativ egală cu Z,t există o relație de fază definită. Efectele de interferență ar trebui să apară dacă lumina din aceste două puncte poate fi reunită. În principiu, putem face acest lucru cu experimentul lui Young.

Un fascicul incoerent spațial poate fi creat de o colecție de surse punctuale necorelate. Vom examina Iight dintr-o astfel de sursă, deoarece interacționează cu interferometrul cu dublă fantă.

A. Experimentul lui Young

În descrierea originală a geometriei lui Young din capitolul 5 am considerat o sursă de linie și două fante paralele (Fig. 5.5). Aici limităm inițial sursa la un punct și apoi generalizăm la o zonă extinsă. Situația este ilustrată în Fig. 8.10 pentru un punct sursă în planul xz.

Franjurile sunt perpendiculare pe planul desenului din fig. 8.10. Dacă punctul sursă este deplasat în afara planului desenului, franjurile vor rămâne neschimbate. Astfel, putem trata orice distribuție bidimensională a punctelor sursă ca o distribuție unidimensională echivalentă obținută prin proiectarea distribuției inițiale față de x și y pe axa x. Presupunem pentru moment că Iight este cvasimonocromatic cu o frecvență centrală v0 = c/A0 și vom generaliza ulterior rezultatele pentru a acoperi o distribuție de frecvențe. Lățimea distribuției spectrale trebuie să acopere un interval de frecvență destul de mare pentru a se asigura că distribuția noastră a surselor punctuale este reciproc incoerentă. Adică, timpul de coerență reciprocă pentru sursă trebuie să fie mai scurt decât timpul de măsurare.

Fie ca o singură sursă situată la P1 să fie identificată prin unghiul θt așa cum se arată în Fig. 8.10a. Numerotăm fantele L1 și L2 în ordine opusă celei utilizate în capitolul 5 pentru a ne asigura că timpul de întârziere aici va avea același semn ca în interferometrul Michelson. Examinăm Iight la P', identificat prin unghiul 0'. Contribuția din fanta L1 la câmpul optic total la punctul de observație este L1(t), în timp ce cea din fanta L2 este L2(t) = E 1(t – τ). Timpul de întârziere τ este intervalul în care faza fasciculului 2 este întârziată în raport cu cea a fasciculului 1.

02 - 0i = -2πv0τ

Folosind Eq. (5.31) cu noua schemă de numerotare a fantelor aceasta este

,   . 2πa

<t>2~ Φl=-----T– (sin θ' - sin 0 |)

Z0

2πvna ^

≈-------~(θ~θι)   (8,87)

Fig. β.10 (a) Geometria lui Young pentru o sursă punctuală, (ô) Geometria lui Young pentru o sursă dreaptă pe axa x între punctele P1 și

Prin urmare, timpul de întârziere asociat cu sursa la P1 este

a(θ' - θi) τι –

c

(8,88)

Ecuația (8.10) exprimă densitatea fluxului ca o funcție a timpului de întârziere pentru lumina cvasimonocromatică.

S(τ1) = S, | [l + cos(2πν0τ1)]

(8,89)

1. Surse în două puncte. Dacă surse punctuale cu aceeași frecvență, dar care nu au coerență reciprocă sunt prezente atât la Pi, cât și la P11, ca în Fig. 8.10h, modelele de interferență se vor adăuga și poate exista o netezire sau o pierdere a contrastului franjurilor, în funcție de Forța relativă a sursele și locațiile acestora. Adăugăm densitățile de flux pentru a obține.

S = S | [l + cos(2πν0τ1)] + S1 | [l + cos(2πν0τπ)]

(8,90)

Aceasta are aceeași formă ca Eq. (8.15). Acolo au fost argumentele termenilor cosinus

/540 Coerenţă

2πνiτ și 2πνjτ. Am definit Vizibilitatea franjurilor (sau contrastul franjurilor) V prin Ec. (8,38).

Ç _ Ç

__ *jmax min

*jmax ' kjmin

unde Smax și Smin sunt valorile densității fluxului pentru o pereche maxim-minum adiacentă la o valoare medie a retardului τ' Am văzut că, pentru cazul cu două frecvențe, Vizibilitatea a fost dată de Ec. (8,41)

Jz(τ) = λ/l – 4/i(l – ʌ) sin2(πΔντ)

unde πΔντ = π(νi – νj-)τ (pentru νi > νj), și /ιi = Si/ S0, S0 = Si + Sj.

Facem aceeași definiție a vizibilității aici. Pentru o distribuție spațială generală a surselor punctuale cvasimonocromatice reciproc incoerente, V va depinde atât de θ', unghiul de observare în afara axei, cât și de a, separarea fantei. Să fixăm θ' și să variem separarea fantei. Apoi facem următoarele substituții pentru a transforma rezultatul pentru incoerența temporală în vizibilitatea pentru situația incoerentă spațial:

πΔντ → πνοΔτ

Unde

A

∧ɪ = ɪi - τ∏ — - (0Ц - θi)

c

(pentru 0Ц > 01)

(8,91)

fa → ∧ — Si/S0

Unde

Vizibilitatea devine atunci

K(α) =

S0 — Si + Sn

1 ~ 4/ι(l — /ɪ) sin2 π — a(θii — θɪ)

(8,92)

(8,93)

Aceasta arată cum distribuția spațială a luminozității sursei afectează modelul de interferență. În funcție de a, V variază între

V

F max

când

π ya(θli - 0 |) = π x (întreg)

adică când

a = ⅛,, →)x (întreg)

(8,94)

:rt ■ "

Ô.3 Coerenţa Spadai . ' 54 Ί

și

rz _ 17 Z 1 I _ | s | - 5∏ |

*min - 12/ι   1 I – ç,

ðɪ + O11

(8,95)

când

π a(θu – 0l) – X (întreg impar)

adică când

a = 7fì------fl \ × (jumătate întreg)

(0∏ – tfj)

(8,96)

Pentru o sursă fixă dublu punct, constatăm că vizibilitatea modelului de interferență cu două fante atinge primul minim atunci când a este dat de

2(0π - θl)

(8,97)

Astfel, dacă putem măsura ai, separarea unghiulară este dată de

(0∏ – θl) –

(2ui)

Această variație a vizibilității V cu separarea fantei poate fi utilizată pentru a determina natura sursei sau distribuția surselor. De exemplu, dacă V alternează periodic între un maxim de unitate și un minim Fmin, atunci putem concluziona că avem două surse punctuale, a căror separare unghiulară proiectată 0n – poate fi obținută din ecuația. (8.97) și a căror densitate relativă de flux poate fi obținută din Ec. (8,95) ca raport

Si 1 - Knin

sɪɪ 1 + Fmil

2. Sursă continuă. Acum aplicăm aceste argumente la o distribuție continuă a punctelor sursă. Un caz simplu este o sursă de linie uniformă situată între P1 și Pn în Fig. 8.10h. Acest lucru poate rezulta din proiecția unui dreptunghi xy uniform pe planul hârtiei. Pentru acest tip de sursă putem defini o funcție $S(\theta)d\theta$ care să reprezinte densitatea totală a fluxului la ecran provenind din partea sursei situată între θ și $\theta + d\theta$. În mod similar definim funcția de distribuție unghiulară normalizată

do

(8,98)

unde densitatea totală de flux fără interferență este

/* 00

SO = S(θ) dθ

(8,99)

— ∞

t

<

f' \

Arătăm limitele asupra integrării unghiulare ca + ∞, deși în practică intervalul de θ va fi destul de mic. Funcția de distribuție unghiulară normalizată are Proprietatea

i(θ) dθ = 1

(8.100)

Densitatea fluxului în modelul de interferență cu două fante provenind din partea sursei la θ de lățime dθ este dată de o generalizare a ecuației. (8,90)

í Γ2πvoα(θ'— 0)I) jn

dS = S(θU 1 + eos --- ------- dθ

LL c Jj

sau

dS = S0i(θ)

Γ2πvα(θ'— 0)Ii

1 + cos ----------- >dθ

c Jj

Densitatea totală de flux primită la un unghi θ' este atunci

S(θ', a) = S0

1 + cos

2πv0a(θ' — 0)

c

— Deci[l + 7i2]

unde y12 este funcția de corelație normalizată

z(0) cos

Aceasta este o funcție a ambelor θ' și a.

Să ne identificăm

2πvoα(0’ — 0)

c

aθ'

c

dθ

(8.101)

(8.102)

(8.103)

ca timpul de întârziere cu care faza Iight din fanta L2 este întârziată cu respectarea celei din fanta L1 din cauza propagării între planul fantei și planul de observare. Argumentul cosinusului din Ec. (8.102) devine

2πvoα(0’ — 0)

c

~ , 2πα0

2πv0τ ----

Z0

Analiza noastră este simplificată prin definirea /12(τ', a), gradul complex de coerență pentru o sursă cvasimonocromatică ca

i∞

z(0)e'42πv°τ'-2παθzW0

— ∞

(* 00

_ gi2πvoτ, I

i(θ)e~i2πaθlλ° dθ

(8.104)

— 00

Apoi funcția de corelație normalizată devine

712« α) = M/12« «)}

Integrai rămase în Ec. (8.104) este transformata Fourier a Funcției de distribuție a sursei normalizate

0́

(8.106)

Aceasta înseamnă

, in absenta

/12« à) = e'2πv°1 lí -

\ Λ•o

0́

gi[2πvoτ' -ι/,(α)]

(8.107a)

(8.107b)

Unde

exprimă transformata Fourier complexă în formă polară.

Dorim să găsim vizibilitatea franjurilor în modelul de interferență al dispozitivului Young unde

S — S0[l + γ12]

cu

■0

Pentru o valoare fixă a θ', unghiul de observare, acesta este echivalent cu

, λ τi a \ Γ2πaθ' ~

712(«) = ∫ T~ εαs----------- | A(α)

Λ,o

- Ψ(a)

(8.108)

A

Pentru lumina cvasimonocromatică, deoarece distanța dintre fante este modificată într-un interval mic, oscilațiile cosinusului datorate termenului 2πaθ'/λ0 oferă cea mai rapidă variație a y ɪ 2(<2)• Acestea sunt franjuri. Ele sunt modulate în Forță de I(α/λ0) și în fază de iД(a), ambele fiind funcții slabe ale lui a. Dacă considerăm că aceste funcții sunt esențial constante pe parcursul unui ciclu al modelului de franjuri, atunci, pentru franjuri adiacente, densitatea fluxului se modifică între extremele de

/ ɑ

⅛ax(fl) = S0 1 + I\ T~

și

,   /a

^min(α) = $0 1 - ∫(T~ VtO

Vizibilitatea este dată de

Pmax ɔmin

Ç -4- Ç umax ' kjmin

(8.109)

Aceasta este o măsură cantitativă a gradului de coerență spațială reciprocă pentru o sursă cvasimonocromatică extinsă cu o distribuție relativ îngustă a frecvenței.

Vedem relația dintre teoria coerenței spațiale și teoria difracției în câmp îndepărtat. Această relație vine prin transformarea Fourier a funcției obiect. Relația este formalizată în teorema van Cittert-Zernike, care în această aplicație afirmă: Atâta timp cât sursa este aproape monocromatică și mică în comparație cu distanța până la interferometru și cu condiția ca distanța dintre fante să rămână mică în comparație cu acea distanță, atunci vizibilitatea franjelor va fi egală cu valoarea absolută a transformării Fourier a funcției de distribuție a sursei.

(8.110)

Comportamentul lui V pentru exemplele tipice va fi discutat acum.

A. Sursă de linie uniformă. Considerăm o sursă de înălțime unghiulară Δ0 centrată în jurul valorii de 0 = 0. Aceasta dă naștere unei funcții de distribuție sursă uniformă cu următoarea formă:

i(0) =

'ɪ

Δ0'

.0,

(8.111)

Conform Eq. (8.106), trebuie să găsim transformata Fourier a acestei „funcții cutie” unidimensionale. Acest lucru a fost tratat în Capitolul 6 în asociere cu difracția printr-o singură fantă. Prin calcul direct sau prin referire la Tabelul 6.2 ajungem la

Aici vizibilitatea este dată de

V(a) = sinc|

παΔ0'

Z0

(8.113)

Această funcție este reprezentată în Fig. 8.1 la (vezi și Fig. 8.13α). Valoarea lui a la care V este mai întâi egal cu zero este dată de

(8.114)

doar de două ori valoarea dată în Ec. (8.97) pentru o sursă cu două puncte.

Dacă intenționăm ca această sursă de linie să fie utilizată în loc de o sursă cu un singur punct și avem

Fig. β.11 Vizibilitatea marginii de la (a) o sursă de linie uniformă, (b) un disc uniform.

același efect optic, atunci valorile lui a și Δ0 trebuie alese astfel încât V în Ec. (8.109) este foarte aproape de unitate; adică ne-am dori

παΔ0

λ0

care este echivalent cu condiția

αΔ0 <≤ λ

Putem generaliza oarecum acest rezultat și spunem că atunci când condiția $\alpha\Delta\theta < \lambda$ este îndeplinită, o sursă extinsă de înălțime unghiulară $\Delta\theta$ va acționa ca și cum ar fi o sursă punctuală.

b. Sursă uniformă a discului. Comportamentul lui V pentru o sursă în formă de disc (sau o sursă Lambert sferică) cu diametrul unghiular $\Delta\theta$ este destul de similar cu cel pentru o sursă linie. Transformarea Fourier a unei funcții în formă de disc este legată de funcția Bessel de ordinul întâi, fapt pe care l-am descoperit în capitolul 6. Găsim

K(α) = 2

παΔθ

Âo

(8.115)

Acesta este reprezentat grafic în Fig. 8.11b. Valoarea lui a pentru care Fis este mai întâi egală cu zero se dovedește a fi

1

a* = *•2⅛

(8.116)

3. Interferometrul stelar Michelson. Fenomenele descrise tocmai au fost folosite de Michelson pentru a măsura separarea unghiulară a stelelor duble. A acoperit obiectivul Iens al unei astronomice! telescop cu o mască care conține două fante, așa cum se arată în Fig. 8.12α. Din cauza nivelurilor Iow Iight Ievel implicate, a trebuit să folosească lumină albă. Răspândirea efectivă a frecvenței a fost cea a detectorului său și a fost mare,

Fig. 8.ii Interferometrul stelar.

poate jumătate din frecvența însăși. Din acest motiv, funcția de autocorelare 2(τ) poate fi aproximată cu $\cos(2\pi\nu_0\tau)$ pentru unul sau două cicluri, iar câteva franjuri pot fi văzute aproape de ordinul zero. Vizibilitatea lor a fost studiată în funcție de a. Pentru o stea dublă, valoarea lui a la primul minim de vizibilitate dă o valoare pentru separarea unghiulară $\Delta\theta$ a stelelor din Ec. (8.97), $\Delta\theta = 2\theta/2\alpha_1$, iar raportul densității fluxului poate fi obținut din valoarea lui F_{min} sub forma $(1 - F_{min})/(1 + F_{min})$. (Fantele, desigur, trebuie să fie perpendiculare pe linia care unește cele două stele pentru ca aceasta să se țină.) Michelson a reușit, de asemenea, să măsoare diametrul unghiular al sateliților planetari prin măsurarea a_1 și folosind Eq. (8.116).

Nicio stea cunoscută nu are un diametru unghiular suficient de mare pentru a fi măsurat de aparatul prezentat în Fig. 8.12α Cu intervalul său limitat de a. Michelson a extins lățimea efectivă a fantelor la mai mult de 6 m în interferometrul său stelar, care este prezentat în Fig.

8.12h. Lumina paralelă de la o stea îndepărtată incidentă la un unghi θ va ajunge la Mi cu un timp aθ/c Iater decât la M2. Această întârziere va fi aceeași la fante dacă M1M3L1 = M2M4L2. În punctul P' de pe ecran (unde o fotografie

se introduce o placă sau un ocular) Situat la un unghi θ', va exista o întârziere suplimentară de semn opus de cantitate dθ,/c. Întârzierea netă este astfel

(dθ' af

τ= — — -

\ cc

(8.1i⅛)

Pentru acest aparat, separarea marginilor depinde numai de d, nu de a. Dar contrastul frihge depinde de a, nu de d. Trebuie să înlocuim a cu d în ecuația. (8,103); totuși, expresiile pentru vizibilitate în Ecs. (8.93), (8.109), (8.113) și (8.115) sunt încă funcții Validas ale a.

Folosind interferometrul, putem distinge clar o stea dublă cu dependență sinusoidală a lui V(a) [Eq. (8.93)] dintr-o singură stea mare care are o dependență prezentată în Fig. 8.11b. Odată determinat tipul sursei, dimensiunea unghiulară a acesteia poate fi determinată din ecuația. (8,97) sau Ec. (8.116). Doar cele mai mari stele pot fi măsurate prin această tehnică, și anume așa-numitele giganți roșii. Un exemplu este Betelgeuse, cu un diametru unghiular de 0,047 sec de arc și un diametru real de

4,1 × IO8 km, mai mare decât diametrul orbitei pământului în jurul soarelui!

Oglinzile din interferometrul stelar trebuie montate cu extremă atenție, astfel încât modificările diferențelor de cale cauzate de vibrațiile mecanice și de dilatarea termică să fie menținute la o mică fracțiune de lungime de undă. Acest lucru devine imposibil pentru valori mai mari de câțiva metri. Interferometrele de fluctuație a intensității dezvoltate recent de Hanbury Brown și Twiss permit utilizarea unor valori mult mai mari ale a. Unele informații sunt însă sacrificate, deoarece aceste noi tehnici măsoară doar V. Acest lucru va fi discutat în secțiunea 8.4.

B. Răspândirea frecvenței finite

Până acum, în tratarea noastră a coerenței spațiale, proprietatea cvasimonocromatică a surselor de lumină a fost folosită doar pentru a se asigura că experimentul a fost efectuat astfel încât diferitele puncte din sursa extinsă să aibă o incoerență reciprocă completă. Cu alte cuvinte, trebuia să ne asigurăm că timpul de măsurare era mai lung decât timpul de coerență. Să vedem acum ce alte efecte rezultă dintr-o răspândire finită a frecvenței.

1. Derivare. Urmând metoda din secțiunea 8.1, presupunem că funcția normalizată de distribuție a frecvenței P(v) descrie compoziția spectrală a sursei. În diferitele ecuații date în această secțiune, în care a apărut v0, acum trebuie să înmulțim termenii corespunzători cu P(v) și să integrăm peste toate frecvențele.

Începem cu Eq. (8.104) pentru gradul complex de coerență, pe care îl rescriem ca

(8.118)

Unde

τ = - (θ' - θ) = τ'

c

αθ

c

Când este prezentă o răspândire a frecvențelor, aceasta devine

P(v)

o

i(θ)ei2πvτ dθ dv

i(θ)

P(v)ei2πvτ dv ι dθ

o

Recunoaștem din secțiunea 8.2, Ec. (8.59) că expresia dintre paranteze

/(τ) = Γ P(v)ei2πvτ dv Jo

este funcția de autocorelare normalizată complexă. Folosind-o, putem apoi să scriem gradul complex de coerență ca

/12= i(θ)γc(τ)dθ

(aθ \

i(θ)γc(τ'-----I dθ

\c/

(8.119)

2. Răspândirea frecvenței cvasimonocromatice. Acum folosim funcția de autocorelare pentru lumina cvasimonocromatică [Eq. (8.32)], care este

legat de funcția complexă de autocorelare pentru lumina cvasimonocromatică

γc(τ) = [y(τ)e>i2^sau+Φ(τ)]

(8.120)

Pentru a continua, trebuie să facem ipoteza suplimentară că U și Φ variază lent cu τ în comparație cu modificările aduse de el2πv°τ.

Fie sursa să fie de lățimea Δ0, centrată pe 0 = 0. Atunci cerința noastră este ca U și Φ să rămână esențial constante atunci când τ se modifică cu aΔθ | c. Pentru aceasta avem nevoie de un timp de coerență τc mult mai mare decât aΔθ/c. Acum a va fi de ordinul coerenței transversului Iength Astfel

iar cerința noastră devine

αΔ0

¿o=l

C V0

Această ultimă inegalitate este cea obișnuită

Δv = - < V0 ɪe

folosit pentru a defini lumina cvasimonocromatică. În practică, nu trebuie să fie o cerință strictă, deoarece interferometrul stelar Michelson funcționează cu „alb”

lumină, când Av ≈ v0/2. În aceste condiții putem înlocui τ cu τ' în U și Φ. Acum aceste funcții nu mai sunt dependente de 0 și pot fi eliminate din integrala ecuației. (8.119).

УI2 = U(τ')eiφ^ I i(θ)ei2πv°τ dθ

J-OO

Procedăm într-o manieră similară cu tehnica care urmează Eq. (8.109). Scriem τ — τ' — aθ/c în exponent. Apoi

2πv0τ = 2πv0τ' —

2πaθ

20

Aceasta înseamnă

Íoo

i{θ)e~i2paθllll° dθ

— 00

17(t')b[2pnot'+f(t')]/

= U(τ')

gi[2πvoτ' +Φ(τ') - i//(ɑ)]

Apoi funcția de corelație normalizată devine

/A\

y2(τ', a) = U(τ') II — cos

v∧o /

2πv0τ' + Φ(τ') — ψ(α) (8,121)

Vizibilitatea pentru θ' fix în această situație mai generală, în analogie cu cazul aproape monocromatic (Ec. 8.109), este

F(a) = u(-∧

\ c /

(8.122)

O măsurare a vizibilității V(a) ne va da valoarea absolută a /(a/20). Unghiul de fază ψ(a/λ0) poate fi, de asemenea, obținut dacă sunt disponibile măsurători precise ale densității fluxului în modelul de interferență pentru timpii de întârziere τ aproape de zero. Cu I(w) determinat, putem reconstrui ¿(0) folosind transformarea inversă

ι(θ) =

I(w)ei2πwθ dθ

(8.123)

Conform Eq. (8.121), franja de ordinul zero a densității maxime de flux va fi deplasată dacă ψ ≠ 0 de la poziția τ' — 0 la una în care

/Л '√Δ   (8.124)

c   Znv θ \ 4^,0 /

Acest lucru ne permite, în principiu, să determinăm ψ(a/λ0).

O curbă tipică de vizibilitate este prezentată în Fig. 8.13a. Aceasta este Fig. 8.1 la replotată și

Fig. β.15

se aplică unei surse de linie uniformă cu lățimea unghiulară $\Delta\theta$. Modelul de interferență corespunzător este prezentat în părțile b până la d din Fig. 8.13 pentru trei valori diferite ale lui a. Densitatea fluxului este reprezentată grafic în funcție de θ, = cτ'/a.

Din Eq. (8.120) putem dezvolta o proprietate importantă a gradului complex de coerență. Deoarece /(O) = 1, avem

/12(τ', 0) = /(ɪ') = U(τ,)eil2πν°τ'+φ^ (8,125)

De asemenea, este ușor de observat că deoarece (7(0) = 1 și Φ(0) = 0 avem

/12(0, a) = I

Apoi putem scrie

γc12(τ', a) = /(τ')γc12(O, a)

(8.126)

Aceasta este „reducerea” gradului complex de coerență. De aici vedem că vizibilitatea este

И(a) =

7Î 21

(8.127)

C. Coerența transversală

Discuția anterioară despre coerența spațială s-a bazat pe o analiză a experimentului de interferență cu două fascicule. Putem aborda aceste concepte și din perspectiva opticii statistice. Am dezvoltat un punct de vedere similar în timpul descrierii noastre a coerenței temporale.

1. Coerență transversală Lungime. Considerăm acum experimentul cu două fante dintr-un punct de vedere diferit, dar la fel de corect, și anume cel al corelațiilor dintre fluctuațiile câmpurilor la L1 și L2. Franjuri cu vizibilitate deplină (V=I) vor apărea numai dacă aceste fluctuații au o corelație certă, adică numai dacă Iight la L1 și L2 din Fig. 8.10 este reciproc coerent.

Pentru sursele extinse am văzut că V(a) scade spre zero, poate cu câteva oscilații. Valorile mici ale lui V corespund unei lipse de coerență reciprocă. Este util să se definească coerența transversală Iength /f astfel încât pentru a > St, V ≈ 0 și să nu existe coerență; iar pentru a <ξ St, V ≈ 1 și există coerență; iar pentru a ~ , V este undeva între 0 și 1 și există coerență parțială. Nu există o definiție unică a lui St, dar o posibilitate este discutată în probleme. Această Iength St este destul de diferită de coerența longitudinală Iength Se = cτc, unde τc este timpul de coerență al luminii.

Lungimea coerenței transversale este finită deoarece lumina este emisă dintr-o distribuție de dimensiuni finite a surselor. Chiar dacă fasciculele de lumină de la toate sursele individuale ar ajunge în fază la L1, ele nu ar putea ajunge în fază la L2 decât dacă ar fi foarte mici din cauza distanțelor diferite de propagare. Când a este mică, faza de la L1 este complet corelată cu cea de la L2 (adică diferența de fază este o mărime constantă, bine definită). Când a este egal cu lungimea corelației transversale, această diferență de fază are fluctuații medii în timp de aproximativ ± 1 rad. (Aceste fluctuații apar în intervale de timp de ordinul τc sec. Un detector al cărui timp de răspuns T este mult I mai mic decât τc ar putea încă înregistra un model de interferență pe ecran pentru o lungime mai mare decât coerența transversală I, dar acest model ar fluctua în timp și deplasare. , în medie, cu o jumătate de margine într-un timp egal cu τc. Prin urmare, nu va exista un model de interferență pe termen lung.)

Pentru o sursă de linie sau un disc putem considera coerența transversală Iength Z) ca fiind aproximativ egală cu a1 în Ec. (8,114) sau Ec. (8.116). În general, obținem rezultatul important

(8.128) pentru această lungime, unde Δ0 este lățimea unghiulară a sursei. Definițiile exacte ale lui St și Δ0 dau de obicei egalitate exactă: St = 2/Δ0.

2. Funcția de corelare normalizată. Câmpul electric în punctul de observație P' din Fig. 8.10 la momentul t' va fi, în general, proporțional cu câmpul electric L1(t' — R'1 | c) la L1 la un moment R'1/ c anterior plus câmpul E2(t, — R'2/c) la L2 la un moment R'2/c mai devreme. Avem

/ K'1 \ / , R2

E(P,, t') oc E1 t'----1 + E2 t' - —

\ c / \ vc

K'ή

vc /

Diferenta timpilor de intarziere va fi notata cu τ'

, R2 — R,l aθ'

τ =---------≈ —

cc

Pentru Comoditate introducem variabila de timp t = t' — R'1/c, care reprezintă timpul de sosire la L1. În ceea ce privește aceasta obținem

El P', t + — I = L1(t) + E2(t, - τ') \ c /

Densitatea fluxului la P’ este proporțională cu media în timp a lui E2. Astfel, așa cum am făcut și înainte, ne formăm

<£2> ≈ <E1(t)>2 ÷ <L2(t - τ')>2 + 2<L1(t)L2(t - τ')>

iar densitatea fluxului urmează:

S = S1 + S2÷ 2λ/S1S2y12

Unde

<E1{t)E2(t - τ')>

√<E2><E2>

(8.129)

este funcția de corelație normalizată a câmpurilor E1 și E2. Variabilele sale independente sunt atât timpul de întârziere τ’ cât și separarea fantei a. Deoarece L2(t – τ') devine o constantă ori L1(t – τ') ca a → 0, trebuie să avem

limγ12(τ', a) = γ(τ,)

a → 0

(8.130)

unde y(τ') este funcția de autocorelare normalizată. Dacă S1 = S2 avem

S = S0(l + y12) (8,131)

aceeași formă ca Ecs. (8.18) și (8.101).

Dacă câmpurile sunt reprezentate prin semne analitice complexe L1(t) și L2(t – τ'), putem defini funcția de corelație normalizată complexă

<L1(t)L2*(t - τ')>

√< | Ec1 | 2>< | Et2 | 2>

(8.132)

Apoi

712 = Re{7c12}

(8.133)

β.3 Coerența spațială 553

Funcția complexă definită în Ec. (8.132) este aceeași cu cea definită în Ec. (8.119). Vizibilitatea Kis apoi valoarea absolută | γ12 | .

3. Yi2 pentru o sursă extinsă. Să considerăm o sursă extinsă compusă din o colecție de surse punctiforme îndepărtate care fac unghiul θj cu

normala la planul celor două fante ale noastre L1 și L2. Semnalul analitic complex la L1 și L2 va fi dat de sumele formei

Lc1(t) = ∑ Lc1,XO

J=I

Ee2(t - r) = ∑ Et2./< - τ')

unde, de exemplu, E2j este semnalul analitic complex instantaneu la L2 rezultat din J-a sursă. Funcția de corelație normalizată complexă γ 12 trebuie calculată din Ec. (8.132). Aici interferometrul împarte componentele în mod egal (S1 = S2). Se presupune că timpul de mediere este lung în comparație cu timpul de coerență al luminii. Aceasta înseamnă că mediile formularului

<Lc1 j(t)L2*fc(t - τ')>

va da zero decât dacă j = k, deoarece diferența de fază se va modifica cu mulți radiani în timpul măsurării. Lumina din sursa J-a poate interfera doar cu ea însăși. Ecuația (8.132) dă

∑ <ec1 j(t)E¾t -τ')>

γ*2   Σ< | Etι,/<) | 2>

Din figura 8.14 vedem că pentru Iight de la o sursă punctuală îndepărtată la unghiul θ există un timp de propagare suplimentar aθ/c pentru ca Iight să atingă L1, astfel

/ aθ'

Eclj(0 = Ec2j t-_

(8.134)

Fig. β.14

Asta da

Pentru timpii lungi de mediere T, se atinge o stare de echilibru în care fiecare medie este independentă de t. Aceasta înseamnă că putem înlocui t cu t + constantă în fiecare termen fără a schimba rezultatul. Astfel putem înlocui t cu t + aθj/c și obținem

∑<l¾χr)P>----------

j

Funcția de autocorelare complexă normalizată γ2·(τ') pentru J-a sursă este definită de

<ι¾χοι2>

Dacă presupunem că funcțiile de distribuție spectrală pentru toate sursele sunt aceleași, acestea vor avea un comun γ)(τ') = γc(τ').

Ecuația (8.135) devine atunci

Σ<l¾X0l2>/τ,-^ι)

7,2 = 2   ∑<l¾χι)l2><8Л36)

j

Aceasta este o medie cântărită a diferitelor γc(τ' — aθj/c}. Factorul de pondere

<l¾(0l2> ∑<ι¾χoι2> j

oferă densitatea relativă a fluxului la L2 și henee la ecranul de observare dacă o fantă este închisă.

Pentru o distribuție continuă suma trece la integrală

/ aθ \ i{θ)yc \ τ' - — \άθ   (8.137)

care este identic cu Eq. (8.119) pentru gradul complex de coerență deoarece τ' = aθ'/c.

Ô.4 Fluctuaţii

Iluminarea termică rezultă din suprapunerea semnalelor dintr-un mare număr de surse optice independente. Pentru lumina termică cvasimonocromatică, amplitudinea și faza instantanee ale semnalului rezultat vor fluctua din cauza relațiilor de fază (și poate de amplitudine) care variază aleatoriu între semnalele componente individuale. O fluctuație mare a fazei semnalului rezultat este probabil însoțită de o fluctuație mare a amplitudinii. Astfel, trebuie să ne așteptăm ca comportamentul fluctuațiilor de amplitudine să spună ceva despre fluctuațiile de fază sau, mai precis, despre funcțiile de corelație pentru semnalele optice.

Această așteptare este corectă pentru lumina termică, așa cum vom arăta în mod explicit în continuare. Dacă lumina are coerență reciprocă în două puncte P1 și P2 din spațiu, există o corelație pozitivă în fluctuațiile densității fluxului. Dacă există o fluctuație pozitivă în privința mediei la P1, atunci există o probabilitate mai mare a unei fluctuații pozitive a mediei la P2 decât a unei fluctuații negative. În mod similar, o fluctuație negativă la P2 va însoți o fluctuație negativă la P1 mai des decât o fluctuație pozitivă la P2.

Putem folosi acest efect pentru a măsura coerența spațială (și temporală). În astronomie, coerența spațială a Luminii dintr-o sursă stelar depinde de dimensiunea și forma sa. Tehnica de corelare a fluctuațiilor de amplitudine poate fi folosită cu mare avantaj pentru a măsura diametrul unghiular al stelelor.

A. Interferometria corelației

1. Aranjament experimental. Un fotomultiplicator sau un alt detector sensibil la energie de Iight va da un semnal de ieșire proporțional cu fluxul optic incident asupra acestuia, mediat pe un interval de timp T. Vom abandona terminologia precisă și ne vom referi la flux ca „intensitate”. Presupunem că avem coerență spațială deplină în zona sensibilă la lumină a fiecărui detector. Atunci se poate vorbi de o intensitate „instantanee” definită wçll S(t) la un detector, dată de o medie extrem de rapidă a lui E2. Presupunem la început că timpul de mediere T este mult I mai mic decât timpul de coerență τc al luminii. Blocăm componenta medie a ieșirii detectorului, care va fi proporțională cu intensitatea medie pe termen lung <$>, și detectăm doar componenta Auctuating, care este proporțională cu fluctuația intensității (Fig. 8.15)

$$\Delta S(t) = S(t) - \langle S \rangle \quad (8,138)$$

Anterior, când doream să studiem coerența reciprocă între două puncte P1 și P2, am creat găuri sau fante și am încercat un experiment de interferență Young (Fig. 8.10). Acum punem detectoarele PM 1 și PM2 la P1 și P2, așa cum se arată în Fig. 8.16a. Ieșirea de la PM2 este întârziată τ sec prin trecerea printr-o linie de întârziere variabilă. Semnalele rezultate, care vor fi proporționale cu ΔS,1(t) și $\Delta S2(t - \tau)$ sunt apoi introduse într-un corelator, care este un dispozitiv care ia media pe termen lung a lor.

55¿ Coerenţă

$\Delta S(t0)=S(t0)-\langle S \rangle$

Fig. β.15 Reprezentarea schematică a (a) a densității de flux instantanee S(t); (h) fluctuațiile instantanee ale densității fluxului ΔS(t); și (c) fluctuațiile netezite ale densității fluxului.

produs. Henee producția sa este proporțională cu

$$\langle \Delta S1(t)\ \Delta S2(t - \tau) \rangle$$

iar aceasta este studiată în funcție de variabilele independente τ și a.

Dacă se dorește să se ajungă la Iimit a = 0, se poate folosi aranjamentul din Fig. 8.160. La $\alpha = 0$, ieșirea este proporțională cu funcția de autocorelare $\langle \Delta S(t)\ \Delta S(t - \tau) \rangle$ a fluctuațiilor de intensitate, deoarece atunci $S1(t) = S2(t) \sim S(t)$.

2. Lumină termică cvasimonocromatică. Calculul funcției de corelare este destul de implicat și nu va fi dat aici. Se exprimă semnalul Iight ca o suprapunere de semnale din mai multe surse independente și se procedează la calcularea AS și a funcției de corelație dorită. În ipoteza că toate sursele au aceeași funcție de distribuție spectrală, rezultatul este

$$\langle \Delta S1(t)\ \Delta S2(t - \tau) \rangle = \langle S \rangle 2\ |\ /12(\tau, \alpha)\ |\ 2 \quad (8,139)$$

Aici 712 este „gradul complex de coerență” al ecuației. (8.119). Prin reducerea proprietății Eq. (8.126)

$/\iota 2(\tau, a) = /(\tau)\gamma j2(0, a)$

(A)

(ò)

Rg. β.16 Dispozitive pentru corelarea fluctuației densității fluxului la P1 și P2- (a) P1 și P2 separate; a > 0. (b) P1 și P2 identice cu a → 0.

Din Ecs. (8.121) și (8.127) avem rezultatul

$|/12(\tau,\alpha)| = t7(\tau)F(\alpha)$

Astfel, Ec. (8.139) poate fi de asemenea scris

$\langle \Delta 51(t)\ \Delta S2(t - \tau)\rangle = \{Sy2U2V2 \quad (8,140)$

Aceasta este rezultatul de bază care face legătura între corelațiile intensitate-fluctuație cu proprietățile de coerență.

3. Timp mediu lung. Există o dificultate practică neglijată în derivarea ecuației. (8.140). Ea provine din incapacitatea noastră de a efectua media „instantanee” necesară pentru intensitatea asumată în derivația anterioară. Circuitele electronice pur și simplu nu pot răspunde suficient de rapid. În schimb, este mai probabil să măsurăm o intensitate netezită dată de o medie similară cu

$1\ \Gamma 772\ S(t0) \equiv \tau\ IS(i + to)\ dt$

$1\ J\ -T/2$

unde S(t + t0) este media instantanee utilizată anterior. Deviația ΔS a lui S față de media sa pe termen lung {S) este mult mai netedă, așa cum se arată în Fig. 8.15. Aceasta

reprezintă semnalul corelat de către aparatul din Fig. 8.16.

$\langle \Delta S1(t0)\ \Delta S2(t0 - r)\rangle \equiv \langle [S1(i0) - \langle S\rangle][S2(t0 - \tau) - \langle S\rangle]\rangle$

unde (· · ·) reprezintă acum o medie pe termen foarte lung peste T

Când se fac aceste modificări, se poate demonstra că Ec. (8.140) trebuie înlocuit cu expresia x

$\langle \Delta 51(la)\ \Delta S2(t0 - \tau)\rangle = |-j/(\alpha)j2 \quad (8,141)$

Unde

$\xi(T,\tau) = H (T- | r |)[i/(\tau + t)]2\ dt$ (8,142)

*j-т

În majoritatea situațiilor reale, timpul de măsurare T este mult mai lung decât timpul de coerență τc. Apoi Eq. (8.142) oferă un rezultat aproximativ

ÍO, $\tau > T'$)

$<\Delta S1(t0)\ \Delta S2(t0 - \tau)> = |<s>2[F(\alpha)]2(\tau c/T), \tau < TJ$ (8'143)

Aceste ultime relații sunt valabile cu excepția cazului în care |(|τ |— T)| ~ rc.

Reducerea în Eq. (8.143) prin factorul $\tau c/T<\xi 1$ face ca fluctuațiile netezite mult mai ușor de observat decât fluctuațiile instantanee date de Ec. (8.140). Această concluzie este sugerată și de o comparație a Fig. 8.15c la 8.15b. Dar rețineți că Ec. (8.143) spune că putem măsura încă funcția de vizibilitate

V(a) =

4. Exemple. Corelația fluctuațiilor de intensitate într-un fascicul de lumină a fost pentru prima dată demonstrată experimental de R. Hanbury Brown și RQ Twiss în 1956. Aparatul lor a fost similar cu cel prezentat în Fig. 8.16b. Sursa a fost o combinație de lampă cu mercur-filtru cu un timp de coerență τ de aproximativ 1 ns, iar electronica a avut un timp efectiv de integrare T de aproximativ 40 ns. Ei au verificat comportamentul prezis de Ec. (8.143).

Odată ce au stabilit existența fluctuațiilor de intensitate corelate folosind surse Iaborator Iight, Hanbury Brown și Twiss au aplicat tehnica interferometriei stelare. Aranjamentul este în esență cel din Fig. 8.16a, cu fototuburi plasate la punctele focale ale două oglinzi mari, așa cum se arată în Fig. 8.17. (Au fost utilizate ulterior diametre de oglindă de până la 7 m.) Oglinzile formează imagini ale stelei dorite la cei doi fotocatozi. Aceste imagini nu trebuie să fie de înaltă calitate optică. Separarea telescopului a poate fi deplasată prin mișcarea lor pe șine. Liniile de bază foarte lungi sunt practice.

În interferometrul stelar Michelson trebuie să menținem toleranțe dimensionale la o fracțiune de lungime de undă; În caz contrar, modelul de interferență „se spală”. Într-un interferometru de intensitate-fluctuație cerințele sunt extrem de relaxate. Dimensiunile mecanice trebuie menținute la o mică fracțiune de St sau de

Fig. 8.17 Hanbury Brown și

Interferometru stelar cu corelație Twiss.

cT, oricare dintre acestea este mai mică. Erorile de sincronizare din fluctuațiile timpului de tranzit în circuitul electronic ar trebui să fie mult mai mici decât Tsec ca durată.

B. Considerații cuantice

Un al doilea efect neglijat în tratarea secțiunii 8.4A implică natura cuantică inerentă a luminii și a procesului prin care sunt măsurate intensitățile luminii. Radiația electromagnetică ajunge la un detector în cuante de energie de cantitatea hv, unde h este constanta lui Planck. Acest fapt provoacă fluctuații suplimentare de intensitate dincolo de cele deja discutate și introduce o sursă importantă de „zgomot".

1. Contor cuantic. Pentru certitudine, presupunem că folosim un detector fotoelectric, cum ar fi un fotomultiplicator, ca un contor cuantic unde numără fotoelectronii individuali. Presupunem că singura sursă de „zgomot" sau fluctuații ale curentului fotoelectric este natura cuantică a procesului fotoelectronic sau, ceea ce este același lucru, faptul că curentul rezultă din fluxul de particule individuale încărcate.

Înțelegem S(t) fluxul mediu pe timp scurt care ajunge la detector. Apoi, într-un interval mic de timp, energia dt 5(t) dt a ajuns la detector. Datorită naturii cuantice a luminii, această energie ajunge în cuante sau „fotoni" de mărimea hv, unde v este frecvența luminii. Fiecare cuantă poate emite un fotoelectron, despre care vom presupune că va fi detectat cu probabilitate unitară de către circuitele electronice asociate. Într-un fotomultiplicator, fiecare fotoelectron este înmulțit pentru a da o sarcină puise de aproximativ IO6 electroni care poate fi colectat în câteva nanosecunde. Probabilitatea ca un foton să producă 1 fotoelectron se numește „randament cuantic" a.

Când fluxul S(t) dt ajunge la detector, numărul dn(t) de fotoelectroni emiși va fluctua din cauza naturii statistice inerente a procesului fotoelectric. „Valoarea așteptării" sau valoarea medie a multor experimente va fi notată cu [dn(t)] și este dată de

[dn(t)] = (8,144)

hv

Numărul mediu de fotoelectroni detectați într-un interval de timp egal cu timpul mediu T al detectorului este

i't0 + T | 2 ri<Z(f, \

0^dt (8,145)

la - T/2 ("v)

560 Coerenţă

Pentru lumina termică, fluxul 5 ~ A2 este o variabilă aleatorie gaussiană, așa cum sa discutat în legătură cu Fig. 8.7. Investigații detaliate ale statisticilor fotonului au arătat că în acest caz nu este necesar să se distingă valoarea instantanee H(to) de valoarea medie EH(G)J- ɪbe fluctuațiile în H(G) pot fi apoi tratate ca fiind datorate în întregime fluctuațiilor. în S(G)• Se procedează deci folosind

*•'=лг (8146)

Media pe termen lung a Eq. (8.146) dă

<«> = <">=^ τ<s>

Considerăm acum numărul de numărări n1 și n2 măsurat de contoarele PMl și PM2 din Fig. 8.16. Fluctuațiile vor fi date de

Δn1(la) = H1(G) - <"> = TTSi(G) - <s>]

= -AS1(G)

și

Δn2(t0 ~ τ) = δS2(G - ɪ)

Apoi putem calcula funcția de corelație pentru deviația numărului de electroni

<An1(G)An2(G - τ)>

ot,T \ 2 -

) <AS1(G)AS2(Gt)>

Dacă folosim Eq. (8.141), aceasta devine

<Δn1(la) Δn2(⅛ - τ» = (~^ \ 2 V2M ɪ

\ hv J T

= ζn)2VXa)^^ (8,147)

Ecuația (8.147) spune că pentru valorile lui a și τ care dă V2ξ > 0, există o corelație pozitivă între excesul de numărare la PMl și cele la PM2. Astfel, o numărare la PMl este mai probabil să fie însoțită de o numărare la PM2 decât s-ar aștepta pe baza purului hazard. Astfel de numărări corelate se numesc coincidențe.

2. Coincidență. Să presupunem că T este suficient de scurt astfel încât numărul mediu de numărări <n> în timp T este mult mai mic decât unitatea. Funcția H1(G) este apoi prezentată Schematic în graficul de sus din Fig. 8.18. Dacă un fotoelectron este emis la momentul t1, atunci H1 (G) este unitate pe un interval de timp de lungime T centrat pe G = G-

Fig. 6.16

În aceste condiții, produsul n1(t0)n2(t0 — τ) dă apoi unitate atunci când atât PMl cât și PM2 au un număr, iar zero În caz contrar. O astfel de coincidență va apărea ori de câte ori | t1 — t2 | ≤ T (Fig. 8.18), iar lățimea suprapunerii puise pe o diagramă de ∏1(t0)n2(t0 — τ) față

de t0 va fi T— | tl — t21, care variază de la O la T și are o medie de T/2. Prin urmare, numărul mediu de coincidențe pe secundă va fi

2<n1(t0)n2(t0 - 0>

n = --------------------

= ВД + Иа)«^г

(8.148)

Dacă n1 și n2 ar fi pur aleatoriu mai degrabă decât corelate, ar exista o rată de coincidență accidentală dată de

Pa

2<n>2

= 2Tp2l

(8.149)

T

Unde

<n>

Pl~ p

(8.150)

este rata medie de detectare a fotoelectronilor unici. Atunci putem scrie

Pc = PaLl + rfì unde η - V2(a)

(8.151)

Aici [1 -I- η] este factorul de îmbunătățire rezultat din corelații.

562 Coerenţă

Dacă numărăm coincidențele pentru T0 sec, ar exista o medie de

Ñ. = T0pa =   = 2T0Tp,(8.ɪ52)

accidentai coincidenţe şi

Nc = T0pc = Nfl[l + η] '   (8,153)

coincidențe în ansamblu.

Cât de precisă va fi o anumită determinare a Na sau Nc? Ne așteptăm ca coincidențele în sine să fie evenimente aleatoare necorelate. Atunci deviația standard pentru o singură determinare a Na sau Nc este

estimată în mod convențional a fi χ/Nα sau respectiv y/Nc. Când N nu este prea mic, aproximativ 67% din determinările individuale ale lui N vor fi în intervalul N + χ/N și mai mult de 95% în intervalul N + 2λ/N.

3. Zgomot. Pentru a măsura η în orice certitudine, am dori ca diferența Nc – Na să fie un ordin de mărime I mai mare decât y/Nc. [Dacă Na a fost determinat anterior cu o precizie ridicată, atunci eroarea în (Nc – Na) va fi cea a lui Nc, și anume + y/Nc]. Acest rezultat poate fi exprimat sub formă

Nc-Na = ηNa ± √TTr Д (8,154)

Raportul semnal-zgomot SNR este definit ca valoarea medie a semnalului împărțită la deviația sa standard:

SNR = - ,η - JNa (8,155)

√1 +η

În detectorul lent Iimit unde τc <ξ T, η = V2(a)τc/T<⅛ 1, și avem

SNR = Γ⅛)M (p1τc) (8,156)

Pentru lumina termică fără laser, produsul p1τc va fi 10-2 sau mai mic.

Pentru o estimare numerică, luați plτc = 10-3, V(a) = 0,1, T= 10 nsec. Atunci pentru SNR = 10, T0 = 5000 sec ≈ 1,5 h. Aceasta este o valoare tipică pentru timpul de numărare T0. Dar rețineți că pentru SNR = 1, T0 = 50 sec.

În detectorul rapid Iimit când T< τc, avem η = V2(a)U2(τ), iar (8.155) se poate scrie

SNR

[F(fl)ι/(τ)]2 /2T0T \ 1'2 ʌ = ~ Ί i-------------2~ (P 1 Tc)

√T + V2U2 \ NJ

(8.157)

Această incertitudine în rezultatul unei singure măsurări a (Nc – Na) se datorează naturii partide cuantice a Iight și este adesea numită zgomot de împușcare fotonică. Deoarece aceleași procese cuantice intrinseci sunt implicate în măsurătorile corelației fluctuațiilor de intensitate, unde fotoelectronii individuali nu sunt

socotit în mod explicit, acest tip de zgomot trebuie totuși să fie prezent. Deoarece o măsurare a lui (Nc – Na) este în esență echivalentă cu o determinare a <ΔS1(t') ΔS2(t' – t)), acesta va avea, de asemenea, un raport semnal-zgomot dat de Ec. (8.155), (8.156) sau (8.157), unde T0 este intervalul de timp pentru determinarea mediei <···) și T este cel pentru determinarea lui S.

4. Parametrul de degenerare. Fluxul mediu va fi dat de

<Φ> = S(inc)σ

unde Ee(inc) este densitatea fluxului radiant incident (incidența radiantă) și σ este aria sensibilă a detectorului proiectată pe un plan perpendicular pe fasciculul luminos. Dacă se utilizează o oglindă de adunare a luminii sau Iens, ca în Fig. 8.17, atunci σ trebuie să fie aria sa proiectată. Prin analogie, cu Eq. (8.150), putem Scrie

a a -

Pi = τ-<Φ> = – 5(mc)σ

nv hv

Dacă sursa subtinde unghiul solid ΔΩ așa cum este văzut de la detector și are o radiație totală Le pentru Iight radiată în direcția detectorului, atunci 5 este dat pur și simplu de

S = Le ΔΩ

Apoi putem lega ΔΩ la așa-numita zonă de coerență σc la detector prin ecuație

Aceasta este o generalizare la două dimensiuni a noțiunii de coerență Iength /,t – λ/Δθ pentru o sursă de lățime unghiulară Δθ. Va exista o corelație certă între câmpurile electrice din două puncte din zona de coerență.

Astfel putem scrie

íLe Y2 σ f,'τ• = \ hvτ')λ σc

= ag- (8,159)

Această ultimă egalitate introduce parametrul de degenerare g. Deoarece Le este rata de energie radiantă emisă de sursă pe unitatea de timp, pe unitatea de suprafață și pe unitatea de unghi solid, putem interpreta

9 = (Hvl2 (8,Í60)

ynv J

ca numărul mediu de cuante de lumină sau fotoni (cu o polarizare definită) emiși într-un unghi solid unitar în direcția detectorului dintr-o zonă a sursei egală cu λ2 într-un interval de timp egal cu timpul de coerență τc. Deoarece

λ2 = ΔΩσc, putem de asemenea interpreta <5 ca numărul mediu de fotoni care ajung pe o suprafață cu suprafața σc la detector de la întreaga sursă în intervalul τc, sau ca numărul de fotoni la un moment dat care fili volumul de coerență

$F_c \equiv \sigma c \tau cc$ (8,161)

Pentru lumina cvasimonocromatică care este în echilibru termic la temperatura T (radiație de corp negru), parametrul de degenerare este dat de o formulă datorată lui Planck,

(8162)

cxp(mJ -1

unde k_B = constanta lui Boltzmann. Acest lucru poate fi scris și ca

θ =-----Д------- '·   (8,163)

(c2 λ   1

exp(jτ) - 1

$c_2 = hc/k_\beta$ = 1,438 cm-grade. Aici g este, de obicei, mult mai mică decât unitate.

Pentru lumina de la un laser, g poate fi la fel de mare ca 1012. Cu toate acestea, lumina laserului nu este, de obicei, lumină termică în sensul tehnic necesar pentru a se aplica discuția anterioară a fluctuațiilor. Există o metodă de conversie a luminii dintr-un laser în „lumină cvasitermală” care are atât o valoare mare de g, cât și proprietăți statistice corecte prin trecerea ei printr-un mediu aleator în mișcare, cum ar fi o placă de sticlă șlefuită în mișcare.

Ô.5 Formarea imaginii: Obiecte incoerente

În secțiunea 7.3 am prezentat fundamentele formării imaginii prin refracție printr-o lentilă de contur sferică. Acolo am limitat discuția la obiecte coerente, cele mai mici decât lungimea coerenței transversale a luminii incidente. Aici extindem formalismul pentru a include surse parțial coerente.

O sursă perfect incoerentă nu există. Chiar și lumina dintr-un corp negru are o lungime de coerență la suprafața sa egală cu o lungime de undă medie λ. O suprafață difuză iluminată indirect va avea o lungime de coerență nu cu mult mai mare decât λ dacă lumina iluminatoare acoperă un unghi larg. Dacă se formează o imagine, lungimea de coerență crește, deoarece lumina din fiecare punct al obiectului formează un punct focal care este finit, din cauza difracției și aberațiilor. Lungimea coerenței rezultată trebuie să fie cel puțin la fel de mare ca dimensiunea acestui punct focal, care este de obicei mult mai mare decât λ ori mărirea. În acest caz putem neglija coerența foarte mică a sursei în sine.

Aceasta este presupunerea pe care o vom face pentru obiectele autoluminoase (sau termice) sau pentru obiectele difuze care sunt iluminate indirect cu fascicule cu unghi larg. Neglijăm orice coerență reciprocă dintre lumina din două puncte separate ale obiectului.

Densitatea fluxului este apoi obținută prin însumarea contribuțiilor individuale din toate punctele din obiect.

A. Funcții de transfer

Pentru un sistem liniar general, cum ar fi un amplificator electronic liniar, o intrare sinusoidală va produce o ieșire sinusoidală, cu, în general, o amplitudine și o defazare dependente de frecvență. Dacă se fac câteva ipoteze rezonabile, un sistem optic cu iluminare incoerentă poate fi considerat liniar, iar afirmația anterioară se va aplica atunci. Un amplificator electronic liniar procesează semnale care sunt funcții de timp; frecvențele Componentelor sinusoidale individuale sunt frecvențe temporale. Un sistem optic procesează semnale care sunt funcții a două variabile spațiale; Frecvențele corespunzătoare sunt frecvențe spațiale.

Cititorul trebuie avertizat să nu ducă prea departe analogia utilă între sistemele optice și amplificatoarele electronice liniare. Sistemele optice conectate împreună în serie nu vor produce în general un sistem având o funcție de răspuns care este produsul funcției de răspuns individual, așa cum este adevărat în cazul electronic.

1. Funcția Point-Spread. Luați în considerare Iight care își are originea într-un punct $P(x0, y0)$ al Forței A la o distanță de 5 de o lentilă, așa cum se arată în Fig. 8.19. Câmpul de la Iens va fi A/S, iar densitatea fluxului va fi KA2/S2, unde K este o constantă. Fluxul total care trece prin Iens va fi

Φ = K A2 σ J S2

(8.164)

unde aL este aria Ienilor aL = πfθ. Aceasta va fi neschimbată prin difracție și prin aberații.

În prezența aberațiilor și a difracției, câmpul în planul paraxial al imaginii este dat de Ec. (7.98), iar densitatea fluxului, în loc să fie o funcție delta la x'0, yQ va fi dată de

S(P,) aL λ2S'2 τb{λS, (X' x'0^λS^y' Уo))

(8.165)

Obiectiv

Fig. β.19

În acest rezultat am folosit Eq. (8.164) pentru A2. Factorul Tl este transformata Fourier a deschiderii Iens, incluzând abaterile de la factorul sferic de defazare (aberații). Aceasta arată că imaginea paraxială „punctează” la x'0, y'0 „se extinde”. Influența aberațiilor este de așteptat să fie mai puțin importantă decât forma fundamentală a deschiderii Iens, care duce la un model de difracție în planul imaginii. Există, în general, o zonă mult mai mare decât cea a „patului fodal” în care W(P, P'\ funcția de aberație, poate fi considerată constantă. Se numește plasture de izoplanatism, iar dimensiunea sa

reală depinde de Strictitatea criteriilor noastre. În aceste circumstanțe x', y' intră în Tl în esență ca parametri. Apoi funcția de împrăștiere a punctului, definită de

θ(x' - x'o, y' - y'0; P') ≡ 2

Λ ô

(8.166)

poate fi privit în primul rând ca o funcție a variabilelor de diferență x’ – x’0, y’ – y,0 cu o dependență suplimentară slabă de variabilele absolute x’, y,. Normalizarea lui 0 este unitatea:

∫∫ 0(x' – x'0, y – y'0; P') dx' dy, = 1 (8,167)

– QO

Funcția de răspândire pentru cazul ideal, limitat de difracție, în care nu există aberații, va fi notată cu Oo(x' – xó, y' – y'0)• ʊsing Eq. (7.101) pentru o deschidere circulară Iens obținem

Oo(x'-x0,y-yo;^') = ^! 2j^ (8,168)

unde w este definit în Ec. (7.102)

ɔ σr T

w = T⅛[(χZ ^ x°)2 + (/ “yô)2]1/2 (8-169)

O caracteristică a acestui rezultat, precum și a celei obținute cu orice deschidere simplă, este aceea

°oi°,0^(⅛ (8170)

Distribuția densității fluxului în planul imaginii descris de Ec. (8.166) este prezentat schematic în Fig. 8.20.

Fără aberații, funcția de răspândire este discul Airy cu inele centrate pe P'. Calculele au arătat că pentru o cantitate mică de aberație sferică, unde valoarea maximă a funcției de aberație W este o mică fracțiune a lungimii de undă, efectul principal este de a transfera energie de pe disc la inele. Cu aberații în afara axei, precum coma, funcția O nu mai are simetrie circulară; aceasta face ca inelele să fie neuniforme atunci când W este I mai mic decât Â. Fotografiile imaginilor de la un obiect punctual sunt prezentate în Fig. 8.21 când este prezentă comă primară. Nu este

Fig. β.20 Geometrie pentru o analiză a formării imaginilor în cadrul teoriei funcţiilor de transfer.

este necesar să se arate imagini pentru distorsiunea și curbura câmpului; sunt modele aerisite cu centrii deplasați lateral și, respectiv, longitudinal. De asemenea, cu alte aberații, dimensiunea funcției de răspândire poate fi de obicei redusă dacă planul de observare este deplasat oarecum de-a lungul axei z. Pentru o cantitate mică de aberație sferică primară, răspândirea este redusă la minimum la jumătatea distanței dintre focarele paraxiale și marginale. Acest lucru este evident din Fig. 8.25 în contextul oarecum diferit al funcției de transfer optic.

Fig. 0.21 (α) Imagine monocromatică a unei surse punctuale cu aproximativ cinci lungimi de undă de comă primară, (b) La fel, dar cu aproximativ jumătate din lungimea de undă a comei primare. (Fotografii cu amabilitatea lui RS Longhurst.)

Λ». '

Mai întâi un cuvânt despre așa-numitele erori de focalizare, care sunt, de asemenea, legate de curbura câmpului. Pentru a obține cea mai bună focalizare, ar trebui să deplasați planul de observație de-a lungul axei la o distanță Az dacă există un termen în Wproporțional la (n'F2 Δz/2L'2) unde rí este indicele după lentilă. Acest lucru poate fi scris

/ f \ 2 w= ni -

VoJ

unde λ este lungimea de undă în spațiul imaginii și unde I = (Δz/2z) (F0/L')2 oferă numărul de lungimi de undă ale „erorii de focalizare” la marginea (r = r0) a lentilei.

Pentru calcule generale cu aberații este convenabil să se exprimi W în multipli de λ în funcție de raza redusă F/F0 și unghiul azimutal $ la lentilă. Astfel, W = (l/2)2(F/F0)4 ar corespunde cu 1/2 lungime de undă a aberației sferice primare, W = ^λ(f | fO)3 cos $ la /, Lungimi de undă ale comei primare. În acest caz, coeficientul adimensional S este proporțional cu r', deplasarea lui P' față de axă, așa cum se arată în capitolul 4. Cu o combinație de astigmatism și curbură de câmp avem

/ f \ 2

W = ΠI —) [cos2 $ — µl

V0J

unde Í este proporțional cu r'2. Dacă planul de observație este planul imagine tangențial, atunci µ = 1 ; în planul imaginii sagital avem µ = 0; la jumătatea distanței, avem µ = 1/2.

Când funcția de aberație W(P, P) este mică în comparație cu λ, se pot lua primii trei termeni dintr-o extindere în serie a e~ikw în ecuația. (7.115) și deduceți următoarea expresie aproximativă pentru valoarea funcției de răspândire în punctul paraxial al imaginii (unde x' = mx0, y' = my0)

0(0, O; P) = ⅛ [1 - k2((W2) - <Hz>2)] (8,171)

unde „momentele” (Wn) ale PF sunt definite de

(Wn) =ɪ

σp

∫∫[IF(P P')]π |Tl(P)| JxJy

(8.172)

Ecuația (8.171) descrie modul în care aberațiile reduc intensitatea a ceea ce altfel ar fi centrul discului Airy. Unele aplicații ale acestor rezultate vor fi făcute în probleme.

2. Sursă extinsă. Fluxul de la o sursă punctuală se răspândește într-un punct focal descris de funcția de răspândire punctuală 0 (x' - x0, y' - y0; P'). Acum luați în considerare o imagine continuă descrisă de o funcție

Sp(x'o,⅛)

astfel încât o regiune mică a sursei se conjugă cu aria Jx' Jy' aproximativ x'0, y'0 radiază flux

JΦ = Sp(xo,yo) Jx', Jy'

prin lentilă. Densitatea fluxului paraxial Sp reprezintă predicția geometrică paraxială! optica pentru densitatea fluxului la planul de observare. Aceasta se va răspândi prin difracție și aberații și va produce densitatea fluxului

0(x' - x'0, y' - y'0; P') dΦ

în planul de observaţie în locul predicţiei geometrice. Densitatea totală a fluxului în punctul P'(x', ÿ) se obține apoi prin integrare:

00

S'(x', y') = ∫∫ 0(x, - x,0, ÿ — y'0; P')S,p(x,0, y'0) dx'0 dy,0 (8.173)

— 00

Ecuația (8.173) reprezintă S'(Pr) în termenii unui operator integral liniar care acționează asupra S'p(P'0). Este convenabil să se reprezinte S'p(P,0) ca o suprapunere a unei funcții simple, cum ar fi sinusurile și cosinusurile. Atunci S'(P') va fi dat ca aceeași suprapunere a sinusurilor și cosinusurilor transformate.

Se întâmplă că aceste funcții sunt o alegere deosebit de fericită, deoarece funcțiile sinus și cosinus transformate sunt stili sinus și

cosinus dacă sunt limitate la un singur petic de izoplanatism, așa cum suntem pe cale să dovedim.

Comparația Eq. (8.173) cu Ec. (6.91) arată că densitatea fluxului de imagine rezultată ia forma unei integrale de convoluție. Prin urmare,

S' = o@S'p (8,174)

3. Obiect incoerent sinusoidal Considerăm un singur petic de izoplanatism în planul de observație. O funcție pozitivă arbitrară S'p(P'0) care descrie densitatea fluxului paraxial acolo poate fi exprimată ca o integrală Fourier bidimensională pe frecvențele spațiale u', v'. Considerăm doar una dintre componentele Fourier și adăugăm la ea un termen constant pentru a menține S,p(P'0) nenegativ:

Sp(*'o> /o) = Deci{ 1 + b cos[2π(u'x'0 + ι/y'0)]}

= Re{S0(l + b exp[-z2π(u'x'0 + Fy'0)J} (8,175)

Aici b este modulația și este I mai mic decât sau egal cu unitatea. Această funcție este reprezentată schematic în două dimensiuni în Fig. 8.22. Coordonatele polare pentru frecvențele spațiale sunt

p' = ʌ/u'2 + F2 și φl = tan- 1(v,/u')

Fig. 0.22

Aici φ' dă direcția „undei normale”, iar \ /p' dă lungimea de undă de la creastă la creastă în această direcție.

Distribuția densității fluxului la obiect este conjugatul paraxial cu Eq.

(8.175) și este dat de

S(x0, Уo) = const ' sp(wxo, w>,o)v (8.176)

Pentru a obține densitatea reală a fluxului în planul imaginii, aplicăm ecuația. (8,173) la Ec.

(8.175) și obțineți

00

S'(x', /) = ReJs0 + S0b iï 0(x' - X0, y' - ⅛; P')e~i2^+v^ dx'0 dy'0 \

= Re | S0 + So6 e-i2π*"x+υyɔ

∞

X Jj 0(x'-x¿,y-yo;He_í2"[u(x'_x&)+v(/_yó>1^o^oj

— 00

= Re{S0 + S0b e~i2^ux' + v^0(u, v; P')}   (8,177)

Pentru că rămânem pe un singur petic de izoplanatism, am tratat P' în Ec. (8.177) ca parametru, nu ca variabilă care trebuie integrată. Funcția Ô care apare în Ec.

(8.176)   ca transformată Fourier se numește funcție de transfer optic (OTF). Dacă o scriem în formă

Ô = &fO] = | 0 \ eiψ   (8,178)

noi obținem

S'(x', y') = S0{l + b \ O(u, v; P') | cos[2π(ux' + vy') — ≠]} (8.179)

Tocmai am arătat că imaginea unui obiect sinusoidal incoerent este sinusoidală cu aceleași frecvențe (u, v) ca și cea a geometriei! imagine paraxiala. Cantitatea de modulație b va fi modificată de factorul | Ô |, iar faza decalată cu φ. Datorită rolului său în Ec. (8.178), |Ô| se numește funcția de transfer de modulație (MTF). Simbolul φ este uneori numit funcția de transfer de fază (PTF).

4.   Forma de corelare a funcției de transformare optică (OTF). Funcția de transmisie a Ienilor care descrie amploarea Ienilor și a aberațiilor se numește funcție de pupilă. Diferă de funcția completă de transmisie Iens prin faptul că lipsește defazarea care duce la o distorsiune parabolică a frontului de undă.

τp(P; P') = I τi,(P) |exp

W(P, P')

(8.180)

unde pentru un elev simplu | tl(P) | este definit ca fiind unitate în deschidere, iar zero În caz contrar. Folosim thè geometrica! teoria aberațiilor pentru a furniza W.

Vrem apoi OTF Ô în ceea ce privește funcția de elev. Rezultatul unui calcul shdrt, rezervat unei probleme, dă

Ô(u, v; P') =

dx dv

τp(x, ÿ; P,)τ*(x - /.Su, ÿ - λS,v; P')--

(8.1(1)

Această formulă exprimă Ô ca funcție de autocorelare normalizată bidimensională a funcției pupilei complexe. Pentru un elev simplu putem scrie

Ô(u, v; P') =

-ik[W(x, ÿ; P')

W(x - λS,u, ÿ - λS'v; P')

dx dÿ

Gl

(8.182)

unde ∑pc este intersecția pupilei care se deschide cu ea însăși atunci când este deplasată de (λS'u, λS,v).

Rețineți că pentru cazul de difracție Iimitat, adică atunci când nu există aberații și W= O, Eq. (8.182) dă Ô pur și simplu raportul dintre aria acestei intersecții și aria pupilei, σi,.

Se poate demonstra că MTF-ul unui sistem nu este niciodată mai mare decât OTF-ul unui sistem ideal fără aberații cu aceeași deschidere.

B. Exemple de funcții de transfer optic

1. OTF pentru o deschidere circulară: Difracție limitată. Pe lângă faptul că acționează ca o limită superioară a MTF pentru sistemele reale cu aberații, OTF-ul limitat de difracție este de interes în sine, deoarece în unele cazuri, cum ar fi obiectivele telescopului „limitate de difracție” (pe sau în apropierea axei), acesta este apropiat. Din definiția lui I τb(x, ÿ)| recunoaștem că produsul |tl(x, y) | • |tl(x – λS'u, ÿ – XS'υ) |dă unitate dacă și numai dacă punctele (x, ÿ) și (x – λS'u, ÿ – λS'υ) sunt ambele în deschiderea Iens . Integrala pentru OTF reprezintă atunci aria de intersecție a Iens care se deschide cu ea însăși deplasată de la origine la (x = λS,u, ÿ = λS,v). Aceasta este umbrită în Fig. 8.23α. Astfel Oo(uo, v0) reprezintă această zonă umbrită împărțită la aria Ienilor aL = πf⅛. Este clar că rezultatul poate depinde doar de distanța a = λS'p = λS'y/u2 + v2 care separă centrele celor două cercuri. Zona dorită este de patru ori cea umbrită în Fig. 8.23b, iar OTF este dat de

(8.183)

Frecvența spațială maximă care este transmisă de Sistem corespunde cu a = 2f0 și este

pm = -°   (8,184)

Pm λs,   V

Prin urmare

2 Í

O0(u, v) = - <cos

π

P_

P.m

(8.185)

Această funcție este reprezentată ca linie întreruptă în Fig. 8.25.

Ar trebui să subliniem că O0 descrie Ioss de contrast într-un sistem ideal limitat de difracție. De exemplu, când O0 — 1/4, am avea situația prezentată în Fig. 8.24, dacă obiectul ar fi un model de testare sinusoidal complet modulat. Dacă frecvența spațială în spațiul imaginii este p, este mp în spațiul obiect, unde m este mărirea transversală.

2. OTF pentru Real Systems. Unele remarci despre OTF-uri pentru sisteme reale sunt adecvate. A existat o literatură extinsă despre măsurarea OTF-urilor pentru Iense reale și calculul OTF-urilor pentru Iense cu aberații. Noi

Fig. β.24 Densitatea fluxului obiectului (a) și densitatea fluxului imaginii (b) când OTF = 1/4.

nu pot dedica aici mult spațiu numeroaselor detalii necesare unei bune înțelegeri. Unele rezultate calculate sunt prezentate în Fig. 8.25 și 8.27. În toate cazurile se presupune o deschidere circulară cu raza f0.

Figura 8.25 acoperă două cazuri în care funcția de aberație nu depinde de P'. Funcția de răspândire este atunci o funcție numai a lui y/(x' — x'0)2 + (y' — y'0)2, iar OTF este atunci o funcție numai a lui p = y/u2 + v2 și este reală . Pentru £ lungimi de undă ale erorii de focalizare funcția de aberație este

/ r\2 W= ή-] λ

VoJ

Curbele OTF rezultate sunt prezentate în Fig. 8.25a pentru ¿π = 0, 1, 2, 3, 4. Pentru /, lungimile de undă ale aberației sferice primare avem

4

(8.186)

W= A-) λ

VoJ

Acesta este pentru un plan de observație la focarul paraxial. Dacă deplasăm planul de observație de-a lungul axei, trebuie să adăugăm un termen ca Ec. (8.185). Asta da

2-

w= a

— 2µ(—

\ ro,

(8.187)

Parametrul µ este zero la focarul paraxial și unitatea la focarul marginal. Curbele pentru OTF pentru (= 1 sunt prezentate în Fig. 8.25b pentru µ = 0, 1/2, 1. Când (este

Fig. Ô.25 (a) Funcția de transfer de modulație pentru un sistem cu eroare de focalizare. [După HH Hopkins, Proc. Roy. Soc. (Londra) A231, 91 (1955). Folosit cu permisiunea The Royal Society.] (b) Funcția de transfer de modulație pentru o lungime de undă a aberației sferice, µ = 0 corespunde focarului paraxial, µ = 1 focusului marginal. [După G. Black și EH Linfoot, Proc. Roy. Soc. (Londra) A239, 522 (1957). Folosit cu permisiunea Societății Regale.]

f y

Fig. 8.24

mic, cea mai bună performanță se obține pentru µ = 1/2, la jumătatea distanței dintre focarele paraxiale și marginale. Rețineți că unele dintre curbele din Fig. 8.25 au OTF negativ. Acest lucru poate fi descris printr-un salt brusc în faza ψ de la 0 la π. Corespunde unei inversări de contrast (regiunile întunecate din obiect par luminoase) și duce la o rezoluție falsă, deoarece pentru obiectele care conțin frecvențe spațiale în care OTF este negativ avem rezoluție aparentă, în timp ce pentru obiectele care conțin frecvențe spațiale mai mici în apropierea locului în care OTF-ul este negativ. trece prin zero, există o rezoluție mică sau deloc.

Aberațiile în afara axei vor introduce o dependență de distanța în afara axei O'P'o în funcția de răspândire și OTF. Funcția de răspândire nu va mai avea simetrie de rotație față de P'o, dar va fi simetrică față de dreapta O'P'0. Din acest motiv, este convenabil să se definească un sistem de coordonate rotit cu axa x" de-a lungul acestei linii. OTF va depinde apoi atât de mărimea p a frecvenței spațiale, cât și de unghiul φ' dintre normala la crestele undei în modelul sinusoidal și axa x". Acest lucru este prezentat în Fig. 8.26. Când φ' = π/2, crestele din modelul sinusoidal sunt paralele cu axa de simetrie. Nu poate exista nicio schimbare de fază în afară de o inversare bruscă a contrastului. Pentru alte valori ale lui φ', ψ va fi în general diferit de zero.

De fapt, pentru astigmatismul primar, faza ψ este fie zero, fie π ca și în celelalte cazuri discutate până acum. Motivul este că funcția de împrăștiere a punctelor, deși nu mai posedă simetrie de rotație în

jurul P,o, stili are simetrie inversă față de P'o, adică aceeași la r'0 + a și la r'0 – a în Fig. 8.26. O astfel de funcție nu va avea transformată Fourier sinus, ci doar o transformată Fourier cosinus și o transformată exponențială care este pur reală. La jumătatea distanței dintre planurile imaginii tangențial și sagital, funcția de aberație pentru Í lungimi de undă ale astigmatismului primar este dată de

/f \ 2

w= ⅛2 $ - ⅛) -

\ r0/

(8.188)

Aici este geometria! optica dă cercul cea mai mare confuzie. Ideea-

Fig. 8.27 Funcția de transfer de modulație la cercul de cea mai mare confuzie pentru ¿ lungimi de undă ale astigmatismului primar. (După M. De, Proc. Roy. Soc. (Londra) A233, 91 (1955). Folosit cu permisiunea The Royal Society.]

Fig. 6.28 Funcția de transfer de modulație pentru o cameră tripletă Cooke Iens cu o lungime focală de 100 mm. (După Kingslake în R. Kingslake, ed., Applied Optics and Optical Engineering, Vol. 3, p. 19. Académie Press, New York, 1965.)

funcția de răspândire are o simetrie de patru ori față de P'o. Aceasta înseamnă că OTF pentru unghiul φ' este același cu cel pentru unghiul + (π/2) + φ'. Unele curbe OTF sunt prezentate în Fig. 8.27 pentru φ' = 0 (sau φ' = π) și pentru φ' = + l/2π (sau φ' = +3/2π).

Pentru Iense reale, rezultatele cu aberații mici tocmai discutate sunt adesea inadecvate și trebuie folosite alte metode bazate pe ray tracing sau alte tehnici de calcul digital.

Ca exemplu, prezentăm MTF pentru o cameră tripletă Cooke Iens în Fig. 8.28

P.m

Fig. 6.29 Funcția de transfer de modulație pentru un Tessar Iens la două/numere diferite. Rețineți că pm este diferit în cele două cazuri. (După RR Shannon în R. Kingslake, ed., Applied Optics and Optical Engineering, Vol. 3, p. 220. Académie Press, New York, 1965.)

pentru diferite valori ale unghiului în afara axei. Ca un alt exemplu, diagramele sunt date în Fig. 8.29 a MTF pe axă pentru un Tessar Iens la două numere f diferite. Acest lucru arată că comportamentul teoretic

limitat de difracție este abordat îndeaproape pentru Ien-urile bine proiectate utilizate la deschideri mici.

REFERINȚE

Arfken, G. Metode matematice pentru fizicieni. Académie Press, New York, 1970. Barnes, KR Funcția de transfer optic. Elsevier, New York, 1971.

Beran, MJ și GB Parrent, Jr. Teoria coerenței parțiale. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1964.

Born, Max și Emil Wolf. Principii de optică. Pergamon Press, Oxford, 1980.

Breene, RG Schimbarea și forma liniilor spectrale. Pergamon Press, New York, 1961.

Cummins, Herman Z. și Edward Roy Pike, ed. Corelarea fotonilor și spectroscopie de batere a luminii; (Proceedings of NATO Advanced Study Institute, Capri, 1973). Plenum Press, New York, 1974.

Dainty, JC, ed. Speckle laser și fenomene conexe. Springer-Verlag, Berlin, 1984. Duffieux, PM The Fourier Transform and Its Application to Optics. Wiley, New York, 1983. Françon, Maurice. Difracție: coerență în optică. Pergamon Press, Oxford, 1966.

Françon, Maurice. Formarea și procesarea imaginii optice. Académie Press, New York, 1979.

Garbuny, Max. Fizica optică. Académie Press, New York, 1965.

Goodman, Joseph W. Introducere în optica Fourier. McGraw-Hill, New York, 1968. Goodman, Joseph W. Statistical Optics. Wiley, New York, 1984.

Kingslake, Rudolf. Fundamentele pentru proiectarea lentilelor. Académie Press, New York, 1978.

Klauder, John R. și ECD Sudarshan. Fundamentele opticii cuantice. Benjamin, New York, 1968.

Lengyel, Bela A. Introducere în fizica laserului. Wiley, New York, 1966.

Levi. Leu. Optica aplicata. Vol. II Wiley, New York, 1980.

Linfoot, EH Fourier Methods in Optical Image Evaluation. Focal Press, Londra, 1964. Loudon, R. The Quantum Theory of Light. Oxford Clarendon Press, Londra, 1973. Marathay, Arvind S. Elemente of Optical Coherence Theory. Wiley, New York, 1982. Martin, LC Teoria microscopului. Elsevier, New York, 1965.

Mertz, Lawrence. Transformări în optică. Wiley, New York, 1965.

O'Neill, EL Introducere în optică statistică. Addison-Wesley, Reading, Mass., 1963. Smith, William V. și Peter P. Sorokin. Laserul. McGraw-Hill, New York, 1966. Steel, WH Interferometry. Cambridge University Press, Cambridge, 1967.

Troup, CJ Teoria coerenței optice — Evoluții recente. Metheun, Londra, 1967.

Probleme

Secțiunea 8.1 Coerența temporală

1. Arătați că Vizibilitatea minimă care va fi observată cu o sursă care emite două fine spectrale infinit înguste la frecvențele v_i și v_j cu densitățile de flux asociate S_i și $S_j < S_i$ este

$S_i - S_j$

$S_i + S_j$

Este posibil să se determine ce frecvență este mai mare dintr-un studiu al curbei de vizibilitate? Explica.

57 Ô Coerenţă

2. Demonstrați că P(y~) și $\gamma(\tau)$ sunt transformate Fourier unul de celălalt. Adică demonstrează că dacă

$7(\tau) =$

$P(v) \cos(2\pi v\tau)\, d\tau$

apoi

$P(v) = 4$

$y(\tau) \cos(2\pi v\tau)\, d\tau$

3. Demonstrați că pentru o sursă cvasimonocromatică a cărei frecvență este Concentrată în jurul v_0 integrala de suprapunere Eq. (8.3α) ɪs echivalent cu Eq. (8.3i>). Acesta este,

i'∞

$A(v) \cos[2\pi vt + \varphi(v)]\, dv$ o

Determinați funcțiile A(í) și $\varphi(t)$.

4. Discutați cantitativ modelul de interferență care ar fi observat în funcție de τ dacă funcția de distribuție spectrală este fiat de la v_0 la $2v_0$, dar în caz contrar zero, adică pentru

$S(v) = S_0$, constantă pentru $v_0 < v \leq 2v_0$

$S(v) = O$, în caz contrar

5. Demonstrați ecuațiile. (8.40) până la (8.42), care definesc y(τ), (7(τ) și Φ(τ) pentru з sursa cu două frecvențe.

6. Să considerăm o sursă de lumină alcătuită din două fine cvasimonocromatice de aceeași formă centrate la frecvențele vi și vj. Funcția de distribuție spectrală va fi

P(v) = ⅛D(v - vi) + fD(v - vj•)

Mai mult, să presupunem că D(μ) este simetric în jurul μ = 0 și că

D(μ) cos 2πμτ dμ = exp

Lăsa

1

Vi > Vj•, - <⅛ (Vi - Vj) « Vj..

τ0

Calculați funcția oscilativă normalizată y(τ) și schițați-o. Cum se compară cu Fig. 8.46?

7. În ceea ce privește separarea oglinzii d, găsiți perioada modelului de ritm în sistemul de franjuri și separarea dintre franjuri pentru interferență într-un interferometru Michelson. Utilizați Iight din dubletul de sodiu. Să presupunem

ambele componente au aceeași rezistență și au lungimi de undă de 589,593 nm și 588,996 nm. Să presupunem că lățimile liniilor sunt mult mai mici decât separarea dintre componente.

8. Determinați termenul oscilator normalizat în modelul de interferență al unui interferometru Mjchelson expus la radiații cvasimonocromatice definite de

Z>(μ) = D0

/2πμ \

1 + cosi —— I

\ Av /

= 0,

Av

Ixl ≤ y

Av IpI >y

9. Această problemă se referă la determinarea cantitativă a puterii de rezoluție a unui spectrometru de interferență. Fie semnalul detectorului să fie proporțional cu S = So[1 + γ(τ)] și se utilizează

$\gamma(\tau)$ =

P(v) cos(2πvτ) dv

Deoarece timpul de întârziere este limitat de cursa oglinzii, τ trebuie să fie I mai mic decât

_ ⅛-

ɪmaa

Ceea ce se măsoară de fapt este o funcție de autocorelare trunchiată

yr(τ) = y(τ) dacă | τ |≤ τmax, = O În caz contrar

(a) Să se arate că dacă γτ(τ) este utilizat în ecuația de transformare inversă

i'∞

y(τ) cos(2πμτ) dτ

o

se va obţine o distribuţie de frecvenţă măsurată care este dată de

PmM =

P(v')

o

sin 2π(v' - v)τ,nax π(v' – v)

+ sin 2π(v, + v)τmax^ π(v + v')

dv'

Acum considerăm P(v) de forma prezentată în Fig. 8.30. Aici V0Tma1 ɪ- Atunci Doar primul termen din integrala funcției de distribuție spectrală normalizată măsurată tocmai prezentată este important pentru frecvența pozitivă. Schițați comportamentul lui Pm(v) în următoarele cazuri.

(b) Când Av > l/τmax.

Probleme 579

(c) Când Δ V -≤ l/τmax. Nu veți avea nevoie de o formă funcțională explicită pentru P(v).

(d) Ce are de spus rezultatul părții (c) despre puterea de rezolvare?

10. Să presupunem că o linie cvasimonocromatică foarte îngustă de frecvență v0 este măsurată pe un spectrometru de interferență. Se

presupune că lățimea liniei respectă $\Delta v < l/\tau_{max}$. În loc de trunchierea bruscă obținută prin utilizarea directă a $\gamma_T(\tau)$ experimentală discutată în problema 4, să presupunem că netezim y Iinițial pentru a obține o nouă funcție

/(ɪ) = To(*/1 - — \ M ≤ ɪmaɪ

\ M

= 0,

In caz contrar

unde $y_0(\tau) \approx \cos(2\pi v_0 \tau)$. Discutați cu ecuații și o schiță spectrul de frecvență obținut dacă se folosește $y_s(\tau)$ în Ec. (8.22) și comparați acest lucru cu rezultatul dacă $\gamma_T(\tau)$ din problema precedentă este utilizat cu $y(\tau) = \gamma_0(\tau) \approx \cos(2\pi v_0 \tau)$ (vezi Fig. 8.8.) Care metodă crezi că dă putere de rezoluție mai mare° Care metodă dă mai puține mișcări false în spectrul de calcul? (Operația descrisă se numește apodizare, ceea ce înseamnă „înlăturarea picioarelor”).

Secțiunea 8.2 Statistica! Optica

11. Deduceți Ec. (8,82). Aceasta este o formă a teoremei lui ParsevaF.

12. Deduceți rezultatele ecuațiilor. (8,86). Găsiți fie Δv, fie

V

13. Un laser cu impulsuri operează la o lungime de undă de 532 nm cu o lățime a impulsului de 70 nsec. Formele frecvențelor permise într-un laser sunt definite de Caracteristicile rezonante ale cavității. Cu toate acestea, presupunând

că lărgirea trunchierii influențează și formele I, determină funcția de distribuție spectrală și funcția de autocorelare normalizată pentru o singură linie rezultată din durata finită a impulsului. În ce gamă de diferențe de cale optică ar trebui să funcționeze un interferometru Michelson, astfel încât această formă să fie rezolvată?

14. O aplicare instructivă a ecuațiilor. (8.63) este la o sursă constantă (A = constantă) unde diferența de fază

Δ</>(τ) ≡ φ(t) — φ(t — τ)

este o variabilă aleatorie gaussiană. Folosind teoria probabilității putem arăta că $\langle[\Delta\phi(\tau)]^n\rangle = 0$ pentru toate puterile impare n. Pentru puterile egale mediile pot fi legate de valoarea pătrată medie a diferenței de fază, după cum urmează. Dacă definim $\langle[\Delta\theta(\tau)]^2\rangle = \sigma^2(\tau)$, atunci $\langle[\Delta\phi(\tau)]^4\rangle \equiv 3\sigma^4$, $\langle[\Delta\phi(\tau)]^6\rangle \equiv 3 \cdot 5\sigma^6$, $\langle[\Delta\phi(\tau)]^8\rangle \equiv 3 \cdot 5 \cdot 7\sigma^8$ și așa mai departe. Folosind aceste rezultate, arată că

Dc(τ) = <cos Δ</>(τ)> = expi

g2(τ) \

2 /

și

$D_s(\tau)$ = <sin Δ≠(τ)> = 0

(Putem arăta în continuare că $\sigma^2(\tau)$ poate fi scris sub forma $\sigma^2(\tau)$ = | τ | /τ1. τ1 reprezintă atunci timpul de întârziere pentru care schimbarea de fază pătratică medie este de 1 rad. Funcția de autocorelare este atunci

lɪl \

2τl)

γ(τ) = exp

cos(2πν0τ)

15. Arătați că $D_c(\tau)$ așa cum este definit de Ec. (8.30a) este par,

$D_c(\tau) = D_c(-\tau)$, și că $D_s(\tau)$ așa cum este definit de Ec. (8.30b)

este impar, $D_s(\tau) = -D_s(-\tau)$. Arătați în continuare că ecuațiile. (8.30a și b) pot fi combinate într-un singur complex Fourier

integrală, care la inversare dă

D(μ) = FU(τ)eiφw e~i2πμτ dτ

J-CC

[Dc(τ) - iDs(τ)]e-'2π''t dτ

Acum împărțiți D(μ) în părți pare și impare:

D(μ) = De(μ) + D0(μ)

De(μ) = ⅛[D(μ) + D{ -μ)]

D0(μ) = ⅛[D(μ) - D(-μ)]

Apoi obțineți rezultatele

De(μ) =

Dc(t) cos(2πmt) dt

Unde

<cos[φ,(i) - φ(t - τ)]> = exp(-τ2/t?)

<cos[φ/t) - φft - τ)]> = exp(-τ/t?)

= 2

Dc(t) cos(2πmt) dt

— D0(μ) = Ds(τ) sin(2πμτ) dτ J - ∞

= 2 Í Ds(τ) sin(2πμτ) dτ J 0

16. Luați în considerare suprapunerea a două unde cosinus, fiecare având aceeași anvelopă care variază lent:

£(t) = A(t) cos(2πvit) + Λ(t) cos(2πvjt)

= 2Λ(t) cos(2πv0t) cos(2πft)

Unde

V0 = ⅜0z + Vj)' f= ⅛(v≈ - Vj) > 0

Să presupunem că/< v0 și că Λ(t) variază lent în raport cu cos(2π ft).

(a) Găsiți o expresie aproximativă pentru funcția de autocorelare normalizată pentru £(t) și schițați rezultatul.

(b) Folosind rezultatul din (a), găsiți o expresie aproximativă pentru funcția de distribuție spectrală pentru această sursă, aplicând Eq. (8,70). Rezultatele ar trebui să arate ca în Fig. 8.31.

17. Luați în considerare o sursă constantă care emite două linii cvasimonocromatice constante, astfel încât câmpul electric să fie de forma

£(t) = Ai cos[2πvit + <pi(t)J

+ Aj cos[2πvj t + φ/í)], Ai, constante Aj

iar unde mediile sinusurilor sunt zero, cu

viti > 1, Vjtj > 1, ti^ tj, vi > vi — Vj > 0 Găsiți expresii pentru }, (τ) și pentru P(v).

18. Lumina dintr-o sursă cvasimonocromatică la 656,3 nm este analizată cu un interferometru Michelson. Condițiile de interferență pot fi menținute pe o diferență de lungime a traseului de 20 cm. Care este lățimea liniei presupunând extinderea coliziunii?

19. Pe ce interval de diferență de lungime a căii optice ar trebui să funcționeze un spectrometru de interferență, astfel încât să poată rezolva „lățimea naturală a liniei” a unei tranziții atomice definite de lărgirea pe timp de viață? O valoare tipică a t¿ este 10-8 sec.

Secțiunea 8.3 Coerența spațială

20. Arătați în mod explicit că marginea de ordinul zero se mișcă în sus cu un unghi $\theta' = \theta$ când sursa se mișcă în jos cu un unghi θ. Includeți o derivație detaliată a ecuației. (8,88).

21. Arătaţi că Ec. (8.90) pentru două surse punctuale de tărie egale poate fi scrisă în forma $S = S_0(1 + \gamma_{12})$, unde $S_0 = S_1 + S_n$ și se determină γ_{12} dacă sursele sunt situate la $\theta = \theta_1$ și, respectiv, $\theta = \theta\pi$. Să presupunem că sursele au aceeași frecvență, aproape monocromatică. Deduceți o ecuație pentru vizibilitatea $V(a)$.

22. Deduceți echivalentul Eq. (8.93) pentru surse cu trei puncte.

23. Un ecran este plasat în fața unei mari surse difuze incoerente de lumină cvasimonocromatică cu lungimea de undă λ. Are două deschideri sub formă de fante lungi și înguste la distanță de 11. La o distanță $D_1 > a_1$ de primul ecran se află un al doilea ecran cu o pereche de fante similare lungi și înguste, cu separarea a_2 orientată paralel cu prima pereche de fante. Franjele de interferență sunt observate pe un al treilea ecran la o distanță $D_2 > a_2$ de al doilea ecran. Pentru valorile fixe ale lui D_2, a_1 și a_2, la ce valori ale lui D_1 vor dispărea franjuri? (Vezi fig. 8.32.)

24. Arătați că deplasarea egală a tuturor surselor într-un experiment cu dublă fante a lui Young după unghiul θ_0 rezultă

într-o schimbare de fază a gradului complex de coerență dat de

25. Luați în considerare o stea dublă. Componentele au intensități egale. Separarea lor este atât de mică încât vizibilitatea franjurilor la separarea maximă a fantei α_{max} este încă aproape de unitate. Care ar fi această vizibilitate dacă α_{max} este o zecime din valoarea necesară pentru a da primul zero în vizibilitate?

26. Care este cel mai mic diametru unghiular al stelelor care poate fi măsurat de interferometrul stelar Michelson folosind Iight of Wavelength aproape de 550 nm și α_{max} egal cu 6 m?

27. Găsiți dimensiunea maximă a unui punct iluminat de soare peste care iluminarea este aproape coerentă. Discul solar subtinde un unghi de 32 de secunde de arc, iar radiația solară este maximizată în jur de 550 nm.

28. Un Iamp de zirconiu are un arc de 10-3 inci în diametru. Este folosit cu un filtru care limitează lungimea de undă până la vecinătate de 550 nm. Pentru a fi utilizat ca sursă într-un filtru spațial, am avea nevoie de coerența transversală aproape completă a Iight-ului incident de-a lungul obiectului. Să presupunem că lungimea focală f a primului Ien din fig. 8.33 este de 20 cm și diametrul său este de 3 cm. Va avea sursa coerența necesară?

29. Descrieți cantitativ modul în care modelul de difracție cu o singură fanteză este modificat atunci când sursa punctuală utilizată în Capitolul 6 este înlocuită cu o sursă de linie care se extinde până la

Δ0 de fiecare parte a axei optice (care este perpendiculară pe panoul cu fantă de difracție). Utilizați aproximarea câmpului îndepărtat.

30. Putem defini răspândirea unghiulară a sursei prin

1

iar coerenţa transversală Iength de

f0° /vnα \ 2 f°° ,

= 2 I ɪ da = 2 \ V2(a) da

J0 \ c) Jo

(a) Să se arate că = λ/Δθ.

(b) Arătați că pentru o sursă de linie uniformă care se extinde de la O1 la On, Δθ așa cum este definit aici este egal cu θll – O1.

31. În text am arătat că în principiu se poate determina amplitudinea și faza funcției valoroase complexe /(w) = ^r[i(θ)]

v0a a

w = — = -c Z

unde ¡(0) este funcția de distribuție unghiulară pentru distribuția sursă proiectată pe planul lui

F19. 0,53

desen din fig. 8.10b. Din funcția cunoscută I(w), putem calcula i(θ) calculând transformarea Fourier inversă

i(0) = I(w)ei2πwβdu

Deoarece a este pozitiv, la fel este w. Integrala poate fi convertită într-o sumă de integrais care implică Re{7(w)} și Im{/(w)} numai pentru w pozitiv. Fa asta.

32. Un disc uniform subtinde un unghi de 0,01 rad la fantele unui interferometru Young. Lumina de pe disc demonstrează o formă Gaussiană cu lățimea de 100 nm aproximativ 600 nm. Deduceți o expresie pentru S(θ')/S0 dacă fantele interferometrului sunt setate la 6 mm. Repetați derivația pentru o distanță între fante cu 0,1% mai mare.

33. Utilizați expresia statistică pentru funcția de corelare Eq. (8.129) pentru a calcula S, densitatea fluxului în modelul de interferență al unui interferomter Young, în funcție de a și θ' unde sursa constă din două puncte la θl și θa care pornesc cu o putere egală la 1 = 0, dar care decăderea cu rate diferite. Să presupunem

E1 = A e~tl,t cos(2πv0t)

Ea = A e~tltu cos(2πv0t)

Secțiunea 8.4 Fluctuații

34. Calculați parametrii de degenerare pentru Iight din următoarele surse, presupuse a fi corpuri negre.

(a) O stea la 10.000 K pentru λ aproape de 500 nm.

(b) O descărcare de gaz la 3000 K pentru λ la 546 nm.

35. Un interferometru cu fluctuație a densității fluxului este utilizat pentru a măsura diametrele stelare, în special diametrul stelei din problema anterioară. Detectoarele au fiecare o zonă care este de 0,001 ori suprafața de coerență. Randamentul lor cuantic este de 0,10, iar timpul lor de rezolvare este de 15 sec. Care este valoarea minimă a lui V care poate fi măsurată într-un timp de 3000 de secunde cu un raport semnal-zgomot de unitate? Să presupunem că limita detectorului lentă.

36. Derivațiile din această secțiune presupuneau că Lumina se afla într-o stare definită de polarizare. Lumina nepolarizată este un amestec egal de două Componente reciproc incoerente în două stări independente de polarizare. De exemplu, aceste două stări pot fi considerate ca fiind polarizate liniar de-a lungul a două direcții reciproc perpendiculare. Fie ρ1 (unpol) rata medie de emisie a fotoelectronilor din fiecare fototub când

Se folosește Iight nepolarizat și pɪ(pol) rata atunci când un polarizator este introdus în fascicul. Atunci ρl (unpol) = 2pı(pol) și rç(unpol) = ⅛f/(ρol).

(a) Explicați de ce a doua ecuație ar trebui să fie valabilă

pe baza afirmației de la începutul acestei probleme. \

(b) Găsiți expresia corespunzătoare ecuației. (8.156) pentru SNR pentru lumină nepolarizată.

Secțiunea 8.5 Formarea imaginii: Obiecte incoerente

37. Ecuația (8.166), care definește funcția de împrăștiere punctuală, arată că, cu excepția constantelor, OTF este transformata Fourier a lui Tl Tf. Prin teorema de convoluție [Ec. (6.97)] transformata Fourier a unui produs apare ca Convoluția transformatei Fourier. Utilizați această teoremă începând cu Ec. (8.166) și, incluzând toate constantele, demonstrați Ec. (8.181).

38. (a) Demonstrați că pentru orice deschidere simplă Ec. (8.170) este adevărată:

0o(°.°) = (⅛

(b) Pentru o deschidere nesimpla, arata ca rezultatul din (a) se generalizeaza la

0°<0•0>-(⅛∫∫

— 00

|Tz,(x, y)|2dxdy

39. Folosiți tehnica expansiunii momentului pentru a deriva Ec. (8.171) pentru funcția punct-spread în cazul în care funcția de aberație este mică.

40. Din cauza Ec. (8.170) putem rescrie ecuația. (8.171) a da

0(0,0; P') = O0(0,0)[1 - O]

4•7l2

d≈7γ(<wz2>-<wλ>2)

unde D reprezintă scăderea fracționată în 0(0,0; P') din cauza unei cantități mici de aberație. Calculați D pentru următoarele aberații pentru o pupilă circulară de ieșire cu raza r0(p = r/r0).

(a) m Lungimi de undă ale erorii de focalizare (curbura câmpului):

W — mλp2

π2

Răspuns: D = —- m.

(b) m Lungimi de undă ale aberației sferice primare:

W= mλp*

16π2

Răspuns: D = —— m.

45

(c) m Lungimi de undă ale aberației sferice plus modificarea planului focal:

W = mλp2{p2 — 2μ)

Arătați că D este minimizat când μ = 1/2. (La jumătatea distanței dintre focarele paraxiale și marginale.)

(d) m Lungimile de undă ale astigmatismului și curbura câmpului:

W = mλp2(cos2 $ — μ)

Arătați că D este minimizat când μ = 1/2. (La jumătatea distanței dintre focarele paraxiale și sagitale, la cercul celei mai mari confuzii.)

(e) m Lungimi de undă ale comei:

W = mλpi cos ț

42. Arătați că pentru o deschidere dreptunghiulară 2Jc0 cu 2y0 OTF limitată de difracție este

Oo(u, v) = 1 -

Unde

и

um

1 -

V

V1

pentru |u|

V1

2x0

Um = —7, m λS'

_ 2⅞

Vm λS'

43. Arătați că, cu o eroare de focalizare unde W= [n(x/x0)2 + w(y/y0)2l, funcția de transfer optic pentru o pupilă dreptunghiulară 2x0 cu 2y0 este dată prin înmulțirea rezultatului problemei anterioare cu (sinc ix•sinc ty), unde

U UVV
8πn — 1 ,= 8πm —1
Um UmVmVm

π2

Răspuns: D = — m

2

2

41. În ciuda prezenței aberațiilor, panta inițială a MTF este aceeași cu cea pentru un sistem limitat de difracție. Să se arate că pentru o

pupilă circulară de ieșire cu raza f0 funcția de transfer de modulație se supune

d ∧   d ∧–42r0

^T~ IO(P)Ip-O = ~Tn ðθ(p) =   ' Pm ~ 1 ÇZ

dp p dp   p = 0 πpm ÁS

44. Nu este adevărat că OTF pentru sistemul combinat cu două lentile prezentat în Fig. 8.34 este egal cu produsul OTF-urilor individuale pentru cele două lentile. Demonstrați acest lucru presupunând că este adevărat și apoi derivând o proprietate a funcției punct-spread care poate fi demonstrată a fi falsă. {Sugestie: Vezi problema 37. Dacă lumina de la imaginea intermediară ar fi complet incoerentă, atunci OTF-urile s-ar înmulți. Dar Iight este parțial coerent. De ce?)

9 Polarizare

În capitolele 1 și 2 am introdus teoria electromagnetică a Iight-ului care se bazează pe ecuațiile lui Maxwell. Am constatat că teoria conduce la ecuații ondulatorii pentru Componentele vectorului câmpului electric $E = (E_x, E_y, E_z)$ și vectorului de inducție magnetică $B = (B_x, B_y, B_z)$. În dezvoltarea majorității geometrice! optică și pentru o descriere a interferenței și difracției în medii omogene, caracterul vectorial al undelor Iight poate fi ignorat. În acest capitol discutăm despre fenomene optice importante care pot fi înțelese doar în ceea ce privește caracterul vector-undă transversal al modelului mai complet.

9.1 Lumină polorizată

Deoarece vectorii de câmp sunt perpendiculari pe direcția de propagare, există un grad de libertate care implică orientarea lor care nu este disponibil în cazul undelor scalare. Proprietățile de polarizare ale Iight sunt manifestări ale acestui grad de libertate. Ne limităm discuția la luarea în considerare a radiației monocromatice de tip undă plană. Dependența de timp și spațiu a acestor unde are forma

cos(ωt – κ · r + </>)

cu

1 OJns

κ =----

C

La interpretarea indicelui de refracție n. Cu toate acestea, dependența de fază va păstra această formă. Este suficient să specificăm comportamentul câmpului electric E(r, í) pentru că atunci inducția magnetică B(r, t) poate fi determinată din E prin ecuațiile lui Maxwell.

Polarizare 5β

A. Tipuri de lumină polarizată

Deoarece câmpul electric este o mărime vectorială, trebuie să specificăm atât mărimea, cât și direcția. Considerăm o undă plană cu vector de undă κ. Câmpul electric E poate îndrepta de-a lungul oricărei direcții în planul perpendicular pe k, iar B este de-a lungul vectorului κ X E. Fie κ de-a lungul axei z și să aibă magnitudinea κ = ω/v, unde v = c/n este viteza de fază. Unda monocromatică poate fi scrisă în această formă

E(x, y, z, t) = Exx + £yy   (9.1)

Unde

$E_x(x, y, z, t) = A_x \cos(\omega t - kz + \varphi_x)$ (9.2)

$E_y(x, y, z, t) = A_y \cos(\omega t - kz + \varphi_y)$ (9.3)

cu amplitudini reale pozitive A_x, A_y și unghiuri de fază φ_x și φ_y.

Clasificarea tipurilor de lumină polarizată va depinde de faza relativă

$\varphi = \varphi_y - \varphi_x$ (9,4)

și pe dimensiunile relative ale lui A_x și A_y.

În discuțiile noastre anterioare am stabilit un sistem de coordonate cu axa x verticală, axa y orizontală și axa z de-a lungul direcției generale de propagare. Acesta va fi folosit și aici. Totuși, în concordanță cu convenția istorică, prezentăm sistemul așa cum este văzut în direcția z negativă, adică opusă direcției de propagare. Diagramele apar astfel cu axa x în sus și cu axa y în stânga.

1. Lumină polarizată liniar. Uneori numită lumină polarizată piană, Ilumina polarizată inițial rezultă când

φ - 0 sau φ = и
căci atunci Ey este proporțional cu Ex.
4 E = -z Ex pentru φ = 0   (9,5)
£y = – –2 Ex pentru φ = π Ax   (9.6)

după cum se poate observa din ecuațiile. (9.2). La o poziție fixă z, câmpul electric suferă o mișcare de armonie simplă de-a lungul unei linii (Fig. 9.1). La o valoare dată, câmpul electric are o dependență z sinusoidală și se găsește în pianul care conține axa z și linia y = + (Ay/Ax)x pentru φ = 0, sau y = -(Ay/Ax)x pentru φ = π (Fig. 9.2).

2.   Lumină polarizată circular. Când

Ax = Ay = A și φ = + -

Fig. 9.1 Lumină polarizată liniar.

Fig. 9.2 Reprezentarea vectorului câmp electric în spațiu la timp fix pentru lumina polarizată inițial. Aici $\varphi = 0$.

5ÔÔ PolarizQtion

Rezultate polarizate circulare. Apoi

$E_x = A \cos(\omega t - kz + \varphi f)$

(9,7)

(9,8)

Í i π

$E_y = A$ cosi $\omega t - kz + \varphi x$ + -

$= + A \sin(\omega t - kz + \varphi x)$

Când $\varphi = + \pi/2$, E_y Ieads E_x cu $\pi/2$ rad; adică E_y atinge valoarea maximă cu un sfert de ciclu înainte ca E_x să o facă. Ca o funcție a timpului, câmpul electric descrie un cerc în sensul acelor de ceasornic în planul xy, așa cum este văzut frontal. Folosind limbajul fizicii moderne, am spune că această lumină are „helicitate negativă”. Este convențional în optică, totuși, să calim acest caz în care $\varphi = + \pi/2$, righi polarizat circular (RCP).

Celălalt caz de Ieft circular polarizat (LCP) Iight sau Iight de helicitate pozitivă apare când $\varphi = - \pi/2$. Apoi E_y Iags E_x cu un sfert de ciclu, iar câmpul electric descrie un cerc în sens invers acelor de ceasornic în planul xy (Fig. 9.3a).

Obținem și polarizare circulară când $\varphi = \pm 3\pi/2$, pentru atunci Eq. (9.8) devine

$E_y = \pm A \sin(\omega t - kz + \varphi x)$

În acest caz, semnul minus dă rotație în sensul acelor de ceasornic și polarizare circulară dreapta, semnul plus rotație în sens invers acelor de ceasornic și polarizare circulară la stânga. Rezumam în tabelul 9.1.

Pentru o valoare fixă a lui t, câmpul electric descrie o spirală pe suprafața unui cilindru circular cu raza A cu axa de-a lungul lui z (Fig. 9.3h). Deoarece o creștere a z echivalează cu o întârziere în fază, RCP Iight va spirala în sens invers acelor de ceasornic de-a lungul axei z pentru un t fix și să arate ca un șurub de dreapta. Aceasta explică terminologia optică convențională. Pe măsură ce t crește, acest șurub se rotește în sensul acelor de ceasornic, adică înapoi.

3. Lumină PoIarizată EIIiptică. Când A_x nu mai este egal cu A_y, dar când avem încă $\varphi - \pm \pi/2$, atunci curba trasată de vectorul E în planul xy devine o elipsă:

$E_x — A_x \cos(\omega t — kz + \varphi_x)$

$E_y= +A_y \sin(\omega t - kz + \varphi_x)$ (9,9)

Putem transforma aceasta într-o formă familiară:

$E2$ $E2$

$τí + Л = \cos^2(\omega t - kz + \varphi_x) + \sin^2(\omega t - kz + \varphi_x) = 1$ (9.10)

Astfel, semiaxele elipsei sunt date de A_x și A_y și este orientată de-a lungul axelor X și y. În acest caz, câmpul electric parcurge o cale eliptică în planul xy, sensul traversării fiind în sensul acelor de ceasornic (sau cu mâna dreaptă) pentru $\varphi = + \pi/2$ și

9.1 Polorizat Ughf 589

(b)

Fig. 9.5 (α) Iight polarizat circular, văzut într-un plan perpendicular pe direcția de propagare. Vectorul câmp electric mătură un cerc pe măsură ce timpul evoluează. Este prezentată convenția pentru sensul de rotație. Vederea este cu lumina care vine spre observator, (b) Reprezentarea vectorului câmpului electric în spațiu la timp fix pentru lumina polarizată circular. Aceasta este lumina RCP. Sensul de rotație cu z este opus sensului de rotație cu t.

Tabelul 9.1 Lumină polarizată circular

Φ $+ \pi/2$ sau $— 3\pi/2$— $\pi/2$ sau $+3\pi/2$
Rotire cu t Rotire cu z Sens de polarizare Elicitate În sensul acelor de ceasornic   În sens invers acelor de ceasornic RCP În sens antiorar În sensul acelor de ceasornic LCP +

590 Polorizare

Fig. 9.4 (a) Lumină polarizată eliptic. Aceeași convenție ca în Fig. 9.3α. Aici $\varphi = +\pi/2$.

(b) La fel ca în (a), cu excepția $\varphi \neq \pm\pi/2$.

În sens invers acelor de ceasornic (sau stânga) pentru $\varphi = — \pi/2$ (Fig. 9.4α). Acesta este un caz special de lumină polarizată eliptic.

Cazul general apare când $\varphi \neq \pm\pi/2, +\pi$. Punem $\varphi_y = \varphi_x \div \varphi$ și setăm

$\varphi_0 = (\omega t — kz)$ (9,11)

a obtine

$E_x = A_x \cos(\neq_0 + \Phi_x)$ (9 12)

$E_y = A_y \cos(</>_0 + \Phi_y)$

Elipsa descrisă de Ec. (9.12) este înscris în interiorul unui dreptunghi având dimensiunile 2 A_x cu 2 A_y, așa cum se arată în Fig. 9.4h. Excentricitatea elipsei depinde de diferența relativă de fază $\varphi = \varphi_y - \varphi_x$, atingând un minim când φ — $\pm\pi/2$ (Fig. 9.3) și un maxim când φ — $+ \pi$ (Fig. 9.1). Pentru a vedea acest lucru mai clar, trebuie să introducem câteva reprezentări noi pentru lumina polarizată.

B. Reprezentări pentru lumina polarizată eliptic

Ne vom concentra pe polarizarea eliptică, deoarece acoperă polarizarea liniară și circulară ca cazuri speciale.

1. Baza polarizată liniar. Dacă luăm în considerare ecuațiile. (9.12) ca Specificarea componentelor polarizate inițial ale câmpului total, atunci putem identifica o nouă notație complexă care ne va ajuta să înțelegem comportamentul vectorului câmpului electric în spațiul fizic. Pentru a realiza acest lucru, asociem axa x din spațiul fizic cu axa reală a unui plan complex și axa y din spațiul fizic cu axa imaginară. Contrar convenției comune, orientarea planului nostru complex este rotită cu 90°

despre originea să corespundă orientării sistemului nostru de coordonate standard. Câmpul electric optic acționează ca un fasor complex în acest pian,

$\ddot{E} = E_x + iE_y$

(9,13)

„Baza” în acest caz este specificată în termeni de componente Iinear polarizate de-a lungul X și y, unde E_x și E_y sunt date de ecuațiile. (9.12).

Va fi util să reexprimați ecuațiile. (9.12) pentru câmpurile componente în întregime din punct de vedere al funcțiilor exponențiale. Aceasta va duce la o altă reprezentare valoroasă pentru lumina polarizată. Procedăm astfel:

$E_x = A_x \cos(<‰ + \varphi_x) = $ ^$A_x e^{i\varphi_x} e^{i\varphi_o} + \frac{1}{8} A_x e^{i\varphi_x} e^{i\varphi_o} = \frac{1}{8} a_x e^{l\varphi_o} + \frac{1}{8} a^* e^{\sim i\varphi_o}$

$E_y = A_y \cos(\varphi_0 + \varphi_y) = \frac{1}{8} A_y e^{i\varphi_y} e^{i\varphi_o} + \frac{1}{8} A_y e^{i\varphi_y} e^{i\varphi_o} = \frac{1}{8}\alpha j,e^{t\psi_o} + \frac{3}{8}\alpha^* e^{\sim l\neq°}$

cu

$a_x = A_x e^{i\varphi_x}$ $a_y = A_y e^{i\varphi_y}$

Atunci putem scrie

$\ddot{E} = E_x + iE_y = \frac{1}{8}(\alpha_x + ia_y)e^{i\varphi_o} + \frac{1}{8}(\alpha^* + ic\varphi e^{i\varphi_o}$

(9,14)

(9,15)

(9.16a)

(9.16b)

(9,17)

2. Baza polarizată circular. Forma Eq. (9.17) sugerează că definim

¾ = ⅛(⅛ + iay) = Abeiφ^ “r = ɪ(ɑj + iɑ*) = ARei<t>R

(9.18a)

(9.18b)

unde Al, Ar, Φl și ϕя sunt constante reale pozitive. Atunci poate fi scrisă reprezentarea fazorială a câmpului

Ë = abeiφo + alle~iφo

(9,19)

Aceasta este suma a doi fazori care se rotesc în direcții opuse cu amplitudine constantă. Am creat o bază în ceea ce privește componentele polarizate circular. Când aR = 0, lumina este polarizată circular. La φ0 = 0 fazorul își asumă o orientare inițială definită de Φl. Pe măsură ce timpul evoluează, φ0 crește și fazorul se rotește în sens invers acelor de ceasornic, descriind astfel un cerc cu raza Al. Acest lucru este prezentat în Fig. 9.5α. Când aL = 0 avem polarizare circulară dreaptă așa cum este demonstrat în Fig. 9.5b. Aceasta se rotește în sensul acelor de ceasornic pe măsură ce timpul trece.

Putem recupera componentele bazei noastre Iinearly polarizate din Eq. (9.18) luând conjugatul său complex și combinând această formă cu Ec. (9.17) a ceda

^x T GR ay = ~i(aL - a^)

(9,20)

(9,21)

Fig. 9.5 Baza circulară pentru reprezentarea luminii poɪarizate. Acestea iau forma fazorilor în plan complex: (a) fazorul LCP; (b) fazorul RCP.

3. Interpretare. Avantajul utilizării Eq. (9.19) mai degrabă decât Ec. (9.13) constă în ușurința mai mare de interpretare atunci când Componentele polarizate circular sunt folosite ca bază. Introducem suma și diferența

β ≡ Φl + Φr, cc≡Φl- Φr (9,22)

Atunci putem scrie Ec. (9.19) ca

E= Eχ + IEy = £íβ/2^A^(Φo-α/2) + A Re-i(<Ao-«/2)-| (9,23)

Comportamentul celor doi termeni din paranteze drepte din Ec. (9.23) este indicat în Fig. 9.6. Fazorii sunt afișați când φ0 — a/2, moment în care sunt paraleli. Atunci noi avem

Ê = e^\AL + Λr)

Aceasta corespunde punctului 1 din Fig. 9.7. Când φ0 = α/2 + π/2, fazorul din fig. 9.6α s-a rotit în sens invers acelor de ceasornic π/2 rad, iar cel din fig. 9.6 b s-a rotit

Fig. 9.6 Forma de bază pentru un exemplu de lumină polarizată eliptic.

X

Fig. 9.7 Elipsa de polarizare pentru baza în

Fig. 9.6

în sensul acelor de ceasornic π/2 rad. Dacă Ar este I mai mic decât Al și dacă (π/2) > (β/2) > 0, fazorul rezultat pentru Ë va fi în al doilea cadran (în convenția noastră) la punctul 2 din Fig. 9.7. Vedem că fazorul È urmărește o elipsă Cu semiaxa majoră a Iength (Al + Ar) la înclinarea β/2 Față de axa x și semiaxa minoră a Iength (Al — Ar) la o înclinare de Д/2 + π /2. Iight în acest caz este polarizat eliptic (LEP).

Alte posibilități sunt ilustrate în Fig. 9.8. Când Al = Ar obținem Iight polarizat liniar cu E de-a lungul liniei la β/2.

Fig. 9Λ Exemple de elipse de polarizare.

Cu referire la Fig. 9.7, rețineți că lumina polarizată eliptic este complet caracterizată prin specificarea sensului de rotație, unghiului β/2 și unghiului η, care oferă raportul axial al elipsei prin ecuație.

tan^≡^⅛ ∈ 4^   (9-24)

Când lumina este descrisă în termenii componentelor sale x și y, ca în Ec. (9.12), parametrii corespunzători sunt diferența de fază φ = φy — φx și raportul Ay/ Ax sau χ unde

χ IΛI

(9,25)

Cele două seturi de parametri sunt legate prin următoarele ecuații, pe care le afirmăm aici fără dovezi.

n tan 2η f + pentru REP) ,a"β=i ^smJ | -forLEP∫

cos 2χ = cos β cos 2η

(9,26)

(9,27)

C. Lumină nepolarizată

Lumina nepolarizată nu este o stare elementară de polarizare și este într-un fel mai complicată decât exemplele pe care le-am discutat deja. În general, o sursă de lumină microscopică individuală (cum ar fi un atom sau o moleculă) emite lumină care într-o direcție dată are o stare de polarizare bine definită. Este suprapunerea multor contribuții individuale pentru a forma câmpul electric macroscopic total care poate produce lumină nepolarizată. În probleme, vi se va cere să arătați că suprapunerea a două fascicule coerente de lumină polarizată eliptic va da un alt fascicul de lumină polarizată eliptic, în general cu o elipsă diferită. Natura elipsei rezultate depinde de diferența de fază dintre lumina din cele două fascicule primare. Dacă această diferență de fază variază, această elipsă se poate modifica în orientare și formă. Dacă cele două fascicule au un timp de coerență finit, diferența de fază dintre ele se va schimba aleatoriu, cu o modificare pătratică medie de aproximativ 1 rad într-un timp egal cu timpul de coerență al luminii. Astfel, pentru două fascicule incoerente, în care timpul de măsurare este mai mare decât timpul de coerență, elipsa se va schimba într-un mod rapid, aleatoriu și numai proprietățile sale medii vor fi măsurabile.

Când sunt prezente multe astfel de fascicule incoerente, putem obține lumină nepolarizată dacă sunt îndeplinite două condiții. Pentru baza polarizată inițială a ecuației. (9.12), solicităm ca Ex și Ey să fie incoerente și amplitudinile să aibă medii de timp egale: (Ax) = (Ay). Deoarece densitatea totală a fluxului este proporțională cu (A2) — (Ax) + (Ay), fiecare componentă transportă jumătate din energia totală. Deoarece sistemul de coordonate este arbitrar, un polarizator va trece întotdeauna jumătate din densitatea fluxului independent de orientarea sa.

În baza polarizată circular a ecuației. (9.17), se poate face o afirmație similară și anume că

El = aL eiφo și Er = aκe~lφo

trebuie să fie incoerentă şi

< | αi, | 2> = <l⅝ | 2>

O metodă mai puternică de a discuta lumina nepolarizată și amestecurile de lumină nepolarizată și polarizată (lumină parțial polarizată) va fi dezvoltată în secțiunea 9.3.

Un alt punct trebuie subliniat aici, totuși. Dacă formăm o suprapunere de mai multe fascicule incoerente, fiecare în aceeași stare definită complet polarizată, fasciculul rezultat va fi, de asemenea, complet polarizat în acea stare. Dovada este dată rapid. Folosim baza polarizată inițial. Să presupunem că fiecare grindă componentă are aceeași valoare a φ — φy — φx și aceeași valoare a raportului f = Ay/Ax. Apoi avem pentru a j-a fasciculă

Exl = Axlelφ~>e,t°. E,j=fe,*Exl

Rezultatul este că Etot = (Extot, Eytot) are componente

‰=∑4√λ⅛*, E,at = ∑Eyl=f^∑Exj=fel*Exm (9.28) j   Jj

Chiar dacă fazele individuale φxj și amplitudinile Axj fluctuează, lumina va fi într-o stare de polarizare pură descrisă de f și φ.

9.2 Elemente optice sensibile la polQrizare

A. Producerea luminii polarizate

Acum discutăm pe scurt câteva dintre metodele utilizate în mod obișnuit pentru a produce lumină polarizată. Cele mai multe, dar nu toate, dintre metodele simple produc lumină polarizată plană.

1. Surse polarizate. O astfel de sursă este laserul cu gaz continuons. Un astfel de dispozitiv emite un fascicul de lumină îngust foarte monocromatic, care este adesea polarizat în plan. Laserul emite lumină într-un astfel de „mod” polarizat datorită utilizării Windows-ului setat la unghiul lui Brewster (vezi mai jos).

O altă sursă de lumină polarizată, cel puțin în principiu, este furnizată atunci când anumite surse de linii spectrale înguste sunt plasate într-un câmp magnetic. Apoi are loc o împărțire a amenzilor cunoscută sub numele de efectul Zeeman; fiecare componentă este fie polarizat inițial, fie polarizat circular. Acest efect este dificil de produs și nu este în prezent de importanță practică ca sursă de lumină polarizată.

Radiația de sincrotron este produsă atunci când electronii relativiști sunt expuși unui câmp magnetic. Prin urmare, ei sunt determinati să călătorească pe o cale circulară. Accelerația rezultată la care sunt supuși electronii este emisia de lumină tangentă la

orbita și puternic concentrată în direcția înainte. Radiația este foarte polarizată în planul orbitei. Pe lângă producerea de radiații sincrotron în astronomica! fenomene, surse artificiale terestre există acum. Acestea sunt asociate cu acceleratoare de partide de mare energie și sunt acum construite ca surse de lumină dedicate pentru studii fundamentale ale materiei. Gama de lungimi de undă a luminii emise

depinde de caracteristicile orbitei, dar este de obicei maximizată în intervalul de raze X.

2. Reflexia și transmisia Lumina reflectată de o interfață netedă devine parțial polarizată dacă unghiul inițial de incidență este diferit de zero. Acest efect devine deosebit de puternic și este util la o interfață dielectrică atunci când unghiul de incidență este la sau aproape de așa-numitul unghi Brewstefs. Acest lucru a fost discutat în capitolul

2.

În Fig. 9.9 o astfel de interfață este prezentată în planul xy. Când razele reflectate și transmise se întâlnesc la un unghi de 90°, este imposibil ca lumina să fie reflectată dacă câmpul său electric se află în planul de incidență (lumină polarizată π). Această lumină va fi însă transmisă. Lumina cu câmpul său electric Vibrând perpendicular pe planul de incidență (σ lumina polarizată) poate fi reflectată.

La unghiul de incidență al lui Brewster trebuie să avem

$\theta b + \frac{3}{8} = 1$

(9,29)

Pentru că SnelTs Iaw spune asta

Fig. 9.9 Polarizare prin reflexie și transmisie printr-o interfață.

și pentru că $\sin \theta b = \cos \theta b$ când $\theta b + \theta b = \pi/2$, trebuie să avem

$\tan \theta b = -$ (9,30)

n

la unghiul lui Brewster, același rezultat ca Eq. (2,78).

Dacă lumina incidentă la unghiul lui Brewster este nepolarizată, lumina reflectată are polarizare σ pură, iar lumina transmisă este parțial polarizată cu o polarizare mai mare decât σ.

Acest efect are loc și asupra reflexiei interne, așa cum am discutat deja în capitolul 2. Astfel, dacă lumina este incidentă la unghiul lui Brewster pe o placă dielectrică cu laturi paralele, așa cum se arată în Fig. 9.10, selectarea polarizării va avea loc la ambele interfețe. . Acest proces poate fi repetat.

O grămadă de astfel de plăci sau plăci paralele va fi apoi un polarizator eficient pentru lumina colimată. Fascicul reflectat va fi σ-polarizat pur; fasciculul transmis poate fi făcut practic pur π-polarizat prin utilizarea unor plăci suficiente.

Dacă unghiul de incidență nu este exact egal cu θb, lumina reflectată va avea o componentă mică de polarizare π, iar lumina transmisă va avea în mod corespunzător Iess π lumină.

O astfel de „grămadă de plăci” poate fi folosită ca polarizator, fie în reflexie, fie în transmisie, în special cu fascicule bine colimate și acolo unde nu sunt disponibile alte polarizatoare mai convenabile. Într-adevăr, acest tip de polarizator a fost primul care a fost folosit în secolul al XIX-lea.

3. Risipirea. Difuzarea luminii poate apărea ori de câte ori există o distribuție neregulată a centrelor mici de împrăștiere. Exemple sunt date de particulele de praf din aer, mici în comparație cu lungimea de undă; particulele într-o suspensie coloidală; sau chiar moleculele de gaz din aer. Mecanismul de bază pentru producerea luminii polarizate din lumina nepolarizată este similar cu cel discutat. Dacă particulele sunt suficient de mici și suficient de simple, vor fi induse în ele oscilații de câmpul electric al luminii incidente. Va exista o reradiere a luminii în toate direcțiile, cu excepția câmpului electric original.

Fig. 9.11 Polarizare prin împrăștiere.

Acest lucru este prezentat în Fig. 9.11. Lumina împrăștiată la o direcție de 90° față de direcția de propagare incidentă va fi polarizat liniar cu câmpul electric într-o direcție perpendiculară pe planul de împrăștiere, adică planul determinat de direcția incidentă și de propagare împrăștiată. Acest mecanism de polarizare prin împrăștiere este activ în atmosfera pământului. Culoarea albastră a cerului este cauzată de împrăștierea preferențială a luminii albastre cu lungime de undă scurtă peste lumina roșie cu lungime de undă lungă. Lumina albastră din cer este parțial polarizată cu vectorul câmpului electric vibrând la unghiuri drepte față de planul care conține razele de lumină incidente și împrăștiate. La vizualizarea la 90°, așa cum se arată în Fig. 9.11, polarizarea este completă.

4. Dicroism. Există o clasă de medii optice anizotropice care prezintă un fenomen cunoscut sub numele de dicroism, ceea ce înseamnă că lumina care se propagă într-o direcție dată va fi absorbită diferit în funcție de orientarea câmpului electric. Coeficientul constant de absorbție [Eq. (2.44)] depinde astfel de direcția vibrației. În cazul extrem, lumina care vibrează într-o anumită direcție va fi în esență transmisă complet. A doua direcție se numește direcția de trecere ușoară sau direcția de trecere. Un cristal de turmalină este un exemplu de polarizator dicroic, dar cel mai cunoscut exemplu este o foaie „polaroid”, care constă din molecule dicroice orientate încorporate în plastic.

În calcularea efectului unui polarizator asupra unui fascicul de lumină incident, ar trebui să rezolvăm câmpul electric incident de-a lungul axelor paralele și perpendiculare pe direcția trecerii. Dacă ψ este unghiul dintre câmpul E și direcția de trecere, componenta trecută este $E' = E \cos \psi$, iar densitatea de flux transmisă S' este dată în termeni de densitate de flux incident 5 de legea lui Malus, (Fig. 9.12).

$S' = S \cos^2 \psi$ (9,31)

5. Refracție dublă. Fenomenul de dublă refracție are loc în medii optic anizotropie, adică medii având proprietăți optice care depind de direcție. Fenomenul este denumit și biréfringence. O discuție detaliată a acestui subiect va fi dată în secțiunea 9.4. Aici introducem conceptele elementare astfel încât optica polarizante să poată fi discutată. „dublu” sau „bi” din

Polorizore

600

„-⅛•

ч

Fig. 9.12 Polarizare prin dicroism.

Numele acestui efect se referă la cele două direcții diferite de propagare pe care o anumită rază incidentă le poate lua în astfel de medii, în funcție de direcția de polarizare.

Discutăm aici cel mai simplu tip de mediu birefringent, un mediu uniaxial. Dacă efectele de difracție sunt neglijate, propagarea undelor în astfel de medii poate fi descrisă printr-o generalizare a principiului lui Huygens. Undele secundare sferice trebuie înlocuite cu suprafețe de undă de o complexitate mai mare, constând dintr-o undă sferică plus o undă care este un elipsoid de revoluție. Elipsoidul este tangent la sferă în două puncte care se află pe o linie prin centrul undelor eliptice. Această linie se numește axa optică (OA). Există o astfel de axă, de unde termenul „uniaxial”. Formează axa pentru elipsoidul revoluției. Vezi Fig. 9.13. Un plan este definit de direcția de propagare și de axa optică. Acest plan este numit secțiunea principală. Unda sferică va fi polarizată liniar cu câmpul electric vibrând perpendicular pe secțiunea principală, adică perpendicular atât pe direcția de propagare, cât și pe axa optică. Unda elipsoidală va fi polarizată inițial cu vectorul electric în secțiunea principală, paralelă cu axa optică.

Fig. 9.15 Undele lui Huygens în medii uniaxiale. Dubla refractie: («) negativ; (/?) pozitiv; (c) orientarea la polarizare.

Dacă alegem un sistem de coordonate având axa sa z de-a lungul acestei axe optice, ecuația pentru acest elipsoid poate fi scrisă

v-2 _|_ y2

z 2 -2 = t2 Vo

Unda sferică se răspândește cu o viteză $v_0 = c/n_0$, și astfel la momentul t raza ei va fi $(c/n_0)t$. Unda elipsoidală se extinde cu o viteză cuprinsă între c/n_0 de-a lungul axei optice până la o viteză ve

= c/ne într-un plan perpendicular pe OA. Pentru cristalele „pozitive", ne este mai mare decât n0, iar pentru cristalele „negative", n0 este mai mare. Exemple sunt oferite de calcitul (negativ) și cuarțul cristalin (pozitiv). Cuarțul prezintă, de asemenea, un fenomen cunoscut sub numele de activitate optică, pe care îl ignorăm pentru moment.

Unda sferică este denumită obișnuită (undă o), iar indicele său de refracție n0 ca indice obișnuit. Unda eliptică este unda extraordinară (unda e), iar valoarea extremă a indicelui său de refracție ne se numește indicele extraordinar.

Noțiunea de rază de lumină trebuie redefinită pentru unda extraordinară. Reprezintă direcția fluxului de energie și este dată de o linie de la origine până la punctul în cauză de pe elipsoid, cum ar fi OP din Fig. 9.14. Punctul P se va deplasa spre exterior cu viteza razei vr, intermediară între v0 și ve, care depinde de unghiul γe al OP față de OA Folosind OP = vrt, putem deduce cu ușurință

1 sin2 γecos2 γe

2 2+2

VV V

ur eo

(9,32)

(9,33)

Suprafețele de fază constantă (fronturi de undă) pentru unda sunt tangente la suprafața undei la P. Normala undei s nu este paralelă cu direcția razelor OP. Deoarece distanța OP este proporțională cu viteza razelor, aceste suprafețe de undă sunt numite și suprafețe cu viteza razelor. Aceste suprafețe sunt utile pentru discuțiile calitative despre dubla refracție, dar pentru lucrul cantitativ, alte suprafețe, suprafețele index, care urmează a fi introduse în secțiunea 9.4, sunt mai convenabile. Un aspect nou al undei extraordinare este că, cu excepția cazului în care γe = Oo sau 90°, vectorul de deplasare electrică D nu este perpendicular pe direcția de propagare OP. Câmpul electric E este perpendicular pe OP, la fel ca și câmpurile B și H. Aceste aspecte vor fi discutate în secțiunea 9.4. Unda sferică obișnuită este întotdeauna polarizată liniar perpendicular pe secțiunea principală.

S

Fig. 9.14 Direcția undei â și direcția razelor în mediu anizotropic.

e ray

Normal față de frontul de undă e

o rază

Fig. 9.15

O perturbare a stării de polarizare pură arbitrară se va propaga, în general, într-un mod conform într-un mediu biréfringent. Ea poate fi rezolvată, totuși, în componente polarizate inițial, care devin razele e și o tocmai discutate. Starea de polarizare a acestor componente nu se modifică, deși cea a perturbării inițiale se poate schimba destul de semnificativ după trecerea prin mediul biréfringent. De exemplu, se poate schimba de la polarizare liniară la polarizare circulară.

Fronturile de undă asociate cu raze extraordinare nu vor fi normale razelor. Ele pot fi determinate de principiul lui Huygens. Un exemplu este prezentat în Fig. 9.15. Să presupunem că linia AA' reprezintă locația suprafeței undei primare. Fiecare punct acționează apoi ca o sursă de undele secundare. Anvelopa undeletelor sferice BB' localizează apoi suprafaţa obişnuită a undei la un moment ulterior. Anvelopa CC Iocează suprafața de undă extraordinară, care se mișcă în direcția AC și formează un unghi Ay cu normala la frontul de undă A'N. Viteza undei vw este viteza în direcția normală A'N și este dată de

vw = vr cos Ay

(9,34)

unde vr este dat de Ec. (9,33).

Separarea unghiulară dintre raza e și raza o poate fi folosită pentru a izola una sau alta dintre ele și produce lumină polarizată plană. Unul dintre

Fig. 9.15 Un romb de calcit care prezintă fețe naturale elea vage.

102*

\ 0.A.

„⅛ moduri comune de a face acest lucru sunt folosite în prisma Nicol, care este făcută din calcit. Această prismă este adesea folosită ca polarizator de înaltă precizie.

Acest cristal se desprinde în mod natural într-un romb cu laturi și margini paralele. Direcția axei optice formează unghiuri egale cu marginile la colțul cel mai obtuz, unde toate marginile se întâlnesc la un unghi de 102°, așa cum se arată în Fig. 9.16.

Prisma Nicol este tăiată dintr-un cristal de calcit, așa cum se arată în Fig. 9.17. Începem cu o secțiune principală a unui romb scindat care conține axa optică, așa cum se arată punctat în figură. Capetele sunt apoi tăiate la un unghi mai ascuțit de 68°. O diagonală lungă eut este apoi făcută perpendiculară pe aceste noi capete. Cele două jumătăți ale cristalului eut sunt apoi cimentate împreună cu balsam canadian.

Indicele balsamului este 1,55, care se află între indicele razei obișnuite de 1,658 și cel al razei extraordinare care se propagă de-a lungul axei prismei de 1,486. Unghiurile au fost alese astfel încât raza o să fie reflectată total intern la prima interfață calcit-balsam. Această rază este apoi absorbită de un strat negru de pe părțile laterale ale prismei.

Prisma Nicol are mai multe dezavantaje, printre care se numără deplasarea paralelă suferită de fasciculul transmis și răspândirea unghiulară relativ mică a fasciculului care poate fi transmis. Prisma Glan-Thompson prezentată în Fig. 9.18 nu are niciunul dintre aceste dezavantaje, deși face o utilizare mai eficientă a calcitului. Este format din două secțiuni de calcit, ambele având capete perpendiculare pe fasciculul de lumină cu axe optice paralele, așa cum se arată. Indicele cernentului este de așa natură încât la unghiul eut unda obișnuită suferă o reflexie internă totală, în timp ce unda extraordinară se transmite cu o mică pierdere.

În Fig. 9.19 sunt prezentate două tipuri de prisme polarizante cu divizare a fasciculului. Cu Iight incident nepolarizat produc două fascicule transmise cu direcții de polarizare reciproc perpendiculare și direcții diferite de propagare.

Fig. 9.16 Polarizator Glan-Thompson.

Fig. 9.19 (a) prisma Rochon și (h) prisma Wollaston. Axa optică pentru părțile din dreapta ale ambelor este perpendiculară pe planul desenului.

Aceste prisme sunt de obicei făcute fie din cuarț, fie din calcit și au axele optice orientate așa cum se arată. În prima parte a prismei Rochon, ambele unde au indicele obișnuit n_0. În a doua parte, unda o care vibrează în planul diagramei continuă să aibă indicele n_0 și nu este deviată. Unda e care vibrează perpendicular pe planul diagramei are indicele n_e și este deviată în sus sau în jos după $n_e < n_0$ sau $n_e > n_0$.

În prisma Wollaston, unda o din prima parte care vibrează perpendicular pe planul diagramei devine unda e în a doua parte, iar unda e din prima parte, vibrând în planul diagramei, devine unda o în partea a doua. Dacă $n_e < n_0$, razele vor fi ambele deviate așa cum se arată. Dacă $n_e > n_0$, polarizările celor două fascicule emergente vor fi inversate.

B. Faza de schimbare

Caracteristicile mediilor de anizotropie optic pot fi exploatate pentru a manipula faza unui fascicul de lumină astfel încât să producă, de exemplu, lumină polarizată circular dintr-un fascicul incident polarizat inițial.

O metodă simplă de defazare optică folosește o placă paralelă de material biréfringent. Dacă axa optică este paralelă cu suprafața și dacă Iight cade pe placă la incidență normală, așa cum se arată în Fig. 9.20, atât razele o cât și e vor continua să se propage în aceeași

direcție, dar cu viteze diferite. Schimbarea de fază produsă de propagare va fi apoi diferită pentru cele două raze.

Schimbarea de fază pe o distanță d pentru raza o va fi dată de

a ,   -2π

δ</>0 = „y n0d

iar pentru raza e

л ,   -2π

Δ(/)e = --;- ned

Λ

Fig. 9.20 Orientarea axei optice într-un compensator.

dând o diferență de fază

Δ≠ = Δ√>e - Δ≠o = —— (ne - n0)d

(9,35)

Un astfel de schimbător de fază este adesea denumit compensator. Dacă ne > nu, atunci Δ</> < 0 și raza e Iag raza o în fază. Dacă ne < n0, atunci este adevărat opusul.

1. Placă Sfert de Undă. Un dispozitiv foarte util numit placă sfert de undă este produs atunci când | Δ</> | = π/2, adică când

| ne-nu | d =   (9,36)

Apoi raza e este întârziată sau avansată cu un sfert de ciclu în raport cu raza o; întârzierea apare dacă ne > n0 (cristal unaxial pozitiv ca cuarțul). Direcția de polarizare care este avansată în fază este de-a lungul axei rapide; direcția retardată este axa lentă. Raza e este polarizată de-a lungul axei lente pentru exemplul de cuarț tocmai prezentat. Pentru calcitul negativ, raza E este de-a lungul axei rapide. Rețineți că Δ√> depinde de λ. Aceasta limitează intervalul practic de lungimi de undă pentru lucrul cu precizie.

Un dispozitiv numit romb Fresnel produce o deplasare relativă π/2 prin intermediul reflexiei interne totale și este mult mai puțin dependentă de lungimea de undă. Oricum, fasciculul de lumină suferă o deplasare paralelă (vezi problema 9.15).

O placă cu un sfert de undă va converti Ilumina polarizată inițial în lumină polarizată eliptică, așa cum se arată în Fig. 9.21. Aici planul de polarizare al luminii incidente formează un unghi de 45° cu axa rapidă. În acest caz special, placa 2/4

Fig. 9.21 Ilustrarea transformării polarizării de la liniar la circular care are loc la trecerea printr-o placă cu un sfert de undă dacă lumina incidentă este polarizată la un unghi de 45° față de axele plăcii cu un sfert de undă.

produce lumină polarizată circular stânga. În cazul general în care $\psi \neq 450$ am avea

Incident f= a cos Ά cos ωt

Iight \ βy = A sin ψ cos ωt (9.37)

După transmitere, va exista o schimbare de fază comună - φ' plus o fază relativă

deplasarea lui – π/2: Ex-A cos ψ cos(ωt – φr)

Transmis

Iight

Ey-A sin ψ cos

,, π ωt-φ --

(9,38)

-- A sin ψ sin(ωt – </>')

Aceasta va da LEP Iight pentru $\psi > 0$ și REP Iight pentru $\psi < 0$. Axele elipsei coincid cu axele x și y și au un raport de lungime dat de tan ψ.

Hght polarizat eliptic va fi convertit în Hght aproape polarizat atunci când trece printr-o placă cu un sfert de undă, cu condiția ca axele plăcii cu sfert de undă și ale elipsei să coincidă. Secvența din Ec. (9.38) la Ec. (9.37) este apoi în esență inversată.

Luați în considerare lumina polarizată eliptic adecvată Fig. 9.22. Să presupunem că Iight este REP. Dacă axa rapidă a plăcii 2/4 formează un unghi β/2 cu axa x, adică dacă coincide cu axa majoră a elipsei (axa x), va accelera Ex, componenta lui E de-a lungul axa x, cu un sfert de ciclu în raport cu Ey. În REP original, Iight Ex a fost Iaging Ey cu un sfert de ciclu. Astfel, este acum în fază, iar rezultatul este polarizat liniar Iight care vibrează la un unghi η față de axa x, adică la un unghi β/2 + η față de axa x. Această lumină polarizată și orientarea ei pot fi detectate cu ușurință prin utilizarea unui polarizator. Polarizatorul dă unghiul β/2 + η în raport cu axa x. Axa rapidă a plăcii 2/4 dă unghiul β/2. Scăderea dă η, care dă raportul axial al elipsei:

al ar al + Ar

= tan η

(9,39)

Dacă lumina ar fi LEP în loc de REP, lumina polarizată liniară rezultată ar vibra la unghiul $\eta' = -\eta$<G în raport cu axa x și la unghiul $\beta/2 + \eta' = \beta/2 - \eta$ cu față de axa x. Ecuația (9.39) se va menține acum cu η înlocuit cu η și va rezulta

A r A d

--------= tan η = – tan η < 0

Al + Ar

Henee avem Al > Ar, așa cum este necesar pentru lumina LEP. Această diferență poate fi folosită pentru a decide între lumina REP și LEP.

2. Compensator Babinet. Compensatorul Babinet prezentat în Fig. 9.23 este similar cu o prismă Wollaston, dar unghiul $\alpha \approx d/L$ este suficient de mic încât deviația unghiulară suferită de cele două fascicule emergente poate fi neglijată. Efectul principal

Mișcarea compensatorului

Fig. 9.25 Compensator babinet.

apoi este producerea unei diferențe de fază relativă, care depinde de înălțimea de trecere a fasciculului prin dispozitiv. Presupunem aici că materialul este calcit, astfel încât axa rapidă se află în planul figurii. În prima parte a compensatorului, schimbarea relativă de fază a undei în raport cu unda este

2π

Δ≠1 = y(«0 - ne)d1

În a doua parte a compensatorului, rolurile sunt inversate, iar schimbarea de fază relativă este

– 2π

δ<^>2 = -ɪ ("o - "e) d2

Schimbarea totală de fază este atunci

2π

Δ≠ = Δ≠1 + Δφ2 =-r(n0- ne)(d1 - d2)

Deoarece

2wd

d^ dy —— 2d1 d — —

Asta da

4π

$\Delta\varphi$ = ^n0 - ne)wd (9,40)

ca faza undei e minus faza undei o. Când w este pozitiv, unda e, care este polarizată în planul desenului, este unda o. Când w este negativ, este adevărat opusul. Pentru o funcționare corectă, lumina incidentă trebuie să fie într-un fascicul îngust, astfel încât w să fie bine definit.

3. Activitate optică. Activitatea optică poate fi găsită în solide, lichide și gaze cristaline și monocristaline. În cristale este adesea însoțită de dublă refracție, iar fenomenele rezultate pot fi destul de complexe. Unele cristale cubice - de exemplu, cloratul de sodiu și bromatul de sodiu - prezintă activitate optică Necomplicate prin dublă refracție.

Activitatea optică își are originea în caracterul inerent elicoidal sau de tip șurub al moleculelor materialului care o produce (Fig. 9.24). În forma sa pură, adică fără dublă refracție, rezultă indici diferiți de refracție pentru stânga și dreapta

Fig. 9.24 Parte dintr-o moleculă elicoidală capabilă să producă activitate optică.

Fascicule de lumină polarizate circular. Doar astfel de fascicule se vor propaga prin mediu fără schimbare.

Un fascicul Iinear polarizat va fi modificat; de fapt direcția sa de vibrație se va roti pe măsură ce se propagă prin mediu. Aceasta este una dintre cele mai clare manifestări ale activității optice. Acum va fi oferită o scurtă descriere.

Fie n_L și n_R indici de refracție pentru LCP și, respectiv, RCP. Fie ñ = 1/2(πl + nκ) indicele mediu și £ = 2πn/λ mărimea medie a vectorului de undă. Puterea specifică de rotație este definită a fi

n(nL - «r) P ≡

(9,41)

λ

Atunci vectorii de undă pentru Iight polarizat circular la stânga și la dreapta au mărimi kL = κ -I- p

kR = k — p (9,42)

Este convenabil să folosiți notația complexă a ecuațiilor. (9.23) și Fig. 9.6. Fie z direcția de propagare și Iet Ë = Ex + iEy. Să presupunem că în planul z — 0 există Iight polarizat cu amplitudinea A vibrând în direcția β/2, așa cum se arată în Fig. 9.25. Apoi

Ë = elfil2 A cos eut

sau

r λ . β

E=A cos ωt cos -

x 2

. β

Ey = A cos ωt sm -

Aceasta poate fi scrisă și ca o suprapunere a componentelor polarizate circular

El = eiβl2 ⅛Aeiωt

Er = eipι2 ½Ae~iωt

Fig. 9.25

Pentru z finit trebuie să facem înlocuirea

ωt → ωt — kRz = <?0 ÷ pz

pentru cele două componente, unde ^>0 = cot — Hz. Asta da

El = eiβl2 ⅛Aei^0~pzi

Er = eiβt2 ⅜Λe-i<5o+z,z> v

sau

E = Ex + iEy = eiβl2 ±A[ei(*°-pz) + e^i^o+pz^

_ ei(β/2-pz) ly4(e'≠o _|_ g-'≠θ) = e^β | 2~pz) д cos

Henee

φ0 = o)t — Hz

(9,43)

Ex = A cos φ0 cos

$E_y = A \cos \varphi_0$ sinf^ - Pz

(9,44)

Aceste ecuații descriu Iight polarizat inițial care vibrează la unghiul β/2 — pz. Astfel, parametrul p dă unghiul de rotație pe unitatea de distanță de propagare.

Cuarțul cristalin este un exemplu de cristal dublu refractor, optic activ. Dacă ar fi doar dublă refracție, deoarece este uniaxială, lumina care se propagă de-a lungul axei optice ar fi exprimată ca o suprapunere a componentelor polarizate liniar cu același indice de refracție, indicele obișnuit. În schimb, cele două componente care se propagă nealterate sunt polarizate circular cu indici n_L și $n_R \neq n_L$. Rotația specifică la Л = 589,3 nm este p = + 3,8 rad/cm. Există două tipuri de cuarț: cuarț pozitiv sau dreptaci pentru care p este pozitiv și cuarț negativ sau stânga pentru care p este negativ.

Pentru propagarea în cuarț nu de-a lungul axei optice, cele două stări de polarizare care se propagă neschimbate corespund Iight-ului polarizat eliptic (Fig. 9.26). Elipsele celor două componente sunt orientate în unghi drept. Ele devin cercuri pentru propagare de-a lungul axei optice și degenerează în fine drepte pentru propagare perpendicular pe axa optică.

Axa optică

Fig. 9.2« Fronturi de undă și elipse de polarizare pentru undele care se propagă fără modificare în cuarțul cristalin. Această diagramă este menită să fie schematică și nu este exactă cantitativ.

9.3 Parfiolly Polarzed Ught 6111

---------►

Fascicul cu laser

---------►

Lumină împrăștiată

Fig. 9.27 Demonstrarea activității optice în cuarț.

O demonstrație a activității optice în cuarț se face cu ușurință folosind fasciculul de lumină polarizat de la un puternic laser cu gaz continuu. Figura 9.27 prezintă schematic rotația planului de polarizare a Iight care se propagă de-a lungul axei optice. Acest lucru poate fi văzut direct prin împrăștierea fasciculului intens prin imperfecțiunile cristalului. Acestea acționează ca particulele de praf dintr-un gaz. După cum sa discutat în legătură cu Fig. 9.11, împrăștierea va fi cea mai intensă în direcții perpendiculare pe vectorul E al fasciculului și zero în direcții paralele cu vectorul E. Când privim în unghi drept față de fasciculul laser, intensitatea luminii împrăștiate variază periodic cu maximele când E este perpendiculară pe direcția de observație. Acestea apar la distanțe egale de $2\pi/p$ = 5,5 mm pentru λ — 488 nm.

9.3 Lumină parțial polarizată

Un fascicul de lumină parțial polarizat este un amestec de un fascicul în stare de polarizare pură și un fascicul nepolarizat. Această descompunere este unică. Depinde de coerența reciprocă dintre câmpurile electrice care vibrează de-a lungul a două direcții perpendiculare și poate fi determinată experimental. În această secțiune prezentăm formalismul matricei de coerență cu care poate fi caracterizat lumina parțial polarizată.

Luați în considerare un polarizator care are direcția de trecere ușoară, sau direcția de trecere, înclinată la unghi ψ față de axa x (Fig. 9.28). Dacă Ex și Ey reprezintă componentele dreptunghiulare reale ale câmpului electric incident Ilinear polarizat, proiecția la unghiul ψ este dată de

$$E(\psi) = E_x \cos \psi + E_y \sin \psi$$

Fig. 9.20

Densitatea fluxului transmis va fi proporțională cu media de timp

<E(i/r2)> = <£x> cos2 ψ + <£2> sin2 ψ + 2<£x£y> sin ψ cos ψ (9.45) sau, dacă câmpurile sunt reprezentate prin mărimi complexe ca în ecuațiile . (9.2) și (9.3) <£(<A)2> = |<££*> = ⅛<Λ2> cos2 ψ + ɪ <Л2> sin2 ψ

+ ⅛[<ExE*> ÷ <£*£>.)] sin ψ cos ψ

oc S(ψ) (9,46)

Dacă funcția de corelație <£x£y) este zero, se adaugă densitățile de flux asociate componentelor X și y. Acest lucru se poate întâmpla prin oricare dintre două moduri sau o combinație a ambelor: (1) Ex și Ey nu pot avea coerență reciprocă, sau (2) Ex și Ey pot fi corelate, dar au o diferență de fază relativă de π/2 rad. Dacă <£x, £y> ≠ 0, trebuie să existe coerență reciprocă între componente, dar Ec. (9.45) nu este suficient să o determine complet. Schimbări suplimentare de fază trebuie introduse artificial, iar apoi lumina trecută printr-un polarizator rotativ, pentru ca lumina să fie caracterizată în mod unic.

Să presupunem că înaintea polarizatorului este introdus un compensator astfel încât faza componentei y este deplasată de la φy la φy + φr + Δφ și faza componentei x este deplasată la φx + φ'. Apoi Ex este înlocuit cu

A ei(ωt~kz + Φ*) eiΦ, = £ ei<t>'

iar Ey este înlocuit de

A gi^ωt ~kz++aφ^ |= £ gi(Φ'+ΔΦ)

iar câmpul trecut de polarizator setat la unghiul ψ devine

E(ψ, Δ<ή) = (£x cos ψ + eiιiφEy sin ψ)eiφ' cu o densitate de flux proporțională cu

|<££*> = ⅛{<X2>cos2 ψ + <A2>sin2 ψ

+ [<£x£*>e-¡^ + <£*£y>e'^]sin ψ cos ψ} oc S(ψ, Δ√>) (9,47)

Este clar din Ec. (9.47) că S(φ, Δφ) este sensibil doar la defazajul relativ (Δφ) dintre Ey și Ex produs de compensator și insensibil la orice defazaj comun φ'.

A. Matricea de coerență

1. Definiție. Există patru medii care apar în Eq. (9.47) care determină funcția S(ψ, Δφ). Sunt:

Jxx ≡ <ExEJ> = <Λ2> Jyy ≡ <Ej,E*> = <Λ2> Jxy ≡ {ExE*')

Jyx ≡ <E*Ey) = J*y

(9,4*

și formează elementele unei matrice două câte două numite matr de coerență

J — I xx χy J

\ 4•fj1jc Jyy y

Această matrice este hermitiană. Pentru o astfel de matrice elementele satisfac

j* = jr* _ Γ T* — J

XX XX' u xy u yX' yy yy

Densitatea fluxului (ignorând constantele) poate fi apoi scrisă

5(ι/r, Δφ~) = Jxx cos2 φ + Jyy sin2 ψ + sin ψ cos ψ(Jxy e~'iiφ + Jyx el^φ) (9.51a) Scrierea Jxy = I JxyIe~,φ, Jyx = I JxyIeiφ, [unde φ = φy — φx ca în Ec. (9.4)] obținem o formă alternativă a Eq. (9.51a)

S(ψ, Δφ) = Jxx cos2 ψ + Jyy sin2 ψ + 21 Jxy I sin ψ cos ψ cos(φ + Δφ) (9.51b)

Dacă facem media peste φ găsim

<W, Δφ)yψ = ⅛so = ⅛jxx + Jyy)

Aici S0 reprezintă suma densităților de flux măsurate în două direcții de trecere perpendiculare, la unghiul ψ și la unghiul ψ ± π/2,

(9-M

(9,50)

$S0 = Jxx + Jyy = S(\psi, \Delta\varphi) + si\psi$ ±~,Δφ

(9,52)

și este densitatea totală a fluxului în fascicul. Rețineți că Jxx — $S(0, \Delta\varphi)$ și Jyy — $S(\pi/2, \Delta\varphi)$. Prin urmare, suma elementelor diagonale ale unei matrice este urma matricei

$S0 = Tr J$

(9,53)

Natura luminii polarizate din fascicul este independentă de S0 și depinde de rapoartele elementelor matricei Jij. Din acest motiv definim o matrice de coerență redusă

j = sj

ɔo

având elemente $jij = Jij/S0$. Apoi

$Tr j = 1$

(9-54)

(9,55)

2. Determinarea elementelor matricei de coerență. Pentru că putem scrie

există patru mărimi reale independente care determină J • J xx' Jyy' I Jχy \ , și φ. Acestea pot fi determinate din patru măsurători ale densității fluxului folosind un polarizator și un compensator. Nu există o modalitate unică de a face acest lucru, dar dăm aici un exemplu de un set de patru astfel de măsurători.

1. Polarizator de-a lungul axei x. Apoi măsurăm S(0, Δ</>) = Jxx.

2. Polarizator de-a lungul axei y. Apoi măsurăm S(π/2, Δ</>) = Jyy.

3. Polarizator setat la 450 față de axă. Asta da

= - [Jxjt + Jyy + Jxy ÷ JyJ = 2 (Ax + Ay) ÷ Ay

4. Placă cu un sfert de undă cu axa rapidă de-a lungul x (Δφ = — π/2), urmată de un polarizator la 45° față de axa x. Asta da

(π — π \   11

д' 2) 2 t(,^χχ ^*^ Ay ^(Ay Aχ)3 2 (Aχ Ay) Im Jxy

Aceste patru ecuații pot fi rezolvate pentru Jxx, Jyy, Re Jxy = |Jxy \ cos φ și Im Jxy = I Jxy I sin φ.

B. Exemple de polarizare

1. Lumină polarizată liniar. Să presupunem că planul de vibrație al Iight formează un unghi χ cu axa x (Fig. 9.29) unde

$\tan \chi = Ay/Ax$

Când direcția de trecere φ a polarizatorului este egală cu χ, observăm o densitate maximă de flux transmisă dată de

$S0 = (Ax) + (Ay)$

unde S0 este densitatea totală a fluxului în fascicul. Când φ este egal cu ±χ ± π/2, S ia valoarea minimă zero.

Fig. 9.2©

9.3 Lumină parțial polarizată 615

Pentru o valoare generală a lui ψ, Eq. (9.51) se ține cu φ = 0 și

$Jxx = S0 \cos2 \chi, Jyy = S0 \sin2 \chi$

$Jxy = Jyx = S0 \sin \chi \cos \chi$

(9 56)

Matricea de coerență ia astfel forma

/ cos2 χ sin χ cos χ'

w ~ ljOl • 2   \ -'•~, ')

y sin χ cos χ   sin χ J

Pentru defazajul cu compensare zero Δ</), Eq. (9.51) poate fi apoi rearanjat pentru a da

$S(\psi, O) = S0 \cos2(\psi - \chi)$

(9,58)

2. Lumină nepolarizată. Lumina nepolarizată este caracterizată printr-o densitate de flux transmisă constantă, independentă de unghiul de polarizare ψ sau de defazarea Δ</>. Prin urmare

$S(\psi, \Delta\varphi) = const = So/2$

Acest lucru poate fi adevărat numai dacă

Aici S0 reprezintă densitatea totală a fluxului măsurată atunci când nu există un polarizator în fascicul. Matricea de coerență ia apoi forma

adică este un multiplu al matricei unitare

3. Lumină polarizată circular. Când lumina este polarizată circular avem $A_x = A_y$ — A și

Φ = Φy - Φx = - I pentru LCP

Φ= + pentru RCP

Apoi

Jxx Jyy >

Jxy = <Λ2>ei≠ = {A2')e-iπ | 2 = -z<Λ2> = -Jyx pentru LCP

Jxy = + z<Λ2> = -Jyx pentru RCP

616

Polorizαtion

Când Iight polarizat circular trece printr-o placă cu un sfert de undă cu axa rapidă de-a lungul axelor x sau y, obținem Iight polarizat liniar la unghiul $\chi = \pm\pi/4$ și având o matrice de coerență (pentru $\chi = +\pi/4$)

j=Bună!

Densitatea fluxului este maximizată la $\psi = \chi$ și este egală cu S_0 = 2Jxy. Astfel putem scrie Jxy = <Λ2> = ⅛S0

iar matricea de coerenţă a Iight-ului original ia forma

pentru LCP

pentru RCP

(9.60a)

(9.60b)

4. Lumină poIarizată eliptic. Pentru o lumină polarizată eliptică generală avem (pentru $z = 0$)

E=A ei,•ω,+φχ)

Ey = Ay ei<ωi+<W

unde raportul A_y/A_x și diferența de fază $\varphi = \varphi_y - \varphi_x$ trebuie să fie constante. Folosim formele scurte

Z = tan 1(Ay/Ax)

și

S0 — Jxx ÷ Jyy — <Λχ> +

Atunci matricea de coerență poate fi scrisă ca

■ _ ç /   ∞s2 χ e iφ sin χ cos χ

j - *ɔol i<>> • . 2

\ e φ sm χ cos χ sin χ

Aceasta include ecuațiile. (9.57) și (9.60) ca cazuri speciale.

Rețineți că pentru toate stările pure de polarizare

(9,61)

det J = JxxJyy - jχyjyχ = o   (9,62)

Iflight descris de Eq. (9.61) trece printr-un compensator astfel încât faza lui Ey este întârziată cu un unghi - φ față de cea a lui Ex, atunci matricea de coerență devine

J

(2

cos X0 Sin χ0 COS χ0 Sin χ0 COS χ0 Sin2 X0

9.3 LigKt parțial polarizat o 17

Aceasta are aceeași formă ca Eq. (9.56) și astfel reprezintă Iight polarizat inițial în direcția χ0.

C.   Combinația de fascicule de lumină

Formalismul matriceal ne permite să documentăm Caracteristicile combinațiilor de fascicul de lumină cu o notație compactă.

1. Grinzi reciproce incoerente. Două fascicule de lumină care se propagă în aceeași direcție ɔn vor fi reciproc incoerente dacă câmpurile lor sunt necorelate, adică dacă

<E<cυE<c2>*> = <E',11E<2rt> = <E∞E∞*> = <E'1E'21*> = 0

Matricea de coerență J pentru Iight combinat este atunci pur și simplu suma matricelor de coerență individuale,

(<ExE*~}

\ <β*Eyy

<ExEf> \

<Ochi^)

(E^E™*> <E<cυE<,υ*> \

<E∞*E∞> <E<,1>E<,1>*J

/<E<2>E<2>*> <E<2E∞*> \

\ <E<c2>*E<,2>> <E®E'2)*> J

sau

J = J(1) + J<2)

Dacă ambele fascicule au aceeași stare de polarizare, ele vor avea aceeași matrice de coerență redusă. Henee,

J = 5iυj + S(2)j

= (S(1) + S,<2>)j

Aceasta spune că combinația a două fascicule incoerente în aceeași stare de polarizare produce un fascicul având aceeași polarizare ca și componentele sale.

Noțiunea de suprapunere a fasciculelor incoerente este utilă pentru descrierea luminii nepolarizate. De exemplu, lumina nepolarizată poate fi descrisă ca o suprapunere a două componente egale, incoerente, polarizate în plan, cu planuri de vibrație reciproc perpendiculare. Fie că un plan are un unghi de înclinare χ. Atunci matricea de coerență a unei componente este

j<υ = jω = ⅜(.∞s2X si-Z ∞s Z)   (9 63a)

2 y sin χ cos χ sɪn χ J

Cealaltă componentă trebuie să aibă atunci unghiul de înclinare χ + π/2 și matricea de coerență

j<2> = Λ ± Ξ) = W Sin2X -sin Z COS x\

y 2 J 2 y — sm χ cos χ cos χ J

616

Polorizarea

Apoi

0'

1

= T1

ç /1

j=j<υ÷^' = f(0

Iight nepolarizat poate fi, de asemenea, descris ca o suprapunere a incoerentelor egale

fascicule polarizate circular la dreapta și la stânga: v

J(1) = J(RCP) =

M2

(9.64a)

J<2) = J(LCP) =

(9.64b)

0'

1

J=JU. + J<2. = iSoÇ

Două fascicule incoerente, fiecare într-o stare pură polarizată eliptică, pot fi combinate pentru a produce lumină nepolarizată. Notarea Eq. (9.61) este convenabil în acest scop. Fie matricele de coerență pentru cele două fascicule

elφi sin χ_1 cos χ_1 \ sin2 Zi J

e~'φ2 sin χ_2 cos χ_2 \ sin2 χ_2 J

Atunci Iet $\chi_2 = (\pi/2) - \chi_1$, $\varphi_2 - \pi + \varphi_1$, $S(2) = S(1) = So/2$ pentru a obține

COS2 χ_1 e'φ' sin χ_1 cos χ_1 J<2> = s<2>/' ∞s2

\ elφ2 sin χ_2 cos χ_2

J = J(I) + J(2) = ⅛ I

2

(9,65)

(9,66)

Acest ultim exemplu include primele două ca cazuri speciale — când φ_1 = O, $\chi_1 - \chi$, primul exemplu este recuperat, iar când $\varphi_i = - \pi/2$, $\chi_1 = \pi/4$, al doilea este recuperat. Cele două componente diferite în cele trei cazuri sunt prezentate în Fig. 9.30. Rețineți că axele majore ale celor două elipse sunt la o distanță de 90° și că elipsele au aceeași dimensiune și formă, cu sensuri opuse de rotație.

2. Lumină parțial polarizată. Arătăm acum că Iight parțial polarizat poate fi exprimat ca o suprapunere a Iight nepolarizat și a Iight polarizat pur (polarizat eliptic, în general), și că această

descompunere este unică. Pentru a face acest lucru, arătăm că o matrice de coerență arbitrară J poate fi scrisă sub forma

J = Jd) + J(2)

sau

(Jxx Jxy \ (A 0\ ÍB D\ \ J*y Jyy) \ 0 Xy + \ D* Cj

(9,67)

M

1

Fig. 9.50 Lumina nepolarizată ca suprapunere incoerentă a două Componente: (a) plan; (b) circulară; (c) eliptică.

A doua matrice J(2) ar trebui să reprezinte o stare pură de polarizare. Prin urmare, prin Ec. (9.62) determinantul său trebuie să dispară:

$BC - DD^* = 0$ (9,68)

O altă cerință pentru J(2) este că oferă valori nenegative ale densității fluxului atunci când este utilizat în Eq. (9,46) sau (9,47). În special, cerința $S(O) \geq 0$ oferă

$B > 0$ (9,69)

iar cerința $S(\pi/2) \geq 0$ dă

$C \geq 0$ (9,70)

Matricea Eq. (9.67) oferă patru ecuații obișnuite

J xx — y4 + B

Jxy-D

J*xy = D*

Jyy = A + C

Astfel B = Jxx - A și C = J„ - A și Ec. (9.68) devine

(Jxx - AXJ,, — Л) — J2x, = O

sau

A2 — A(Jχχ + Jyy) + JχχJyy — JχyJyχ — θ

V

sau

A2 - A Tr J + det J = O

cu

TrJ - Jxx A Jyy, dctJ J XX JyyJxy J yx

Ecuația (9.71) reprezintă, de asemenea, așa-numita matrice a ecuației caracteristice J. O astfel de ecuație se obține de obicei sub forma

det(J - Al) = 0

unde I este matricea unitară

sau

(9,71)

(9,72)

pentru

Există două soluții ale ecuației. (9.72) dat de

Tr J ± √(Tr J)2 - 4 det J

A12- 2

Argumentul radicalului este

(Jxx + Jyy)2 - 4(JxxJyy - I Jxy | 2) = J2xx + J2yy - 2JxxJyy + 41 JxyI2 = (JXX - Jyy)2 + 41 Jxy \ 2 > 0 astfel încât radicalul să fie real.

Ambele soluții A12 sunt nenegative. Acest lucru este evident pentru

_ Tr J + √(Tr J)2 - 4 det J

Zl 1 -

1 2

Să-l vezi pentru

(9,73)

(9-74)

_ Tr J - √(Tr J)2 - 4 det J

Zl 9 — --------------------

2 2

trebuie doar să notăm că

$\sqrt{(Tr\ J)^2 - 4 \det J} \leq Tr\ J$

astfel încât

$-\sqrt{(Tr\ J)^2 - 4 \det J} > -Tr\ J$

și asta

_ Tr J - √(TırJ)2 - 4 det J Tr J - Tr J

Л2 — —≥ —-= 0

2

2

Avem și din Eq. (9,74)

$\sqrt{(TrJ)^2 - 7\det J} \geq |J_{xx}-J_{yy}|$

astfel încât

Al ≥ J XX

ɪɪ JXX ≥ Jyy

sau

Ai — Jyy

ίί Jyy ≥ Jxx

Aceasta încalcă una sau alta dintre inegalitățile (9.69) sau (9.70):

$B = J_{xx} - A \geq 0$

$C = J_{yy} - A \geq 0$

Astfel, soluția noastră semnificativă din punct de vedere fizic trebuie să fie

Tr J - √(Tr J)2 - 4 det J

Л =   =----------------------

Apoi

B =] _A Λ,-Λ, + √(TrJ)2-4detJ

xx 2 2

și r _ , _ . _ Ax ÷√(Tr• |)2 -4 det J

c — √yy л2 — 2

Densitatea totală de flux este dată de Ec. (9,53) ca

$S0 — Tr J — A1 + A2$

Densitatea de flux a părții polarizate este

Spol = TrJ<2> = B +C = (A1-A2)

iar densitatea de flux a părții nepolarizate este

An = A ~ Aol = 2

(9,75)

(9,76)

(9,77)

(9,78)

(9,79)

(9,80)

(9,81)

D. Specificații de polarizare

1. Gradul de polarizare. Raportul dintre densitatea de flux a părții polarizate și cea a totalului unui fascicul de lumină parțial polarizat este definit ca fiind gradul de

polarizare P:

= V Γ1 4detj ~ s0 L <TrJ)2.

(9,82)

Aici se poate scrie și P

Ai — A2

Λ1 + A2

(9,83)

Matricea J(1) reprezintă un fascicul nepolarizat:

A2 0 V1-C P θΛ

O A2) 2 u \ 0 1)

(9,84)

Matricea J(2) reprezintă un fascicul pur polarizat eliptic și poate fi scrisă

B

j*

. X y

Jχy \

C)

s Í cos2χ pol \ 4e,ψ sin χ cos χ

e lφ sin χ cos χ sin2 χ

(9,85)

cu

/Γ \ 1/2

χ = tan-1(— J

\ b/

Dacă fasciculul este trecut printr-un compensator cu defazaj Δ≠ = — φ J(2) se schimbă în

J<2>' =

IAyI

| jJV Í COS2Z

C) polIsin z cos z

sin z cos z sin2 z

Aici J(1) este lăsat neschimbat. Atunci, dacă fasciculul este trecut printr-un polarizator cu unghi de trecere ψ, intensitatea măsurată S(ψ, -φ) în notația noastră originală [Eq. (9.51)], va fi dat de

S,(ι/ς -</>) = ⅛Soare + Spol cos2(ι/r - z) = So{⅛ + P[cos2(ι/r - χ) - ⅛]} (9,86)

Aceasta are o valoare maximă de

Smax = ⅛S0(l + P) = A1 (9.87a)

și o valoare minimă de

Smin = ⅜deci(l -P) = A2

(9.87b)

Astfel se poate scrie gradul de polarizare

S — Ç

P _ omax   tjminzn qq\

F ~ —ξ-(9,88)

umax ' *jmin

Când Δ</> nu este egal cu — φ, valorile maxime și minime ale lui S(ψ, Δφ) vor fi în mod evident mai mici și I mai mari decât valorile tocmai date.

2. Caracterizare experimentală. Un fascicul de lumină general parțial polarizat este un amestec de lumină polarizată eliptic și lumină nepolarizată. Acesta va fi specificat în mod unic de cinci parametri, densitatea totală a fluxului S0, gradul de polarizare P, unghiul de orientare β/2 al axei majore a elipsei, raportul tan(tj) dintre lungimile axelor minore și majore, şi sensul de rotaţie sau elicitatea Iight (vezi Fig. 9.22).

Avem nevoie de un polarizator și o placă cu un sfert de undă pentru a determina acești parametri. Polarizatorul este mai întâi plasat singur în fascicul și rotit în timp ce se observă densitatea fluxului transmis. Cele două direcții de trecere care dau densitatea maximă a fluxului corespund cu E Vibrând de-a lungul axei majore a elipsei și henee corespund unghiurilor β/2 și β/2 + π. Direcțiile de trecere care oferă densitatea de flux minimă sunt la β/2 + π/2. Până acum lumina s-ar putea situa între următoarele două extreme: (1) Iight pur polarizat eliptic cu tan η = λ/Smin/Smax și (2) un amestec de lumină nepolarizată și lumină polarizată pian care vibrează de-a lungul direcției β/ 2.

Este convenabil să luăm în considerare un nou set de axe de-a lungul x și ÿ așa cum se arată în Fig. 9.22. Plasați un sfert de undă în fasciculul incident, astfel încât axa sa rapidă să fie de-a lungul axei X. Orice lumină polarizată eliptic cu axa majoră de-a lungul x va fi apoi convertită în lumină polarizată piană care vibrează la un unghi de + η în raport cu axa x, unde semnul plus se referă la lumina polarizată eliptic drept și semnul minus la polarizarea eliptică la stânga. ușoară. Dacă lumina inițială este un amestec de lumină nepolarizată și lumină polarizată piană care vibrează de-a lungul x, piata sfert de undă nu va avea niciun efect.

Pentru cazul mixt, va exista o componentă nepolarizată prezentă după ce lumina a trecut prin placa sfert de undă. Unghiul η poate fi determinat folosind un polarizator după placa cu un sfert de undă. Cu direcția de

trecere a polarizatorului de-a lungul η sau η + π (w, față de axa x), densitatea fluxului va avea o valoare maximă de

⅛ax = Spol ÷ ⅛Soare

Cu direcția de trecere de-a lungul η + π/2, densitatea fluxului va avea o valoare minimă de

S,mi∏ — ⅛Soare

Gradul de polarizare este atunci

<?

p __ umax kjmin

„ Ç _l Ç

*jmax ' kjmin

624 PoloriZQtion

iar densitatea totală a fluxului este

$0 = ^max T ^min

9.4

Optica Crysfol

Multe cristale au o simetrie suficient de puțin încât proprietățile lor optice să fie anizotropie (depinde de direcția de propagare și polarizare). Rezultatul este dublă refracție. Am introdus deja acest subiect în secțiunea 9.2. Aici dorim să detaliem fenomenul cu o prezentare bazată pe ecuațiile lui MaxwelF. Nu vom discuta efectele aferente, cum ar fi electrooptica, magnetooptica și proprietățile optice neliniare, dar ne vom concentra asupra fundamentelor propagării luminii în medii anizotropice.

A. Unde electromagnetice în dieIectric anizotrop

Cele patru ecuații Maxwell în absența taxelor gratuite sau a Curenților sunt

eu

VD =O

= O

II

VB

III

. .. aв

dt

VxH = -dt

Mediul va fi considerat nemagnetic, astfel încât $\mu = \mu_0$ și $B = \mu_0 H$. Căutăm soluții ale formei de undă plană cu o dependență de fază exp[i(ωt — tone · r/c)] așa cum este sugerat în introducerea acestui capitol. Acest lucru permite aplicarea comenzii rapide a operatorului Eq. (1.28) la ecuațiile Maxwell TII și IV:

VxE= — zωμ0H

VxH = iωD

IV

sau

V × (V × E) = μ0ω2D

(9,89)

1. Relația dintre D și E. Dependența spațială rămasă a fazei conține vectorul unitar â, care este normal suprafețelor plane de fază constantă, și n, indicele de refracție. Mărimea vitezei de fază c/n va fi atunci viteza cu care se propagă suprafețele de fază constantă. Aceasta va fi, de asemenea, notată ca viteza undei

âc

vw = —

n

(9,90)

(9,91)

Aplicarea celei de-a doua comenzi rapide pentru operator [Eq. (1.29)] găsim

Vx(VxE) = --^2-â × (à x E) = -[ă(â · E) - E]

deoarece â · â = 1. (Am folosit și o identitate vectorială.) Acest lucru conduce la următoarele expresii pentru D în termeni de E:

D = ε0n2[E — ă(â • E)]

unde D este perpendicular pe â.

Ecuația (9.91) a fost derivată din ecuațiile lui Maxwel folosind doar ipoteza dependenței spațiu-timp de undă plană. Proprietățile mediului dielectric sunt introduse de ecuațiile suplimentare

Dx εxχEx ^b ExyEy + εxzEz

Dy εy×Eχ H^ Eyy Ey + EyzEz

E^z εzχEx H~ εzy Ey + EzzEz

sau

3

Λ•= ∑εijEj

(9,92)

unde i,j = 1 pentru x, 2 pentru y și 3 pentru z. Forma acestor ecuații sugerează că exprimăm Telationship-ul în termeni de matrici

D = εE

(9,93)

Unde

/d;

D =I Dy

\D.

/Ex

E = Ey

\E.

(9,94)

și

£xy

Eyy

Ezy

£xz

£yz £ZZ,

(9,95)

ε =

ε_{xx}

ε_{yx} ε_{zx}

Matricea 3x3 din Ec. (9.95) este un caz special de tensor. Tensorii pot fi definiți la

descrie o varietate de proprietăți ale mediului dependente de direcție. Frecvent este necesară o dimensionalitate mai mare. Există reguli pentru operațiile algebrice între tensori. În trei dimensiuni, acestea sunt aceleași cu cele pentru algebra matriceală. Nu vom discuta tensorii de dimensionalitate superioară în această carte. Cu toate acestea, identificăm ε ca tensor dielectric.

În mediile neabsorbante fără activitate optică, se poate demonstra că ε este real și simetric. Prin urmare

P. . ~ F*

(9,96)

și

$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji}$ (9,97)

Pentru un astfel de tensor putem găsi întotdeauna un sistem de coordonate dreptunghiular în termenii căruia matricea Ec. (9,95) este diagonală. Există atunci doar trei elemente independente. Axele de coordonate din acest sistem special sunt numite axe principale. În ceea ce privește acestea ε ia forma

A ε =I 0

\0

O

ε,

O

(9,98)

0

0

ε_2

Cuantificările ε_x, ε_y și ε_z sunt numite valori principale ale lui ε. Toate sunt nenegative și sunt funcții ale frecvenței ω.

Când combinăm ecuațiile. (9.91) și (9.92), constatăm că pentru axele principale

2 ε0nEi - si ∑ SjEj J- εiEi = 0(9,99)

Pentru a înțelege mai bine această ecuație, o putem scrie în două forme alternative. The prima versiune este

ME = O (9.100)

cu

n2(l-$2) —— εo-n2sxsy-n2sxsz'
M = -n2sxsy"2(1 - ϕ -i εy2 ∧ ∧ -n2sysz 0(9.101)
\ -n2s^xsz - n2syszn2(l - s2) - εz/ε0

Cu condiția ca elementele lui M să fie cunoscute, putem folosi Eq. (9.100) pentru a găsi elementele lui E. Probabil că am avea acces la elementele tensorului dielectric e și am fi capabili să specificăm direcția de propagare prin vectorul unitar s = (sx, Sy, sz). Trebuie să determinăm n2. Acest lucru poate fi realizat prin recunoașterea faptului că Ecs. (9.100) au o soluție dacă și numai dacă ecuația caracteristică este satisfăcută

det M = 0 (9,102)

O versiune echivalentă poate fi scrisă ca trei ecuații separate ale formei

(ε \

n2--' Ex = n⅛(S•E)

ε0 /

sau

E

n2

----→x(*•E)

n2-x

εo

și așa mai departe pentru Ey și Ez. Sau

și așa mai departe, unde

n2s^2

íA=^?(§·E)

(9 10'

n2 = –

'*X --

εo

2

h2≡-jl

εo

(9.104)

„z2≡-εo

Când cele trei ecuații de forma Eq. (9.103) sunt însumate găsim

■ n2s2x n2s2 n2s2z

^^2 2 + ~2 2 + ~2 2

n – nx n – n¿ n – nz

(â-E) =

(â-E)

(9,105)

Când (s • E) ≠ O, poate fi anulat din ambele părți, lăsând ecuația FresneF ɪ _ £ , ⅛ . ⅛ n2 n2-n2xn2- n2 n2- n2z

Ecuațiile (9.102) și (9.105) par a fi ambele cubice în n2, dar în ambele cazuri când sunt scrise în termeni de polinom în n2, coeficienții lui n6 dispar identic, lăsând o ecuație pătratică în n2, care poate fi arătată. să aibă două rădăcini pozitive, nf și n2.

Astfel, pentru o direcție de propagare dată s, există în general două valori ale indicelui de refracție, n1 și n2. Dacă acestea sunt substituite pe rând în matricea M, Ec. (9.100) poate fi rezolvată pentru componentele lui E, la o constantă multiplicativă nedeterminată. Fie cele două soluții pentru E, corespunzătoare lui n1 și n2, notate cu E1 și, respectiv, E2. Vectorul deplasare este apoi dat de Ec. (9,91). Dacă E este rezolvat în componente paralele și perpendiculare pe § așa cum se arată în Fig. 9.31

E – E11 + E

Fig. 9.31

Atunci E/z = (E • s)s și E1 = E - (E • s)s, iar D este dat de relația simplă D = ε0n2E1 (9.106)

Aici D, E și s sunt văzute a fi coplanare.

De fapt, există două ecuații de forma vEq. (9.106), câte una pentru fiecare soluție a ecuației. (9,99):

D1 = ε0wfE11 (9.107a)

D2 = E0H2E2X (9.107b)

Aceste două valori permise ale lui D sunt perpendiculare. Pentru a demonstra acest lucru trebuie să dovedim

(D1-D2) = O (9.108a)

sau echivalent

(E11-E21) = O (9.108b)

Luați în considerare produsul scalar

(E2 • D1) = ∑ E2iDi = X E2iεijElj = ∑ EljεjiE2i

eu ijij

= ∑ EuD2j = (E1-D2)

J

A treia egalitate a folosit simetria tensorului dielectric. Utilizarea ecuațiilor. (9.107) dă

nι(E2 • E11) = n2(E1 • E21)

Setați E2 = E21 + E21I, unde E21 | este paralel cu s și perpendicular pe E11. Atunci (E2 • E11) = (E21 • E11). În mod similar (E1 • E21) = (E11 • E21). Prin urmare

(H2-H2)(E21-E11) = O

Când h2 ≠ n2, aceasta dă Ec. (9.108b). Cazul n1 = H2 apare în mediile izotropice și de-a lungul anumitor direcții (axe undă-optice) în mediile anizotropice. Direcțiile lui D1 și D2 sunt atunci arbitrare atâta timp cât sunt perpendiculare pe s și este convenabil să le alegeți să fie reciproc perpendiculare și în acest caz.

2. Vectorul Poynting și viteza razelor. Vectorul Poynting S oferă direcția și rata fluxului de energie. Din Eq. (2.20) aceasta este

S = ExH (9,109) '

Câmpul magnetic H este legat de E prin Ec. (2,35)

κ XE и '

B = ~~ω~~ = ɑ x E = nεoAiocs × E = μ0H

Asa de

$H = \varepsilon_0 n c s \times E$

(9.110)

unde S este perpendicular atât pe E cât și pe H și, deoarece H este normal pe planul lui D, E și â, S se va afla în acel plan. Cu toate acestea, în general, nu va fi paralelă cu valul normal s. De fapt, face același unghi Ay cu s ca și E cu D. Acest lucru este ilustrat în Fig. 9.31.

O expresie explicită pentru S poate fi obținută prin scrierea E = Eè unde ê este un vector unitar în direcția lui E. Atunci S este dat de

$S = n\varepsilon_0 c E^2 [s - \hat{e}(s \cdot \hat{e})]$ (9.111)

Acum ê(s · ê) este componenta S1 a lui s de-a lungul lui ê, iar s – ê(s · ê) este componenta S || a lui â de-a lungul S. Astfel, Ec. (9.111) poate fi de asemenea scris

$S = n\varepsilon_0 c E^2 S_{||}$ (9,112)

Vectorul Poynting S definește direcția razei. Tocmai am văzut că, în general, pentru mediile de anizotropie aceasta nu este direcția normalei undei S. Se poate demonstra că atunci când dispersia este prezentă, adică atunci când elementele lui ε depind de frecvență, vectorul viteză de grup pentru un pachet de val va fi de-a lungul S.

Viteza undei vw este viteza de propagare a suprafețelor de fază constantă ωt – ωrc(s • r)/c = (const) și este dată de Ec. (9,90)

SC

Viteza razei vr este de-a lungul lui S și are o mărime conform ecuației. (9,34)

vr = ^Γ =----------r (9•ii3)

cos Δγ n cos Ay

Un vector unitar de-a lungul lui S poate fi construit din vectorul paralel

$s_{||} = s - \hat{e}(s \cdot \hat{e})$

care are mărimea cos Δy. Astfel, vectorul unitar dorit este â || /cos Ay, iar vr poate fi scris

vr =----⅛T^ s и =----⅛γ~ [s - ê(s · e)]

n cos Ay " n cos Ay

O altă versiune se obține notând că

I s ii I2 = cos2 Ay = 1 — (s · ê)2 Prin urmare

c [s — ê(s · ê)]

Vr n[l—(s-ê)2]

O altă versiune poate fi ușor derivată:

fiε0c[s — ê(s · ê)] _ S

Vr= ∑u W = EεE

(9.114)

(9.115)

(9.116)

630 Pθ | QΓiZQtiθn

Fig. 9.52 Porțiuni de suprafață index.

B. Suprafețe indexate

Există mai multe construcții utile în rezolvarea problemelor de propagare a undelor în cristale de anizotropie optic. Una dintre cele mai utile este cea a suprafeței de index. O suprafață indice dată poate fi exprimată ca o funcție n(s) și reprezintă de fapt două suprafețe pentru fiecare valoare a lui â. Pentru a construi suprafețele indexului trebuie mai întâi să găsim cei doi indici n1 și n2 pentru fiecare direcție s folosind ecuația FresneFs (9.105) sau un formalism echivalent. Pornind de la o origine adecvată O, procedăm de-a lungul direcțiilor corespunzătoare, distanțe proporționale cu n1 și n2, situând astfel două puncte. Iocii tuturor acestor puncte formează cele două suprafeţe index (Fig. 9.32).

1. Direcții Ray. Suprafața de index n(s) poate fi utilizată pentru a determina direcțiile lui E, H, D și S pentru unda electromagnetică cu s normal. Se poate arăta că direcția vectorului Poynting S, adică direcția razei asociată cu normala undei S, este perpendiculară pe suprafața indicelui în punctele identificate prin n1 și n2 de-a lungul s. Planul lui s și S este de-a lungul planului lui D și E. După cum este ilustrat în Fig. 9.31, este posibil să se localizeze în acest plan direcția lui D (perpendicular pe s) și E (perpendicular pe S). Aceste concepte sunt clarificate în Fig. 9.33 unde ni < n2. Suprafețele index sunt prezentate în Fig. 9.33a cu vitezele razelor și ale undei și vectorii de câmp E și D.

Pentru comparație, construcția waveletului lui Huygens pentru același material este prezentată în Fig. 9.33b. Observați relația inversă a elipsoizilor dintre cele două diagrame. Trebuie avut grijă să nu confundăm aceste două reprezentări. În Fig. 9.33a, suprafețele indexului sunt doar un mecanism pentru identificarea cantităților vectoriale relevante într-un anumit punct al cristalului. Distanțele

implicate nu sunt asociate cu propagarea. În acest sens, vectorii prezentați în Fig. 9.33a sunt într-adevăr la origine. În Fig. 9.33b, suprafețele sunt fronturi de undă reale după ce a trecut un timp. Perturbația își are originea la originea acelei diagrame la t — O. Putem construi Fig. 9.33b, o imagine fizică a fronturilor de undă, din informațiile obținute în Fig. 9.33a.

Fig. 9.55 Comparația (a) a suprafețelor index și (b) a waveletelor lui Huygens în același cristal.

2. Reflecție și refracție. Luați în considerare o interfață între două medii neabsorbante, neoptic active. Ambele vor fi anizotropie, în general. Fie ca o undă plană să fie incidentă în mediul neamorsat cu direcția normală a undei s și indicele n. Atunci vor fi, în general, două unde transmise în al doilea mediu și două unde reflectate în mediul incident. Razele din mediul incident vor avea, în general, trei indici diferiți n, n'l și n'2 și trei direcții diferite de polarizare liniară (Fig. 9.34).

Nu vom încerca să rezolvăm întreaga problemă de reflexie-transmisie, care constă în determinarea celor două câmpuri transmise și cele două reflectate, dacă este cunoscut câmpul electric incident. (Acest lucru se poate face solicitând ca componentele tangențiale ale lui E și H să fie continue pe interfață.) În schimb, cerem doar

Fig. 9.54 Unda relevantă este normală în reflectare și transmisie la o interfață între mediile de anizotropie.

pentru direcțiile s ale celor patru norme de undă și Valorile corespunzătoare ale indicilor n. Fie ή normalul interfeței. Cu originea 0 așa cum se arată în Fig. 9.35, interfața plană respectă ecuația ή • r = 0 unde r este pe interfață. Acest val incident va fi de forma

E = è A eiω, e~iωns'τlc

cu două unde reflectate, dintre care una este

E'i' = e'[A↑ eiω, e-iωn^'-r | c

și două unde transmise, dintre care una este

E'i = e'lA'1 eiωt e~iωn's''τ | c

Impunerea condiţiilor de limită asupra Etanului şi Htanului (aici Btan) va duce, printre

Fig. 9.55 Relația dintre vectorii scalați n · s pentru una dintre unde.

alte lucruri, cu condiția ca fazele din exponenții fiecărui tern să se potrivească la interfață. Astfel, pentru ail r astfel încât ή · r = 0, trebuie să avem

n'1(s'1 • r) = n'2(s'2 · r) = nï(â" · r) = n'№ · r) = n(s · r) (9.117)
Aceasta înseamnă patru ecuații ale formei

n'‰ = < (9,118)

unde indicele suplimentar σ înseamnă componenta din planul interfeței. Apoi vectorii

nɪsɪ — ns

(și așa mai departe) trebuie să fie paralelă cu normala ή, deoarece componentele perpendiculare pe ή sunt zero prin ecuația. (9.118). Aceasta înseamnă patru ecuații ale formei

nɪsɪ = ns + (consti (9.119)

Astfel, toți vectorii normali de undă â], ă2, s'1 și à2 prezentați în Fig. 9.34 sunt în pianul determinat de s și ή, adică planul de incidență. Deoarece componentele vectorilor ns din pianul interfeței sunt aceleași, obținem o generalizare a SnelFs Iaw pentru mediile anizotropice:

n'i sin θ"l=nsinθ(9.120a)

n2 sin θ'2=nsinθ(9.120b)

n'1 sin θ,l=nsin0(9.120c)

n2 sin θ,2—nsinθ(9.120d)

Legea simplă a reflexiei 0'1' = 0 și 02 = 0 nu se va menține în general, deoarece n-urile sunt diferite pentru undele reflectate.

Reflexia internă totală poate avea loc în două moduri pentru un incident de lumină pe un mediu dublu refractor. Ele sunt ilustrate în Fig. 9.36. Mediul de pe righi este anizotropie, iar una dintre suprafețele index este desenată. Pentru cazul (d) creștem unghiul de incidență 0 până la n sin 0 = OP. Unda transmisă normală s’ este apoi de-a lungul interfeței. Viteza razei transmise vr pentru acest caz nu trece încă pe interfață, dar cu toate acestea pentru valori mai mari de 0 decât cele arătate, unda este reflectată în totalitate, deoarece Ec. (9.120c sau d) nu mai poate fi satisfăcută de un unghi real θ'.

În cazul (h), pe măsură ce 0 este crescut, se ajunge la un punct pentru care vr este paralel cu interfața, în timp ce à' nu este încă pășunat. Vectorul Poynting este apoi paralel cu OP și pentru orice valoare I mai mare de 0 dincolo de cea pentru care n sin 0 = OP nu poate exista nici un flux de energie în mediul superior pentru această ramură a suprafeței indicelui. Această situație corespunde și reflectării totale.

3. Exemplu de mediu uniaxial. Într-un mediu uniaxial, tensorul dielectric, atunci când este exprimat în formă diagonală, are două elemente egale. Dacă axele sunt alese astfel

(b) media, vr este viteza razei refractate.

▲ z (axa optică)

♦ X Fig. 9.37

că al treilea element este diferit, ia forma

K 00 \
ε = εo | O «001(9,121)
\o 0n2/

Astfel εx/ε0 = εj,/ε0 = n2 și εz/ε0 = ne, unde n0 și ne sunt indicii de refracție ordinari și, respectiv, extraordinari. Proprietățile optice sunt acum invariante în raport cu rotația cristalului în jurul axei z, care este axa optică (Fig. 9.37). Fără Ioss de generalitate putem presupune că unda normală â este în planul xz. Henee, s = (sin y0, O, cos p0) și ecuațiile. (9.99), atunci când este scris în detaliu, dați

(n2 - n2)Ex - n2 sin y0(sin γ0Ex + cos γ0Ez) =O (9.121a)

(n2 - n0)Ey = 0(9.121b)

(n2 – ne)Ez – n2 cos y0(sin γ0Ex + cos γ0Ez) = 0 (9.121c)

O soluție a ecuațiilor. (9.121) corespunde undei obișnuite E0 și se obține prin setare

Eox = Eoz = Q, Eoy ≠0, n2 = n20 (9,122) ¢:1

Suprafața pentru n(â) este o sferă cu raza n0. Aici E0 este perpendicular atât pe normala undei â cât și pe axa optică z. Câmpul D corespunzător are Componente ⅞

Dox-Doz = Q, Doy = ε0noEoy (9.123a)

Prin urmare

D0 = ε0n02E0 (9.123b)

Vitezele undei și razelor sunt din ecuațiile. (9,90) și (9,115)

Vw = Vr = S- (9,124)

O a doua soluție corespunde undei extraordinare Ee și se obține prin setare

$E_{ey} = Q, E_{ex} \neq 0, E_{ez} \neq 0$ (9,125)

și rezolvarea celor două ecuații rămase, care pot fi scrise

$(n2 - n2 \cos2 \gamma 0)E_{ex} + (\prod 2 \sin y0 \cos \gamma 0)E_{ez} = O$ (9.126a)

$(n2 \sin \gamma 0 \cos \gamma 0)E_{ex} + (n2 - n2 \sin2 \gamma 0)E_{ez} = O$ (9.126b)

Pentru ca o soluție să existe, determinantul coeficienților Eex și Eey trebuie să fie egal cu zero:

$n2n2 + n4 \sin2 \gamma 0 COS2 \gamma 0 - n4 \sin2 \gamma 0 \cos2 \gamma 0 - n2(n2 \sin2 \gamma 0 \div n2 \cos2 \gamma 0) = 0$

Al doilea și al treilea termeni se anulează, dând o ecuație de ordinul întâi pentru n2, care poate fi scrisă

1 ^sin2y0 ɪ cos2 Уo   (9.127)

n2 n2e n20 \

Aceasta reprezintă apoi ecuația pentru suprafața indicelui de unde e. Pentru propagarea de-a lungul axei optice (y0 = 0°, 180°), indicele n este n0; pentru propagarea în planul xy (y0 = 90°), indicele n este ne. Suprafața indicelui este un elipsoid de revoluție care este tangent la sfera definită de Ec. (9.122). Suprafețele index pentru două exemple sunt prezentate în Fig. 9.38.

Viteza razelor pentru unda extraordinară este furnizată printr-o aplicare a ecuației. (9.116). Este util să manipulăm acest lucru pentru a ajunge la forma Eq. (9.33), care a fost afirmat fără dovezi. Având în vedere acest lucru, formăm

1 _ j_ _ EεE vr • vr V2 S • vr   (9.128)

În cazul uniaxial

EεE = c0 n02E2x + ε0n2E2z   (9,129)

iar din Ec. (9.112) avem

S • vr = ne0cE2s | 1 • vr = nε0cEevr cos Ay — ε0c2E2   (9.130)

unde s-a folosit Eq. (9.113) în ultimul pas. Împreună aceste relații Iead să

JL = ⅛⅛.⅛⅛ V2 c2 E2 c2 E2   (9,131)

Acest lucru poate fi simplificat recunoscând că viteza razei Vr este perpendiculară pe E, astfel

Vrx ·   Eez ïï=smr'=ï:(9.132a)

și

Üz   Eex — - COS ye = — VrEe(9.132b)

Folosind ecuațiile. (9.132) în Ec. (9.131) ne oferă rezultatul final

1 _ cos2 ye sin2 ye V2 c2/n2 1 c2/n2   (9.133)

care are aceeași formă ca Eq. (9.128).

Viteza obișnuită a razelor definește o suprafață care este o sferă; viteza extraordinară a razelor identifică un elipsoid de revoluție. După cum am menționat anterior, forma de

z (axa optică)

suprafata f revolutie)

(A)

Fig. 9.50 Suprafețe index pentru un crj uniaxial

(ne < n0); (b) cristal uniaxial pozitiv (ne :

elipsoidul pentru suprafața de undă va fi inversul elipsoidului care aparține suprafeței indexului. Cu alte cuvinte, dacă elipsoidul suprafeței indicelui este oblat în raport cu axa optică, atunci suprafața vitezei razelor, care este aceeași cu frontul de undă al construcției Huygens, va fi prolata. Exemple în acest sens sunt ilustrate în Fig. 9.39, unde părțile («) și (b) merg cu (a) și (h) în Fig. 9.38.

C. Cristale biaxiale

Pentru cristalele de anizotropie biaxiale, toate cele trei valori principale ale tensorului dielectric sunt diferite. Acest lucru ne lasă cu forma generală a Eq. (9,98) pentru ε. Ecuațiile (9.100) și (9.101) trebuie tratate fără simplificare suplimentară în cazul general pentru a determina n(e) și câmpurile E.

Tratamentul de aici va fi limitat la cazul în care normala de undă s se află într-un plan perpendicular pe una dintre axele principale ale tensorului dielectric. Presupune pentru

(A)

(b)

Fig. 9.59 Suprafețele cu viteza razelor Corespunzător cu Fig. 9.38. (Suprafețele de undă sau waveletele lui Huygens la unitatea de timp după propagarea de la origine.) (a) Cristal uniaxial negativ (t>0 < ve). (b) Cristal uniaxial pozitiv (υ0 > ve).

este convenabil că nx < ny < nz și să presupunem că s se află în planul yz Atunci s — (O, sy, sz) și ecuațiile. (9.100) da

(n2 - n2x)Ex = 0(9.134a)

(ny — n2sz)Ey — n2syszEz = Ov(9.134b)

- n2syszEy + (n2 - n2s2)Ez = 0(9,134c)

O soluție este pur și simplu

Ey = Q, Ez = Q, Ex ≠Q ; n = nx (9,135)

Suprafața indexului în acest caz este un cerc în planul yz. Câmpul D are Componente

Dy = Dz = Q, Dx = ε0nxEx (9.136a)

prin urmare

D = ε0n2E (9.136b)

Viteza razelor și viteza undei sunt ambele de-a lungul lui s pentru această soluție. Direcțiile D și E sunt normale cu planul yz, așa cum se arată în Fig. 9.40.

Fig. 9.40 Secțiuni ale suprafețelor index pentru un cristal biaxial cu nx<ny< nz. Direcțiile lui D și E pentru cercuri sunt în afara planului desenului, așa cum este indicat de puncte.

⅜

K

(9.138)

O altă soluție a ecuațiilor. (9.134) va avea

Ex = Q, Ey≠Q, Ez ≠ 0 (9,137)

Ecuațiile (9.134b, c) au aceeași formă ca și ecuațiile. (9.126), iar soluțiile pentru n(s) vor avea aceeași formă ca Ec. (9.127), și anume,

l-⅛,≤

n2 n2z+n2y

Astfel, pentru această soluție când â este de-a lungul axei y, n = nz, iar când â este de-a lungul axei z, n = ny. Vectorii D vor fi în planul yz tangent la elipsa formată prin intersecția suprafeței undei pentru această soluție cu acel plan. Elipsa are semiaxa mare nz și semiaxa minoră ny.

Rezultate similare se obțin pentru s perpendicular pe axele y și x. În primul caz, una dintre suprafețele indexului intersectează pianul xy într-un cerc cu raza ny. Cealaltă suprafață index intersectează pianul în elipsă.

1 sZ sX

τ = 4 + 4

» ni ni

(9.139)

Deoarece $n_x<n_y<n_z$, această elipsă va intersecta cercul cu raza n_y într-un punct Q. Pentru s de-a lungul OQ, cei doi indici de refracție sunt ambii egali cu n_y.

Direcția OQ este una dintre cele două axe optice unde. Formează un unghi δ cu axa + z care poate fi determinat după cum urmează. Lasă o bară peste s să indice că se află de-a lungul unei axe optice. Apoi

sz = cos <5, sx = sin δ și n = ny

Ecuația (9.139) dă atunci

ɪ nΓ Cos2 <5 sin2 δ,711 \ 1 2 - +2 = COS2 <5 22 I + ^^2 n2χn2z \ n2
n2Jn2z

sau,

2 — n~2

COS2 δ= y 2 (9,140)

nx2~nz2

Din acest rezultat obținem cu ușurință

M 2 — n~ 2

Sin2 <5 = x 2 y 2 (9,141)

nx2~nz2

γi~~ ɪ — Ì1

tan2 ¿ * 2 y 2(9,142)

ny2-nz2

Dacă δ este I mai mic de 45°, se spune că cristalul este un cristal biaxial pozitiv. Dacă δ este mai mare de 45°, se spune că cristalul este negativ. Cealaltă axă optică a undelor este, de asemenea, în planul xz. Formează un unghi δ cu axa z. Când <5 este zero sau 90°, cele două axe optice coincid, iar cristalul devine un cristal uniaxial pozitiv sau, respectiv, negativ.

Figura 9.40 ne permite să vizualizăm un octant al suprafețelor index pentru un mediu biaxial. Suprafețele complete pot fi obținute prin reflexie în planurile xy, yz și zx. Rețineți că există două foi interpenetrante care se întâlnesc la axele optice. Figurile 9.40έ>, c și d arată intersecțiile suprafețelor complete cu fiecare plan de coordonate. Rețineți că aceste intersecții constau din aчлrcie și o

elipsă. Cercul corespunde lui Iight cu E și D perpendicular pe plan, elipsa lui ■ï Iight cu E și D în plan.

⅛

REFERINȚE

Arfken, G. Metode matematice pentru fizicieni. Académie Press, New York, 1970.

Azzam, RMA și NM BaShara. Elipsometrie și lumină polarizată. Olanda de Nord, New York, 1977.

Beran, MJ și GB Parreηt, Jr. Teoria coerenței parțiale. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1964.

Born, Max și Emil Wolf. Principii de optică. Pergamon Press, Oxford, 1980.

Cagnet, Michel, Maurice Françon și Jean-Claude Thrierr. Atlasul fenomenelor optice. Springer-Verlag, Berlin, 1962.

Clarke, David. Lumină polarizată și măsurare optică. Pergamon Press, Oxford, 1971. Driscoll, Walter G. și William Vaughan. Manual de optică. McGraw-Hill, New York, 1978.

Rossi, Bruno. Optica. Addison-Wesley, Reading, Mass., 1957.

Shurecliff, WA și SS Balard. Lumina polarizata. Van Nostrand, Princeton, NJ, 1964. Wood, Elizabeth A. Crystals and Light: An Introduction to Optical Crystallography. Van Nostrand, Princeton, NJ, 1964.

Probleme

Secțiunea 9.1 Lumină polarizată

1. Descrieți semicantitativ cu o schiță starea de polarizare a undelor de lumină, respectând următoarele ecuații:

(b) Ex = A cosi

(a) Ex = A cos(ωt – kz)

Ey – IA cos(ωt – kz)

. π ωt – kz + -4

Ey = A cos(ωt – kz)

(71 ωt – kz--

4

/Л\

E,, = I ɪ lcos(ωt – kz)

2. Arătați că Al + A2r =+ A$)

3. Arătaţi că, în general, suprapunerea a două fascicule cvasimonocromatice coerente reciproc de lumină polarizată el-iptic va produce un fascicul de lumină polarizată eliptic.

4. (a) Arătați că lumina polarizată circular poate fi reprezentată ca suprapunerea coerentă a două unde Ilinear polarizate care vibrează în unghi drept.

(b) Arătați că lumina polarizată inițial poate fi reprezentată ca suprapunerea coerentă a luminii polarizate circular la dreapta și a luminii polarizate circular la stânga.

(c) Arătați în continuare că modificarea sumei fazelor luminii RCP și LCP din (b) modifică planul de vibrație al luminii polarizate inițiale rezultate.

5. Găsiți valori numerice pentru Al, Ar, Φl și Φr,

schițați elipsa și indicați sensul ei de rotație pentru lumina descrisă de

Ex = Ax cos φ0

Ey = Ay cos(φ0 + φ)

cu

/ ,π1

(a) Φ= 2Ay=2Ax

(b) ≠ = Ay = Ax

π 1

(c) ≠= 4Ay=2 A*

5π

(d) Φ = -j- Ay = Ax

(θ) ≠ = ɪ Ay = Ax

6. În cazul general al luminii polarizate eliptice specificate de Ex = Ax cos φ0, Ey = Ay cos (φ0 + φ) arată că elipsa de polarizare respectă următoarea formulă

'F \ 2 FF

1^jy \ *> 1^jχ &У ɪ • 2 J.

–zI – 2 –z cos φ = sm φ

Ay) Axe Ay

7. În Fig. 9.7, elipsa de polarizare generală este rotită cu β/Ї în raport cu axele de coordonate. Definiți noi axe de coordonate dreptunghiulare care sunt rotite astfel încât în noul sistem câmpul Componentele să fie Ex și Ey unde

(β' Ei = Ex cosi-

ɪ ,7 . (β' + Ey smi -

• fβ'

Ey= -ExSini-

+ Ey cosi -

Arătați că în sistemul de coordonate rotit elipsa de polarizare ia forma

/EA2 /EA2 ι

V√ \A~yì

8. Demonstrați că orientarea elipsei generale de polarizare față de axele de coordonate x și y este dată de β/2 cu

tan(/?) = tan(2χ) cos φ

unde tan χ = Ay/Ax și φ = φy − φx.

Problema 641

9. Folosind ecuația generală pentru lumina polarizată eliptică, care este dată în problema 6, verificați dacă polarizarea liniară și polarizarea circulară dreapta și stânga sunt cazuri speciale. Determinați, în cazul general, punctele în care elipsa de polarizare atinge dreptunghiul care este definit de Ex = ±Ax, Ey = ±Ay.

10. Deduceți Ec. (9.23) pentru reprezentarea circulară a fazorului de câmp în termeni de suma și diferența an;:.oa și β.

11. Lumina polarizată liniar este incidentă la orice gì 650 pe un cristal de fosfură de galiu. Undaι⅛lh este de 288 nm, ceea ce corespunde unui indice complex de refracție de (3,862) − i(1,481). Specificați orientarea și excentricitatea elipsei de polarizare după reflecție dacă lumina incidentă este polarizată la 45° față de planul de incidență.

Secțiunea 9.2 Elemente optice sensibile la polarizare

12. Demonstrați că pentru o placă de paraficie plană, dacă condiția lui Brewstef este satisfăcută la interfața superioară, va fi satisfăcută și pentru incidența internă pe a doua interfață.

13. O grămadă de șase plăci parafici este folosită la unghiul lui Brewstef. Dacă $n = 1{,}62$, găsiți fracția luminii transmise care este polarizată în planul de incidență și perpendiculară pe planul de incidență. Să presupunem că radiația nepolarizată este incidentă. Amintiți-vă că reflecția multiplă va juca un rol; cu toate acestea, puteți presupune că reflexiile multiple sunt incoerente.

14. Se consideră reflexia internă totală a unui fascicul de lumină incident polarizat liniar la 45° față de planul de incidență al unei interfețe dielectrice. Să presupunem că ceea ce am numit aici axa x este asociat cu lumina polarizată perpendicular pe planul de incidență. Folosind formalismul din capitolul 2, arătați că defazarea relativă $\varphi = \varphi_y - \varphi_x$ respectă ecuația

. Φ

bronz — =

2

cos2 θ

y/n2 sin2 θ — n'2 n cos θ

Arătați că defazarea relativă este maximă atunci când

cos θ =

ln2 — n'2

n2 + n'2

15. Cu referire la problema anterioară, luăm în considerare prisma prezentată în Fig. 9.41, pentru care două interne

apar reflexii. Aceasta dublează defazarea relativă, producând o deplasare netă de 2φ. Când $2\varphi = \pi/2$, dispozitivul se numește romb Fresnel. Apoi funcționează ca o placă cu un sfert de undă. Cu $n = 1$ și n' ca parametru, găsiți valoarea minimă a lui n_1 și unghiul de incidență corespunzător care poate fi utilizat într-un astfel de romb.

16. Deduceți Ec. (9.33) din Ec. (9,32).

17. Indicii de refracție pentru calcit și cuarț pentru linia sodiului sunt

Calcit: $n_0 = 1{,}654$, $n_e = 1{,}486$

Cuarț: $n_0 = 1{,}544$, $n_e = 1{,}553$

Calculați grosimea unui sfert de undă piat făcut din aceste materiale și spuneți dacă axa optică este o axă rapidă sau lentă a plăcii.

18. O sursă punctiformă de lumină galbenă este plasată într-un cristal de calcit. Determinați forma și găsiți dimensiunea fronturilor de undă sferice și elipsoidale care există 10-11 secunde mai târziu. Folosiți datele din problema 17.

19. Discutați acțiunea unei plăci „semi-undă” (pentru care \ ne-n0 \ d = λ/2) asupra diferitelor tipuri de lumină polarizată.

20. Fie fasciculul incident să aibă parametrii de polarizare Al/Ar ≠ 1 și α = ϕb- φκ, ca în Fig. 9.42. Arătați că există patru valori ale lui ψ1 pentru care se poate obține extincția cu polarizator și găsiți valoarea rezultată a lui ψi și ψ2•

21. O placă plan-paralelă este tăiată dintr-un cristal de calcit pentru a avea o grosime de 3 cm cu axa optică paraficiată către fețele plăcii. Lumina care este nepolarizată la o lungime de undă de 589 nm (lumină de sodiu) este incidentă pe fața cristalului la un unghi de 450. Calculați separarea razelor obișnuite și extraordinare pe măsură ce ies din placa de pe partea opusă.

22. Lumina albă polarizată liniar apare în mod normal pe o placă de cuarț care are o grosime de 0,865 mm. Axa optică este paraficită față de fețele plăcii și 45° față de orientarea polarizării incidente. Presupunând că putem folosi indicii dați în problema 17 pentru cuarț și că aceștia sunt independenți de lungimea de undă (doar o aproximare), care lungimi de undă din banda de la 600 la 700 nm vor apărea polarizate circular? Care lungimi de undă apar în polarizare inițială de-a lungul direcției luminii incidente?

23. Calculați unghiul prin care se rotește lumina polarizată inițial în deplasarea printr-o placă de cuarț grosime de 3 mm eut cu fețele perpendiculare pe axa optică. Lumina incidentă are o lungime de undă de 397 nm, care corespunde indicilor de 1,55821 și 1,55810 pentru polarizarea circulară la stânga și, respectiv, la dreapta.

24. Să considerăm o placă cu un sfert de undă proiectată pentru lungimea de undă z0. Discutați comportamentul său pentru lungimile de undă λ lângă Λo, adică pentru ε mic = [(A0/2) – 1]. Imaginează-ți utilizarea acestei plăci în aranjarea problemei 9.20. Spectacol

▲ x(e)

Fig. 9.43

că pentru e = + 0,1 și pentru Iight incident polarizat circular, raportul dintre densitatea fluxului transmis maxim și minim (în funcție de unghiul ψ2) este 164.

Secțiunea 9.3 Lumină parțial polarizată

25. Lumina parțial polarizată poate fi exprimată într-un mod unic ca suprapunerea incoerentă a două fascicule polarizate eliptic. Elipsele au aceeași elipticitate, sens opus de rotație și axele majore orientate în unghi drept.

(a) Arată că putem scrie

(2 ∞S y

íώ ·

e φ sm χ cos χ

e ,φ sin χ cos χ sin2 χ

(• 2 Sin y

elφ sin χ cos χ

— e iφ sin χ cos χ'

2

cos χ

unde faza este definită de Jxy = |Jxy \ e~tφ, unde

T12 sunt definite în Eq. (9.73) și B și C în ecuațiile. (9,77) și (9,78). Atunci χ = tan^1(C/B).

(b) Apoi justificați declarațiile făcute la începutul acestei probleme.

26. Două plăci de calcit pot fi folosite pentru a izola spațial raza e de raza o, așa cum se arată în Fig. 9.43. Grosimile celor două plăci sunt aceleași, iar axele lor optice au unghiuri de înclinare opuse. Raza e are vibrații de câmp electric în planul desenului de-a lungul direcției x, iar raza o are vibrații perpendiculare pe planul desenului de-a lungul direcției y. A doua placă aduce cele două grinzi

împreună la Q. Simbolul C este o placă transparentă folosită ca defazător pentru a face ca lungimea totală a căii optice pentru razele o și e aproape la fel, în special pentru a face diferența de cale optică mai mică decât lungimea de coerență longitudinală a luminii. Rețineți că, din cauza suprafeței sale de undă mai mare și a vitezei mai mari, raza e care trebuie să fie întârziată pentru a se potrivi cu lungimile de cale optică. Fie Δ</> diferența netă de fază rezultată Δς⅛ = Φe - Φo-

ia) Polarizatoarele încrucișate sunt plasate la P și P' având unghiuri de trecere ψ = π/4 și ψ' = 3π/4. Fie Sm densitatea maximă de flux transmisă în funcție de Δ√>. Apoi Δφ este ajustat pentru a da o densitate de flux transmisă zero. Una dintre cele două grinzi din regiunea dintre plăci este blocată. Lumina cu densitatea fluxului Sm/4 este acum transmisă! Explica.

(b) Fie Iight parțial polarizat cu o matrice de coerență generală

fi incident din stânga. În plus față de defazatorul C, un absorbant A este acum introdus în fasciculul e. Nu produce nicio schimbare de fază,

dar modifică amplitudinea cu factorul $\tau_0 < 1$. Care este matricea de coerență rezultată J’ la Q pentru valorile generale ale $\Delta\varphi$ și τ_0?

27. Luați în considerare Iight laser nepolarizat cu următoarele proprietăți.

(a) Timpul de coerență τ suficient de lung pentru a fi ușor accesibil pentru măsurarea directă, să zicem 10-3 sec.

(b) Intensitatea totală care este constantă pe o scară de timp mult mai mică decât timpul de coerență (dar mult mai lungă decât perioada Jight 2π/ω). Discutați calitativ natura fluctuațiilor de densitate de flux observate

• ro această lumină este trecută printr-un polarizator.

5 Determinați matricea de coerență pentru lumina parțial polară având parametrii definiți în secțiunea ' 02. Scrieți mai întâi componentele matricei cu re` oeet la sistemul de coordonate x-ÿ (Fig. 9.22). Apoi se calculează coordonatele și se calculează elementele mεtr X în raport cu sistemul xy.

29. O rețea de difracție este acoperită cu două foi polaroid cu direcții de trecere reciproc perpendiculare orientate la 45° față de liniile rețelei (Fig. 9.44). Ce face asta pentru rezoluția finală a grătarului

(a) Lumina polarizată de-a lungul uneia dintre direcțiile de trecere.

(b) Lumina polarizată paralel cu liniile.

(c) Lumina polarizată perpendicular pe liniile.

(d) Lumină nepolarizată.

Secțiunea 9.4 Optica cristalului

30. Demonstrați că valorile lui n2 care rezolvă ecuațiile. (9.99) și (9.100) trebuie să fie pozitive. {Sugestie: Ec. (9.99) și (9.100) sunt echivalente cu

D = εE = H2E1

tensorul ε este definit pozitiv, ceea ce înseamnă că

∑⅛EiEj.>o ɪj

cu excepția cazului în care Ei = 0 pentru ail i.)

31. Rezolvați Ec. (9.105) pentru a găsi cele două rădăcini pozitive n2 și n2•

32. Arătaţi că cele două unde Ilinear polarizate pentru o undă dată normală â au câmpuri electrice E1 şi E2 care, în general, nu sunt perpendiculare între ele.

33. Descrieți în detaliu cum ^n suprafața indicelui n(s) ne permite să găsim toate mărimile D, E, H și S, având în vedere â și mărimea lui E.

34. Demonstrați Ec. (9.113), care dă viteza razei în termeni de viteza undei.

35. Deduceți Ec. (9.138) din ecuația lui FresneF, Eq. (9,105), cu sx = 0.

Problemele 36 până la 38 se referă la cristalele de anizotropie transformate în prisme pentru a fi utilizate într-un spectrometru precum cel din Fig. 6.40 sau un instrument similar cu lumină aproape paralelă. Planul de incidență este perpendicular pe vârful AC din Fig. 9.45.

36. Să se arate că atunci când un cristal uniaxial este transformat într-o prismă cu vârful AC paralel cu axa optică, atât razele obișnuite, cât și cele extraordinare se supun legii obișnuite de refracție cu indicii n0 și respectiv ne.

37. Să considerăm o prismă formată dintr-un cristal uniaxial cu axa sa optică paralelă cu AB. Să se arate că lumina cu E polarizat perpendicular pe planul de incidență este refractată în mod obișnuit cu indicele nr. Arătați că lumina cu E care vibrează în planul de incidență se comportă într-un mod mai complicat, cu excepția cazului în care deviația 0d este un minim 0Dmin, moment în care legea simplă de refracție este valabilă cu indicele ne dat de ecuația. (2,98)

păcat

ne = —

38. Dacă un cristal biaxial este transformat într-o prismă, așa cum se arată în Fig. 9.45, cu vârful AC paralel cu axa principală J a tensorului dielectric, arătați că lumina polarizată paralel cu AC va respecta forma simplă a SnelFs Iaw

(« + min)

2

sin(α/2)

Fig. 9.45

Fig. 9.46

(b)

cu indice nj. Dacă, în plus, o altă axă principală, să zicem Zcth, este orientată paralel cu AB, atunci Iight polarizat în planul de incidență va avea un unghi θd de deviație minimă care să satisfacă

(α + θ1

Păcat -------

D, min-

2

Пк sin(a/2)

Arată asta.

39. Să se arate că într-un cristal uniaxial unghiul cel mai mare Ay = γe – γ0 între direcția razei și direcția normalei undei â apare atunci când â formează un unghi cu axa optică a lui.

‰ = bronz

și asta

bronz Aymax

2∏en0

40. Arătați că este posibil să se facă o placă cu un sfert de undă care să fie utilizată cu o incidență aproape normală dintr-o felie subțire a unui cristal biaxial. Foile subtiri de mica orientate aproape exact paralel cu planul yz pot fi preparate cu usurinta prin despicare. Ce grosime ar trebui să aibă o astfel de foaie

faceți o placă cu un sfert de undă pentru Iight cu lungimea de undă 500 nm dacă indicii principali sunt nx = 1,5601, ny = 1,5936 și n2 = 1,5877?

41. Luați în considerare prismele de calcit din Fig. 9.46 utilizate wr⅛ Iight nepolarizat la incidență normală, așa cum se arată. Ls' n0 = 1,668 și ne = 1,491 și se calculează intervalul pentru care o singură componentă polarizată este critic⅛li, reflectată la a doua suprafață. Care dintre ele este? AVè prisme (a) și (Z?) echivalente în acest sens? Sunt t⅜y echivalent pentru razele întrerupte?

Ti

42. Un fascicul de lumină paralel nepolarizat (Fig. 9.47) incide în mod normal pe o față a unui cristal turcoaz, care este biaxial și are indici principali de nx = 1,520, ny = 1,523 și nz = 1,530. Cu a = 30°, calculați unghiurile de deviație pentru următoarele moduri de tăiere a prismei: AB//x și BC//y, cu AB//y și BC//z` și cu AB//z și BC //X. Cu fiecare dintre aceste orientări, găsiți intervalul a pentru care doar

una dintre cele două raze polarizate reciproc perpendicular este reflectată critic.

43. Luați în considerare prismele Rochon și Wollaston precum cele din fig. 9.19 făcute din cuarț pentru care n0 = 1,54467 și ne = 1,55379. Cu un incident de lumină nepolarizat în mod normal, calculați unghiurile făcute atât de razele obișnuite, cât și de cele extraordinare cu normala la a doua suprafață după ce acestea au ieșit din ea (a = 35°).

44. Luați în considerare o prismă de polarizare distanțată în aer din calcit, Fig. 9.48. Funcționează reflectând total raza obișnuită la spațiul de aer, în timp ce trece raza extraordinară. Există doar un interval finit al unghiului de incidență θ pentru care apar ambele efecte. Prisma este proiectată astfel încât, dacă raza o este incidentă sub normală la un unghi mai mare decât θo, aceasta încetează să fie

reflectată în totalitate, în timp ce, dacă raza este incidentă peste normală la un unghi mai mare decât θo, ea încetează să fie transmisă și este, de asemenea, reflectată total. Utilizați aceste două criterii pentru a determina răspândirea unghiulară maximă 2θ0 și unghiul prismei a.

Fig. 9.49

⅛5. Când întrefierul prismei problemei 44 este . Înlocuit de ulei de semințe (n = 1,494), deschiderea unghiulară 2f•n poate fi mărită considerabil cu condiția ca unghiul α să fie mult mai mare (Fig. 9.49). Aceasta le dă

Polarizatorul Glan-Thompson din Fig. 9.19. Cu a = 76,4°, găsiți valoarea maximă a unghiului de incidență pentru raza pentru care va fi în continuare reflectată în totalitate.

Apendice:

Integrala Fresnel-Kirchhoff

Aici vom pune teoria difracției pe o matematică! Fundație mai fermă decât cea oferită de abordarea intuitivă a capitolului 6. Linia de raționament, care a fost dezvoltată de Kirchhoff, se bazează în cele din urmă pe ecuația undei independentă de timp.

Pentru a sublinia dependența de timp a câmpului optic, să ne amintim că, prin principiul de suprapunere, putem adăuga componente având frecvențe diferite pentru a produce un efect de difracție policromatică. Să presupunem că atunci avem de-a face cu o componentă monocromatică la un moment dat. Aceasta are forma

Câmp electric optic fizic = Re(Eeltot)

Aici E conține doar dependența spațială a câmpului optic (spre deosebire de capitolul 6 unde am folosit aceeași notație pentru a reprezenta și dependența de timp). Dacă folosim această formă în ecuația de undă tridimensională dependentă de timp, ajungem la

V2E + Zc2E = 0   (Al)

unde κ — 2π/Λ = ω/v. Aceasta se numește ecuația Helmholtz. Soluțiile sale conțin doar dependența spațială a câmpului optic fizic. Deoarece, în final, vom calcula în timp câmpul pentru a obține densitatea de flux măsurată, soluțiile ecuației Helmholtz conțin toate informațiile importante pentru soluțiile de difracție la nivelul nostru. În cele ce urmează, folosim E(r) pentru a descrie câmpul optic la sursă, E(F) pentru a descrie câmpul într-un punct P pe o suprafață de integrare în

647

64β

Integrala Fresnel-Kirchhoff

prezența deschiderii și E(r') pentru a descrie câmpul în punctul de observație P. În această notație R1 = |r' — r| și R = |f — r|. De asemenea, vom avea nevoie de vectori unitari de direcție a razei A' = (r' — r)/R' și A = (f — r)/R.

A. Derivarea integralului Fresnel-Kirchhoff din teorema Helmholtz-Kirchhoff

Integrarea de bază a teoriei scalare a direcției Fresnel-Kirchhoff care este utilizată în această carte este obținută prin combinarea ecuațiilor. (6.7), (6.8) și (7.37) (în noua notație)

e, e ikR' (cos θη - cos θ'η) Einc(τ)~^------s~~— —dσ

(A.2)

2 .

Acum discutăm măsura în care această ecuație poate fi obținută din primele principii. La ce ecuație de bază este o aproximare? Este o aproximare a următoarei ecuații, cunoscută sub numele de teorema Helmholtz-KirchholT:

1 д re-f⅛k-fi 0E(f)   de→ | r'-ri-

r 4π JJL | r' -f | 0n° ^õna\r'-r_

σ

dσ

(A-3)

Aceasta este o matematică riguroasă! expresie care urmează din ecuația de undă în limita neîntârziată.

Ecuația (A.3) dă câmpul electric într-un punct r' în termeni de câmp E(f) și derivata sa normală evaluată pe o suprafață închisă σ care fie înconjoară punctul P'(r,) (Fig. A. Ih) sau exclude P' (Fig. A.la). Se presupune că normala nσ este orientată departe de regiunea care Conține P'. În plus, regiunea care conține P' trebuie să fie lipsită de orice sursă de radiație optică. Aceasta include surse secundare de lumină reradiată sau împrăștiată. Astfel, strict vorbind, regiunea trebuie să fie lipsită de material optic de orice fel. Aceasta înseamnă că sursele trebuie să fie de o parte a lui σ și P' trebuie să fie de cealaltă parte. Vom deriva Ec. (A.3) în secțiunea care urmează.

Este important să ne dăm seama că E(f) și ∂E(f)/0nσ reprezintă câmpul și derivata lui la suprafața închisă σ în prezența deschiderii de dijfractare, dacă există. Pentru a obține Ec. (A.2) din Ec. (A.3), trebuie să includem σo, partea deschisă a deschiderii de difracție. De asemenea, permitem să includă σc, o suprafață chiar în spatele părții netransmițătoare a deschiderii de difracție. Deoarece σ trebuie să fie o suprafață închisă, trebuie să adăugăm o matematică! suprafața σa sau σb așa cum se arată în Fig. A.2. Astfel, Corespunzând Fig. A. 1 a, avem

$$\sigma = \sigma 0 + \sigma c + \sigma fl$$

şi Corespunzând Fig. A. Ib avem

$$\sigma = \sigma 0 + \sigma c + \sigma b$$

Fig. A.2

Aici σa este utilă dacă toate sursele optice primare și secundare, cu excepția deschiderii, sunt situate într-o regiune finită a spațiului. Se poate considera că face parte dintr-o sferă mare de rază Ra despre aceste surse; σb poate face parte dintr-o sferă similară despre P'. Putem arăta că, cu tipul de câmpuri electrice fizice întâlnite în optică, se integrează în Eq. (A.3) peste σa sau σb va tinde spre zero, deoarece Ra și Rb tind spre infinit.

Rămâne de integrat Eq. (A.3) peste σ0 + σc. Câmpul real de pe aceste suprafețe este aproape imposibil de determinat, cu excepția celor mai simple cazuri. Acest lucru se datorează parțial pentru că condițiile de limită pentru câmpul optic și derivatele acestuia sunt susceptibile să fie complicate pentru deschiderile fizice reale, care vor absorbi parțial, reflecta parțial și împrăștie parțial lumina incidentă. Prima și cheia aproximării pe care o facem pentru a merge de la Ec. (A.3) la Ec. (A.2) „taie nodul gordian” prezentat de condițiile la limită reale prin aplicarea așa-numitelor condiții la limită Kirchhoff. Acestea înlocuiesc câmpul real în prezența deschiderii cu câmpul incident oriunde deschiderea este deschisă și cu zero oriunde deschiderea nu este transmisă.

ting. Astfel presupunem E(r) = 0 F2=0(A.4a) (A.4b)
pentru r pe σc și £(f) = Einc(f)(A 5a)

d£(r) = ∂ginc(f) ∂nσSna(A.5b)

pentru r pe σ0, partea deschisă a lui σ unde Einc(f) este câmpul în acea poziție în spațiu în absența oricăror deschideri. Apoi Eq. (A.3) devine

t,r',^∫∫

-g→kr | ¿£¡nc(f)

_|r'-f| ∂nσ

βi∏c(f)

¿) e *k | rf | 5nσ |r' - r|

da

(A.6)

Ecuația (A.6) este inutil de complicată pentru utilizare cu lumină. O simplificare are loc dacă lumina incidentă are o direcție bine definită de propagare A în punctul P de pe suprafața σo. Acesta ar fi cazul dacă lumina ar proveni de la o sursă punctiformă P (Fig. A.3). Atunci gradientul lui £ la P este în direcția lui A și putem scrie

.vf m (⅛•⅛)<5Eto <)£.„

<4 £'"Jr,= ^~=-cos%„–

(A.7)

unde θ este unghiul dintre (– Aβ) sau ή și A. Cealaltă derivată normală care apare în Ec. (A.3) poate fi, de asemenea, rescris. Recali R = |r' - f|. Atunci noi avem

ô e ,kR 3 ã------= cos θ' -–

∂na R ” ∂R'

e ,kR

~R'

= -cos θ'Λ ik + – η \ R'

e ikR

R'

(A.8)

Aici θ'η este unghiul dintre (r' – f) sau n' și (–ήσ) sau ή. Pentru undele Iight, distanța R’ de la P(f) la P,(r’) este de obicei mult mai mare decât lungimea de undă $\lambda = 2\pi/k$. Prin urmare

1 2 ,

7 > – și λ R

, 2π 1 κ = – – λ R

iar al doilea termen din Ec. (A.8) este neglijabilă în comparație cu prima. Asta da

õ e lkR

8nσ R'

e ikR

– ik cos θ,η

(A.9)

Putem simplifica Ec. (A.7) într-un mod similar. Lumina cu o direcție bine definită ή de propagare la P va avea dependența spațială locală aproximativă

Einc(r) ≈ Const •e~lkli

unde R este o distanță măsurată în direcția lui ή. Henee

cnπ £inc(r) ÕR Λ l/c£ine(r)

(ATO)

Ecuația (A. 10) este valabilă cu condiția ca sursa P să fie foarte multe lungimi de undă de la suprafața σ0.

Putem folosi ecuațiile. (A.9) și (A. 10) pentru a scrie Ec. (A.6) sub forma

aд = i

e~ikR'

R'

cos θn + cos θn \ ,

----------------'- dσ

2 7

care este Ec. (A.2). Unghiul θ,η este bine definit în toate cazurile, dar θη, unghiul dintre direcția de propagare de la sursă și ή, poate să nu fie bine definit dacă este prezentă o distribuție spațială a

surselor în loc de doar una la P. Dacă aceasta distribuția este prezentă, integrala din Ec. (A.2) va trebui înlocuit cu o sumă de integralais,

cu un punct sursă diferit și o valoare diferită a cos θ'η apărând în fiecare. Din fericire, această complexitate suplimentară este inutilă atunci când intervalul de valori al lui θ'η este mic.

B Derivarea teoremei Helmholtz-Kirchhoff din ecuația Wove

Derivarea Eq. (A.3) începe cu teorema lui Green, care poate fi scrisă

(≠V2≠ - </>V2≠) dY =

σt

Aici integrala de volum se extinde de-a lungul unui volum У^, care este mărginit de suprafața σt. Derivatele normale Sφ/0nσ și ∂ψ | ∂nσ sunt luate în raport cu normala exterioară a lui σt. Atunci ψ și φ pot fi funcții arbitrare de poziție care sunt suficient de bine comportate. Teorema lui Green poate fi demonstrată prin aplicarea teoremei lui Gauss.

V • Ad-T =

A • da

Succesiv la A = ψVφ și A' — φVψ și scăzând.

Alegem φ(τ) = E(r) și alegem volumul У' pentru a nu conține surse primare sau secundare ale câmpului electric, astfel încât ecuația de undă independentă de timp în spațiul liber

V2≠ = -k2φ

tine acolo. Am stabilit și noi

<A(r) =

e >*k' r| |r' - f I

Din capitolul 1 știm că aceasta este o soluție simetrică sferică a ecuației noastre de undă, astfel încât

V2ψ = -k2ψ

cu excepția cazului în care r = r' și trebuie să excludem acest punct din volumul nostru de integrare yz^. Facem acest lucru înconjurând punctul P'(r') cu o sferă mică de rază ε și excluzând acest volum din УЛ Suprafața σl este dată apoi de suma σ + σs, unde σ a fost deja definit și unde σs este suprafața sferei mici, așa cum se arată în Fig. Al. Această alegere a lui 'C și a lui σ garantează că atât φ cât și ψ satisfac ecuația Helmholtz peste tot în yz^. Astfel, în У avem

ψV2φ — φV2ψ = k2ψφ — k2φψ = 0

Atunci teorema lui Green dă

0. Derivarea teoremei Helmholz-Kirchhoff din ecuația Wove 653

Ot

Acum evaluăm în mod explicit integrai peste micile sfere σ. Sfera i În afara regiunii У ; astfel normala exterioară la σ' este de-a lungul razei sale, directă spre interior spre P'(r'). Putem scrie

ψe±-

ψ õn„

,cψ

дп„

e~ikε õE ε ôn„

+ eÍ-ik--}~ rr \ ε/ ε

— ikε

---- dσ

Os

e~lkε 8E ι

-----— dσ +

ε õn„

f,~ick

-----dσ

ε

σí

+ —ŋfi și lkε dσ

Valoarea lui ∂E/∂na va fi mărginită în vecinătatea lui r’, astfel încât valoarea absolută a primului termen să fie mai mică decât

ÕE ff dσ ∂nσ max JJ ε

dE

-— •4πε

ADN max

Aceasta tinde spre zero ca $\varepsilon \to 0$. Al doilea termen este Iess în valoare absolută decât

$k \,|\, E \,|\, ma\chi 4\pi\varepsilon$

care de asemenea tinde spre zero. Pentru al treilea termen, deoarece E(F) este regulat la F = r' (nu există nicio sursă acolo), îl putem trata ca o constantă pentru ε mic și o luăm în afara integralei. Ultimii termeni dau atunci

$d\sigma = - 4\pi E(r')$

ca $\varepsilon \to 0$. Reamintind asta

$\varphi(y) - E(F)$ și $\psi(f) = e\ lk|r'\ rl/\ |\ r' - F|$

Wc s-au dovedit

$[\psi(\delta\varphi \,|\, \partial na) - \varphi(\partial\psi/0n\sigma y]\ d\sigma = 4\pi E(r'),$

care este Ec. (A.3).

index

'*4'i''•√,⅛i!

Proprietățile transformării Fourier

One Dimensiune

F(u) =

f(x)e^i2πuxdx

/(αx)

F*(-u)

f(χ - x0) ni2πu°x/(x)

F(u - u0) fiF2

F1® F2

F1F↑

Exemple unidimensionale

<5(x)

1

cos(2π0x)

sin(2π0x)

exp(- πb2x2)

1

d(u)

1

- [<5(u - u0) + δ(u + U0)] ɪ [θ(u - u0) - δ(u + U0)]

<5(u - u0)

- Jirtp[^πG) \

2x0 sinc(2x0)

(b + i2πu) ɪ

Două dimensiuni
00 f(x, y) = I ¡ F(u, v)ei2*ux+vy1 dy — 00 /(αx, cy) 7^*(χ, У) /(x - x0, y - y0) ei2π(unx + ι•0y}J-^ ʃ) .A ® Л JJ2 fl ® J2 00 F(U, v) = || /(x, y)e-i2πfux+l'>,>dx d y — 00 ɪʌ F(",η | < ι Id \и c) F*(-u, —v) e~ι2π(ux<j + υyo)p^ vj F(u - u0, V - v0) F1F2 F1 ® F2 F1F*
Exemple bidimensionale

λ , , 0,, , У4x0y0 sinc(2πnx0) sinc(2πvy0)

O | χ | > i, | y | > y0J

r2 = x2 + y2 ʃl r ≤ r0]

IO r>r0i exp[- πb2r2~ \

P2 = è2 + V2

->.2

7tr Q

2J1(2pprl,)

2prr0

1 SOLUȚIE

Pexp „Th
https://neculaifantanaru.com
https://neculaifantanaru.com/en/